Équations Différentielles

%% **version avec solution** %%

I. Circuit RC

Considérons le circuit électronique de la Figure 1, composé d'une résistance et d'un condensateur. Par application des la loi des mailles, nous avons la relation

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t).$$

Nous souhaitons analyser la réponse de la tension de sortie $v(t)$ lorsqu'un échelon de tension est appliqué en entrée : $e(t) = 1V$, $\forall t \geq 0$. La tension de sortie est initialement nulle, $v(0) = 0$.

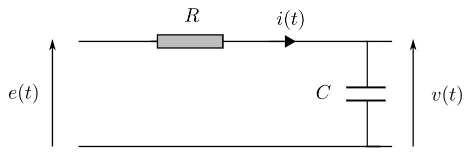


FIGURE 1

1. Dans un premier temps, résolvez l'équation différentielle "à la main".
2. Exprimez la formule permettant de résoudre numériquement l'équation différentielle par la méthode d'Euler (avec un pas de $h = 0.005s$).
3. Pour $R = 2k\Omega$ et $C = 10\mu F$, calculez les 10 premières valeurs et comparez-les aux valeurs théoriques.
4. Tracez les points et la courbe théorique sur un graphique.

SOLUTION

(1) Solution de l'équation différentielle : $s(t) = 1 - e^{-\frac{1}{RC}t}$.

(2) Méthode d'Euler : $s_{n+1} = s_n + \dfrac{0.005}{RC}(1 - s_n)$.

(3) Calcul des premiers points :

t	0	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05
s_n	0	0.25	0.438	0.578	0.684	0.763	0.822	0.867	0.900	0.925	0.944
$s(t)$	0	0.221	0.393	0.528	0.632	0.713	0.777	0.826	0.865	0.895	0.918

(4) Tracés sur la Figure 2.

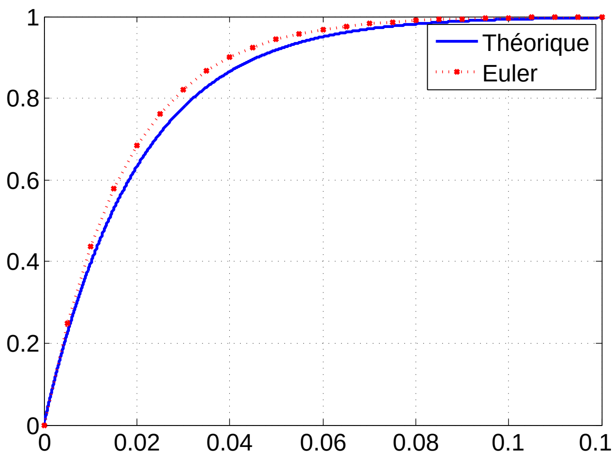


FIGURE 2

II. Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) + y(t) = \cos(3t).$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$. Quelques calculs montrent que la solution de l'équation ci-dessus s'écrit :

$$y(t) = \frac{9}{10}e^{-t} + \frac{1}{10}\big(\cos(3t) + 3\sin(3t)\big).$$

1. Exprimez la formule permettant de résoudre numériquement l'équation différentielle par la méthode d'Euler (avec un pas de $h = 0.1s$).
2. Exprimez la formule permettant de la résoudre par la méthode de Taylor (avec le même pas).
3. Calculez les 5 premières valeurs et comparez-les aux valeurs théoriques.
4. Tracez les points et la courbe théorique sur un graphique.

SOLUTION

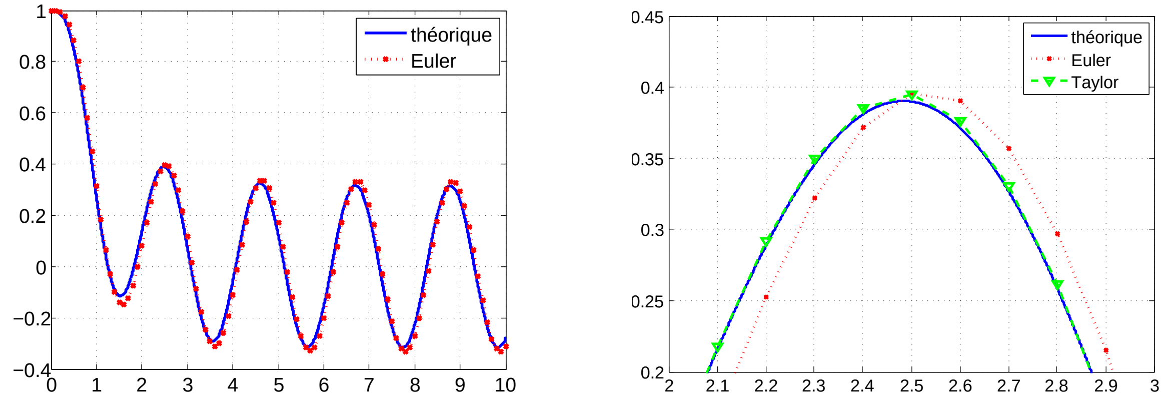
(1) Méthode d'Euler : $y_{n+1} = y_n + 0.1\big(\cos(3t_n) - y_n\big)$.

