

Version tropicale du théorème de Putinar. Dualité et applications

Nicolas DELANOUE, nicolas.delanoue@univ-angers.fr
LARIS - Université d'Angers.

21 mars 2022

Brainstorming days on measure and polynomial optimization
LAAS Toulouse France

Le théorème de Putinar est une brique essentielle à la théorie de l'optimisation globale polynomiale. Il fournit un certificat de positivité pour des fonctions polynomiales définies sur un ensemble semi-algébrique X défini par les contraintes $g_i \geq 0$. En effet, modulo une hypothèse technique de compacité ici nommée α , tout polynôme f strictement positif sur X se décompose comme une somme pondérée des g_i par des polynômes σ_i somme de carrés. Formellement, il peut s'énoncer ainsi :

Theorem 1 (Putinar). *Soit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$ vérifiant une hypothèse de compacité nommée (α) , $(g_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}[x]$ et $f \in \mathbb{R}[x]$,*

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \Leftrightarrow f = \sigma_0 + \sum_j \sigma_j g_j \text{ avec } \sigma_i \in \Sigma[x]. \quad (1)$$

où $\Sigma[x]$ désigne l'ensemble des polynômes qui s'écrivent comme une somme de carrés.

Dans cet exposé, nous proposons une version du Théorème de Putinar en géométrie tropicale. La géométrie tropicale est une branche relativement récente de l'algèbre où les deux opérations classiques d'addition et de multiplication internes sont respectivement remplacées par le maximum et l'addition. Cette approche a déjà été exploitée dans d'autres disciplines : elle permet par exemple de rendre l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman linéaire [6].

Plus formellement, nous présenterons et démontrerons le théorème suivant :

Theorem 2 (Putinar tropicale). *Soit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$ compact et $(g_i)_{i=1}^m \subset \mathcal{C}^0$.*

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \Leftrightarrow f \oplus \bigoplus_{j=1}^m -(\sigma_j \otimes g_j) \geq \sigma_0, \text{ avec } \sigma_i \in \mathcal{C}^+, \quad (2)$$

avec \mathcal{C}^0 l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R}^n et \mathcal{C}^+ l'ensemble de fonctions constantes par morceaux et positives sur \mathbb{R}^n . Grâce au calcul par intervalles, ce "nouveau" théorème prend une dimension effective. En effet, en poussant l'analogie avec les

travaux de Jean-Bernard Lasserre [4], dans notre approche, le calcul par intervalles joue le rôle de l'optimisation semi-définie qui permet de représenter une somme de carré σ sous la forme suivante $\sigma(x) = v_d^T(x)Qv_d(x)$ (avec $v_d(x)$ le vecteur des monomes et $Q \succeq 0$). Même si la preuve de l'équivalence (2) est relativement simple, nous espérons que le formalisme apportée par cette version tropicale du théorème de Putinar permettra une meilleure compréhension des méthodes algorithmiques d'optimisation globales basées sur le calcul par intervalles [3, 5].

Si le temps le permet et par dualité, je présenterais comment cette approche peut générer des hiérarchies afin de résoudre numériquement et de façon garantie le problème de transport optimal de Kantorovitch [2], ou encore l'encadrement de la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal via des mesures d'occupation [1].

Références

- [1] Nicolas Delanoue, Mehdi Lhommeau, and Sébastien Lagrange. Nonlinear optimal control : a numerical scheme based on occupation measures and interval analysis. *Computational Optimization and Applications*, 2020.
- [2] Nicolas Delanoue, Mehdi Lhommeau, and Philippe Lucidarme. Numerical enclosures of the optimal cost of the Kantorovitch's mass transportation problem. *Computational Optimization and Applications*, pages 1–19, 2015.
- [3] Luc Jaulin, Michel Kieffer, Olivier Didrit, and Eric Walter. *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer London Ltd, 2001.
- [4] Jean-Bernard Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Optimization*, 11, 09 2004.
- [5] Warwick Tucker. *Validated Numerics : A Short Introduction to Rigorous Computations*. Princeton University Press, USA, 2011.
- [6] Huan Zhang and Peter Dower. Max-plus fundamental solution semigroups for a class of difference riccati equations. *Automatica*, 52, 04 2014.