Institut Catholique d'Arts et Métiers — Toulouse
Yassine Ariba

Exercices d'Automatique Numérique

I. Transformée en Z et réponse temporelle

Soit les équations récurrentes suivantes :

(a) $y[k] - 0.3y[k-1] + 0.02y[k-2] = u[k-1]$

(b) $y[k+2] - 3y[k+1] + 2y[k] = u[k]$

(c) $y[k] + 0.25y[k-1] - 0.125y[k-2] = u[k-1] - 2u[k-2]$

(d) $y[k+2] - 1.6y[k+1] + 0.8y[k] = u[k+2]$

Les signaux sont supposés nuls pour $k < 0$. Pour chaque cas :

1. Calculer les 6 premiers échantillons $y[k]$ avec $u[k]$ un échelon unitaire.
2. Exprimer la fonction de transfert $G(z) = Y(z)/U(z)$.
3. Exprimer la réponse temporelle $y[k]$ à l'entrée $u[k]$ (un échelon unitaire).

► Solution

(a) $y[k] - 0.3y[k-1] + 0.02y[k-2] = u[k-1]$.

6 premiers échantillons :

$$y[0] = 0 \quad ; \quad y[1] = 1 \quad ; \quad y[2] = 1.3 \quad ; \quad y[3] = 1.37 \quad ; \quad y[4] = 1.385 \quad ; \quad y[5] = 1.388$$

Fonction de transfert en Z

$$G(z) \;=\; \frac{z}{z^2 - 0.3z + 0.02}$$

Réponse temporelle : $y[k] \;=\; 1.389 - 2.5(0.2)^k + 1.11(0.1)^k$

(b) $y[k+2] - 3y[k+1] + 2y[k] = u[k]$.

6 premiers échantillons :

$$y[0] = 0 \quad ; \quad y[1] = 0 \quad ; \quad y[2] = 1 \quad ; \quad y[3] = 4 \quad ; \quad y[4] = 11 \quad ; \quad y[5] = 26$$

Fonction de transfert en Z

$$G(z) \;=\; \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

Réponse temporelle : $y[k] \;=\; 2^k - 1 - k$

(c) $y[k] + 0.25y[k-1] - 0.125y[k-2] = u[k-1] - 2u[k-2]$.

6 premiers échantillons :

$$y[0] = 0 \quad ; \quad y[1] = 1 \quad ; \quad y[2] = -1.25 \quad ; \quad y[3] = -0.56 \quad ; \quad y[4] = -1.01 \quad ; \quad y[5] = -0.81$$

Fonction de transfert en Z

$$G(z) \;=\; \frac{z-2}{z^2 + 0.25z - 0.125}$$

Réponse temporelle : $y[k] \;=\; -\dfrac{8}{9} - \dfrac{20}{9}(-0.5)^k + \dfrac{28}{9}(0.25)^k$

(d) $y[k+2] - 1.6y[k+1] + 0.8y[k] = u[k+2]$.

18 premiers échantillons :

$$y[0] = 1 \quad ; \quad y[1] = 2.6 \quad ; \quad y[2] = 4.36 \quad ; \quad y[3] = 5.89 \quad ; \quad y[4] = 6.94 \quad ; \quad y[5] = 7.39$$

$$y[6] = 7.27 \quad ; \quad y[7] = 6.72 \quad ; \quad y[8] = 5.94 \quad ; \quad y[9] = 5.12 \quad ; \quad y[10] = 4.44 \quad ; \quad y[11] = 4.01$$

$$y[12] = 3.86 \quad ; \quad y[13] = 3.97 \quad ; \quad y[14] = 4.26 \quad ; \quad y[15] = 4.64 \quad ; \quad y[16] = 5.02 \quad ; \quad y[17] = 5.31$$

Fonction de transfert en Z

$$G(z) \;=\; \frac{z^2}{z^2 - 1.6z + 0.8}$$

Réponse temporelle : $y[k] \;=\; 5 - 4\Big(e^{-0.1116\,k}\cos(0.4636\,k) - \dfrac{1}{2}e^{-0.1116\,k}\sin(0.4636\,k)\Big)$

♢

II. Régulation de niveau d'un réservoir

On considère le réservoir d'eau représenté sur la Figure 1. Ce système est constitué d'une pompe, permettant d'alimenter le réservoir avec un débit $q_e(t)$, et d'un écoulement de débit $q_s(t)$ assurant l'alimentation d'une installation. Nous souhaitons mettre en place un dispositif numérique pour la régulation de la hauteur d'eau $h(t)$.