(2) Méthode de Taylor : $y_{n+1} = y_n + 0.1\big(\cos(3t_n) - y_n\big) + \frac{0.1^2}{2}\Big(-3\sin(3t_n) - \big(\cos(3t_n) - y_n\big)\Big)$.

(3) Calcul des premiers points :

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_n (Euler)	1	1	0.996	0.979	0.943	0.885
y_n (Taylor)	1	1	0.991	0.967	0.923	0.855
$y(t)$	1	0.999	0.989	0.964	0.919	0.852

(4) La Figure 3a montre les tracés de la solution théorique et celle de la méthode d'Euler. La Figure 3b représente un zoom des 3 solutions.



(a) (b)

FIGURE 3

III. Dynamique des populations

Il existe de nombreux modèles permettant de décrire (de façon approchée) l'évolution de la taille d'une population. Un exemple est le *modèle logistique* qui considère le cas d'une population isolée (pas d'interaction avec d'autres populations) et tient compte de la limitation des ressources dans leur environnement. Celui-ci s'écrit :

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

avec N le nombre d'individus, r la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité caractéristique de la population. K caractérise le nombre maximal d'individus que l'environnement peut supporter et représente ainsi le fait que le milieu ait des ressources limitées.

1. Exprimez la formule permettant de résoudre numériquement l'équation différentielle par la méthode d'Euler (avec un pas de $h = 1an$).
2. Exprimez la formule permettant de la résoudre par la méthode de Taylor (avec le même pas).
3. Pour $r = 0.2$, $K = 500$ et $N(0) = 25$, calculez les 5 premières valeurs.
4. Tracez les points de l'évolution de N sur un graphique.

SOLUTION

(1) Méthode d'Euler : $N_{n+1} = N_n + rN_n\left(1 - \frac{N_n}{K}\right)$.

(2) Méthode de Taylor : $N_{n+1} = N_n + rN_n\left(1 - \frac{N_n}{K}\right) + \frac{1}{2}\left(r^2 N_n\left(1 - 2\frac{N_n}{K}\right)\left(1 - \frac{N_n}{K}\right)\right)$.

(3) Calcul des premiers points :

t	0	1	2	3	4	5
N_n (Euler)	25	29.75	35.35	41.92	49.60	58.53
N_n (Taylor)	25	30.18	36.35	43.66	52.29	62.40

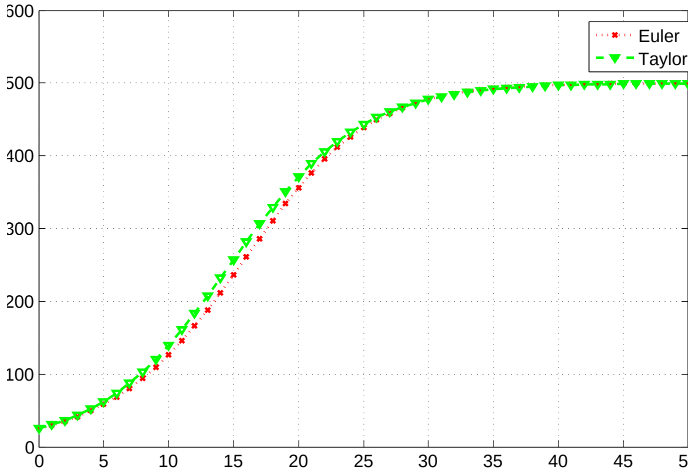


Figure 4

(4) La Figure 4 montre les tracés des solutions obtenues par la méthode d'Euler et la méthode de Taylor.

IV. Système masse-ressort

Considérons le système mécanique de la Figure 5. Le mouvement de la masse est décrit par une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

où m est la masse, c le coefficient d'amortissement visqueux, k la raideur du ressort. La variable x représente la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre.