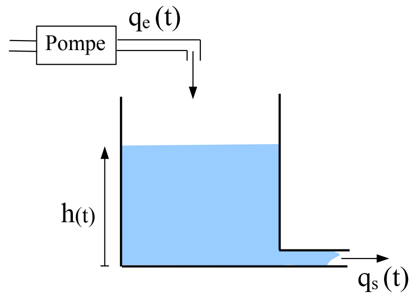

FIGURE 1: *Réservoir d'eau*

L'évolution de la hauteur de liquide dans le réservoir est décrit par l'équation différentielle

$$S\frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - q_s(t)$$

où $S = 5\ m^2$ est la surface du réservoir. En première approximation l'écoulement incontrôlé peut être considéré comme proportionnel à la hauteur. Le réservoir est alors modélisé par

$$S\frac{dh(t)}{dt} + ah(t) = q_e(t)$$

avec $a = 0.02\ m^2/s$.

1. Donner la fonction de transfert $G(p)$ du système réservoir.

2. Déterminer la fonction de transfert échantillonnée $G(z)$ du système réservoir pour un fréquence d'échantillonnage de $F_e = 0.5Hz$.

3. Calculer et tracer la réponse de $h(kT_e)$ à un échelon d'amplitude $q_{e_0} = 3.10^{-3}\ m^3/s$.

Le système est maintenant commandé en boucle fermée avec une simple correction proportionnelle de gain $K > 0$.

4. Dessiner le schéma-bloc du système ainsi asservi.

5. Donner la fonction de transfert $F(z)$ du système en boucle fermée.

6. Analyser la stabilité de l'asservissement en fonction de l'amplification K.

7. On fixe $K = 0.5$. Calculer et tracer la réponse indicielle du système asservi.

8. Calculer l'erreur de position en fonction de K.

▶ Solution

1) Fonction de transfert du système :

$$G(p) = \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{1}{Sp + a} = \frac{1/S}{p + \frac{a}{S}} = \frac{0.2}{p + 0.004}$$

2) Fonction de transfert échantillonnée du système : $H(z) = \mathcal{Z}\Big\{B_0(p)G(p)\Big\}Q_e(z)$

$$G(z) = \mathcal{Z}\Big\{B_0(p)G(p)\Big\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\Big\{\frac{G(p)}{p}\Big\}$$
$$= \frac{z-1}{z}\,\frac{1}{a}\,\frac{z(1 - e^{-\frac{a}{S}T_e})}{(z-1)(z - e^{-\frac{a}{S}T_e})} = \frac{0.3984}{z - 0.992}$$

3) Réponse du système à l'entrée $q_e(kT_e) = q_{e_0}$, $\forall k \geq 0$, soit $Q_e(z) = q_{e_0}\frac{z}{z-1}$:

$$h(kT_e) = q_{e_0}\, 50\Big(1 - e^{-0.004\, kT_e}\Big)$$

cf. Figure 2.

4) cf. Figure 3.

5) Fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$F(z) = \frac{0.3984\, K}{z - 0.992 + 0.3984\, K}$$

6) Asservissement stable pour $0 < K < 5$.

7) Réponse du système asservi à l'entrée $h_c(kT_e) = 1$, $\forall K \geq 0$:

$$h(kT_e) \mathrel{\rlap{$=$}4}\ 0.96\Big(1 - e^{-0.11\, kT_e}\Big)$$

cf. Figure 4.

8) Expression de l'erreur d'asservissement :

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + K\,G(z)} H_c(z) = \frac{z - 0.992}{z - 0.992 + 0.3984\,K} H_c(z)$$

Erreur de position :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \frac{z - 0.992}{z - 0.992 + 0.3984\,K} \frac{z}{z-1} h_{c_0} = \frac{0.008}{0.008 + 0.3984\,K} h_{c_0}$$

$\diamondsuit$

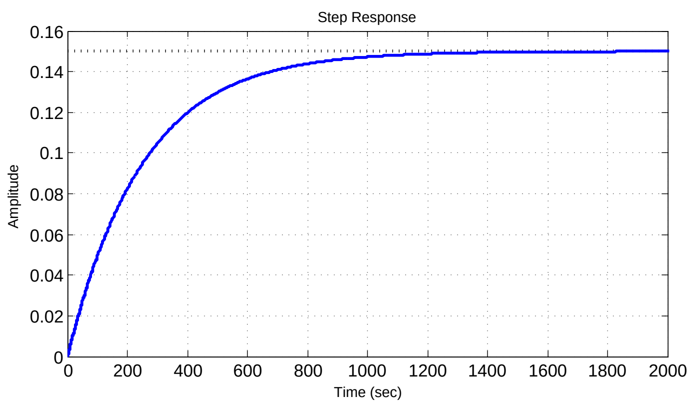

FIGURE 2: *Réponse de $h(kT_e)$ à un échelon d'amplitude $q_{e_0} = 0.003\,m^3/s$.*

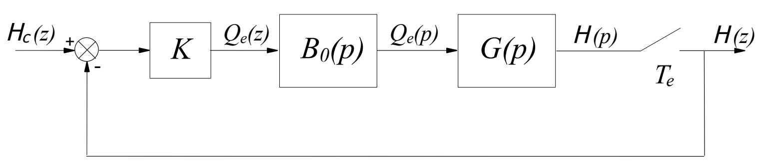

FIGURE 3: *Système asservi.*

III. Asservissement de position d'une Antenne

L'étude porte sur l'asservissement en position angulaire d'une antenne destiné à poursuivre avec précision la position d'une cible mobile évoluant dans l'espace aérien (cf. Figure 5). On se propose d'étudier plus particulièrement l'asservissement de l'angle de l'antenne suivant l'axe vertical.

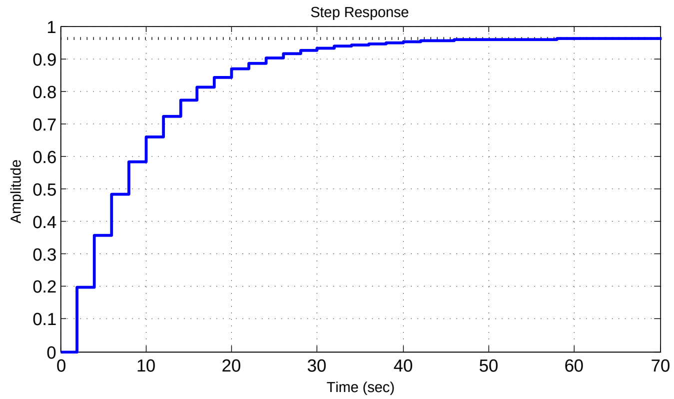

FIGURE 4: *Réponse indicielle $h(kT_e)$ du système asservi pour $K = 0.5$.*

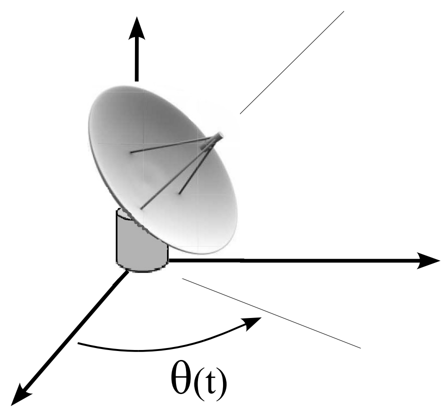

FIGURE 5: *Antenne*

Le système de motorisation de l'antenne peut être modélisé par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{\Theta(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{\frac{1}{10}}{p(0.2p+1)}$$

où $\Theta(p)$ et $U(p)$ sont, respectivement, les transformées de Laplace de l'angle $\theta(t)$ et la tension d'alimentation du moteur assurant le mouvement.

1. Déterminer la fonction de transfert échantillonnée du système en fonction de T_e.

Nous réalisons ensuite un asservissement tel que représenté sur la Figure 6. $D(z)$ est le correcteur.