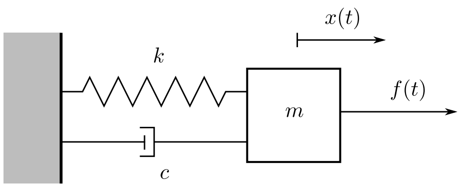


Figure 5

Nous souhaiterions observer l'évolution de la position x lorsque la force extérieure f est nulle ($\forall t$) et pour les conditions initiales suivantes : position initiale $x(0) = 1$, vitesse initiale $\dot{x}(0) = 0$. Pour l'application numérique : $m = 1\,kg$, $k = 2\,N/m$ et $c = 0.5\,N/m.s^{-1}$.

1. Exprimez l'équation du mouvement sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 1 en posant

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

2. Exprimez la formule permettant de résoudre numériquement l'équation différentielle par la méthode d'Euler (avec un pas de $h = 50ms$).
3. Exprimez la formule permettant de la résoudre par la méthode de Taylor (avec le même pas).
4. Calculez les 5 premières valeurs.
5. Tracez les points de l'évolution de N sur un graphique.

Solution

(1) nouvelle formulation : $\dot{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix}}_{A} y(t)$.

(2) Méthode d'Euler : $y_{n+1} = y_n + 0.05 A y_n$.

(3) Méthode de Taylor : $y_{n+1} = y_n + 0.05 A y_n + \dfrac{0.05^2}{2} A^2 y_n$.

(3) Calcul des premiers points :

t	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
x_n (Euler)	1	1	0.995	0.985	0.971	0.951
x_n (Taylor)	1	0.998	0.990	0.978	0.961	0.940

(4) La Figure 6 montre les tracés des solutions de x obtenues par la méthode d'Euler et la méthode de Taylor.

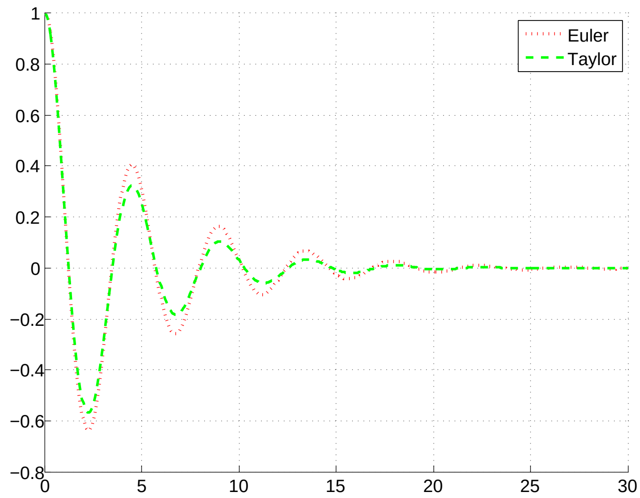


Figure 6

V. Équation différentielle linéaire du second ordre

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = e^{-2t}.$$

avec des conditions initiales nulles. Quelques calculs montrent que la solution de l'équation ci-dessus s'écrit :

$$y(t) = e^{-2t} + t\, e^{-t} - e^{-t}.$$

1. Exprimez l'équation sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 1 en posant

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}.$$

2. Exprimez la formule permettant de résoudre numériquement l'équation différentielle par la méthode d'Euler (avec un pas de $h = 0.02$).
3. Exprimez la formule permettant de la résoudre par la méthode de Taylor (avec le même pas).
4. Tracez les points et la courbe théorique sur un graphique.

Solution

(1) nouvelle formulation : $\dot{Y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} Y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$

(2) Méthode d'Euler : $Y_{n+1} = Y_n + 0.02 \left(Ay_n + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t_n} \end{bmatrix} \right)$.

(3) Méthode de Taylor : $Y_{n+1} = Y_n + 0.02 \left(Ay_n + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t_n} \end{bmatrix} \right) + \frac{0.02^2}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2e^{-2t_n} \end{bmatrix} + A \left(Ay_n + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t_n} \end{bmatrix} \right) \right)$.

(4) La Figure 7 montre les tracés de la solution théorique et celle de la méthode d'Euler.

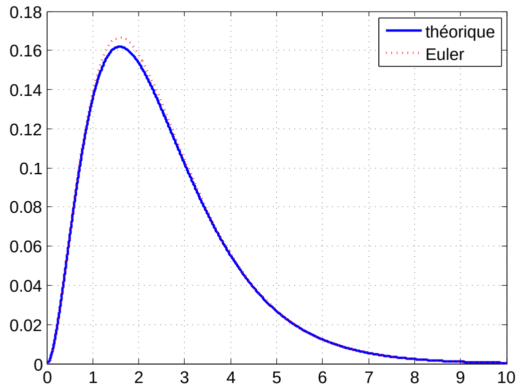


Figure 7