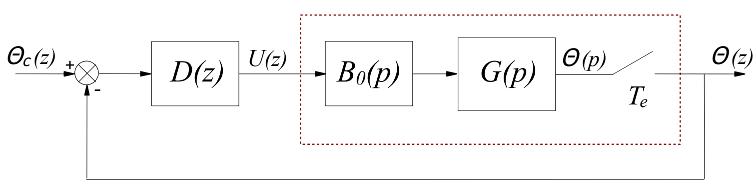

FIGURE 6: *Système asservi.*

2. On choisit $T_e = 50ms$. Écrire $G(z)$ et calculer la fonction de transfert $F(z)$ en boucle fermée pour un correcteur proportionnel ($D(z) = K$).

3. Analyser la stabilité du système asservi en fonction de K.

4. Exprimer l'erreur de position et l'erreur de traînage en fonction de K. Les calculer pour $K = 10$.

5. Calculer le gain de correction permettant d'avoir une erreur de vitesse inférieure à 2% de θ_{c_0}. Cette valeur est-elle réalisable ?

Nous posons maintenant un second correcteur $D(z) = 10\dfrac{1.013z - 0.9875}{z-1}$.

6. Le système asservi est-il stable ?

7. Calculer les nouvelles erreurs.

8. Donner l'équation récurrente à implémenter dans l'algorithme de commande.

► Solution

1) Fonction de transfert échantillonnée du système :

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(p)}{p}\right\} = \frac{z\left(\frac{T_e}{10} + \frac{1}{50}\left(e^{-5T_e} - 1\right)\right) + \frac{1}{50} - e^{-5T_e}\left(\frac{T_e}{10} + \frac{1}{50}\right)}{\left(z-1\right)\left(z - e^{-5T_e}\right)}$$

2) Fonctions de transfert du système et de l'asservissement :

$$G(z) = 10^{-4}\frac{5.76z + 5.3}{(z-1)(z-0.7788)} \qquad \text{et} \qquad F(z) = \frac{K.10^{-4}(5.76z+5.3)}{z^2 + z(5.76.10^{-4}K - 1.7788) + 0.7788 + 5.3.10^{-4}K}$$

3) Critère de Jury

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0.7788 + 5.3.10^{-4}K + (5.76.10^{-4}K - 1.7788) + 1 & > & 0 \\ 0.7788 + 5.3.10^{-4}K - (5.76.10^{-4}K - 1.7788) + 1 & > & 0 \\ 1 - 0.7788 - 5.3.10^{-4}K & > & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} K & > & 0 \\ K & < & 7734 \\ K & < & 417 \end{array}\right.$$

4) Expression de l'erreur

$$\varepsilon(z) = \frac{z^2 - 1.7788z + 0.7788}{z^2 + z(5.76.10^{-4}K - 1.7788) + 0.7788 + 5.3.10^{-4}K}\,\Theta_c(z)$$

Erreurs de position et de traînage

$$\varepsilon_p = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_v = \frac{0.2212\,T_e}{11.10^{-4}K}\theta_{c_0}$$

Pour $K = 10$: $\varepsilon_v = \theta_{c_0}$

5) Il faut $K \geq 503$. Réglage non réalisable car le système devient instable.

6) Fonction de transfert en boucle fermée

$$\varepsilon(z) = \frac{10^{-3}(5.76z + 5.3)(1.013z - 0.9875)}{(z-1)^2(z-0.7788) + 10^{-3}(5.76z+5.3)(1.013z - 0.9875)}\,\Theta_c(z)$$

On vérifie que le critère de Jury est satisfait.

7) Expression de l'erreur

$$\varepsilon(z) = \frac{(z-1)^2(z-0.7788)}{(z-1)^2(z-0.7788) + 10^{-3}(5.76z+5.3)(1.013z - 0.9875)}\,\Theta_c(z)$$

Erreurs de position et de traînage nulles.

8)

$$D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = 10\frac{1.013z - 0.9875}{z-1} \qquad \Longrightarrow \qquad u_{k+1} = u_k + 10.13\varepsilon_k - 9.875\varepsilon_k$$

$\diamondsuit$