Oscillations électriques – Corrigé
[source : CAPES externe physique-chimie 2000]

I. Oscillations électriques forcées [10 points]

1. **Etude de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur de capacité C.**
   (a) $q(t) = Cv(t)$ et $i(t) = \frac{dq}{dt}$.
   (b) On trouve $\omega_0 = 3,37.10^4 s^{-1}$ et $Q_0 = 10$.

   (c) $u(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + v(t)$ et $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$ d'où :
   $$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{1}{LC}u$$
   avec $R/L = \omega_0/Q_0$ on obtient finalement :
   $$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 u.$$

2. **Etude du régime forcé.**
   (a) Régime dit *forcé* car on impose $u(t)$. Solution de l'équa dif : somme de : solution générale de l'équation sans second membre qui s'amortit (transitoire, avec dissipations) et solution particulière qui est sinusoïdale avec un déphasage. On observe donc une sinusoïde déphasée (dont l'amplitude et la phase dépendent de la fréquence).
   (b) Pont diviseur de tension :
   $$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 - x^2 + jx/Q_0}$$
   (c) Déphasage ϕ de v par rapport à u : $\phi = Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$, donc
   $$tan\phi = -\frac{x/Q_0}{1 - x^2}.$$
   Ici $x = 0,935$, donc $\phi < 0$: $v(t)$ est en retard sur $u(t)$. AN : $\phi = -36,5^\circ$.

3. **Etude de la résonance en intensité.**
   (a) Impédance complexe (en série on ajoute les impédances) :
   $$\underline{Z} = R + jL\omega + 1/jC\omega = R\left[1 + jQ_0(x - 1/x)\right].$$
   AN : $Z = |Z| = R\sqrt{1 + Q_0^2(x - 1/x)^2} = 227\Omega$
   (b) Pour U_0 fixée (tension efficace du générateur), Le courant efficace est maximal pour Z mimimale, soit $x^2 = 1$, c'est-à-dire $\omega = \omega_0$.
   (c) A la résonance $\underline{Z} = R$ donc $I_0 = U_0/R = 40$ mA.
   $H(j\omega_0) = -jQ_0$ donc $\underline{v}(t) = -jQ_0\underline{u}(t)$ d'où $V_0 = Q_0U_0 = 54$ V.
   A la résonance, il y a surtension aux bornes du condensateur (d'un facteur Q_0).
   (d) Bande passante : intervalle de fréquences (ou de pulsations) telles que l'intensité efficace $I(\omega)$ est supérieure à $I_{max}/\sqrt{2}$.
   (Remarque : - 3 decibels car $20\log(1/\sqrt{2}) = -3$).
   Ici $I_{max} = I_0 = I(\omega_0)$ et la bande passante est caractérisée par $\Delta x = x_2 - x_1$ avec :
   $$I(x_2) = I(x_1) = I_0/\sqrt{2} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{1 + Q^2(x - 1/x)^2} = \frac{1}{2}.$$
   En retenant les racines positives on trouve finalement $\Delta x = x_2 - x_1 = 1/Q_0$.
   $\Delta\omega = \omega_0/Q_0 = 3,37.10^3$ s^{-1}. Le coefficient Q_0 caractérise la finesse relatie (ou acuité) de la résonance.

II. Charge du condensateur et Oscillations électriques libres [10 points]

1. **Charge du condensateur**

   (a) A $t = 0$ le condensateur déchargé est équivalent à un fil (court-circuit), donc $i(t = 0) = I_1$. Aux temps longs le condensateur est chargé (équivalent à interrupteur ouvert), $i \sim 0$ et $u \sim rI_1$.

   (b)
$$v(t) = r\left(I_1 - C\frac{dv}{dt}\right) \quad \text{soit} \quad v(t) + \tau_1\frac{dv}{dt} = rI_1$$
   avec $\tau_1 = rC$). Solution = solution générale + solution particulière : $v(t) = Ae^{-t/\tau_1} + rI_1$. Compte tenu de la condition initiale $v(t = 0) = 0$:
$$v(t) = rI_1\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right).$$
   τ_1 est le temps caractéristique de la charge du condensateur (temps de relaxation, temps de réponse). Allure de la courbe : tend vers l'asymptote en exponentielle décroissante, tangente à l'origine coupe asymptote à $t = \tau_1$.

2. **Oscillations libres**

   (a) Interrupteur en position 2. En prenant par exemple comme sens positif de $i(t')$ de A vers B (convention générateur pour le condensateur), on a : $v(t') = Ri + L\frac{di}{dt'}$, avec $i = -\frac{dq}{dt'} = -C\frac{dv}{dt'}$. D'où :
$$\frac{d^2v}{dt'^2} + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{dv}{dt'} + \omega_0^2 v = 0.$$

   (b) Conditions initiales :
   tension sans discontinuité (présence du condensateur) : $v(t' = 0) = rI_0$
   et courant initial sans discontinuité (inductance) $i(t' = 0) = 0$.

   (c) On pose $\tau = \frac{t'}{\sqrt{LC}} = \omega_0 t'$, et $\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2Q_0}$.
   Alors : $d\tau = \omega_0 dt'$, d'où $\frac{d}{dt'} = \omega_0\frac{d}{d\tau}$ et $\frac{d^2}{dt'^2} = \omega_0\frac{d^2}{d\tau^2}$. On obtient :
$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + 2\alpha\frac{dv}{d\tau} + v = 0$$

   (d) Discriminant de l'équation précédente : $\Delta = 4(\alpha^2 - 1)$. Pour $\Delta > 0$ la solution est la somme de deux exponentielles decroissantes (pas d'oscillations, régime apériodique, amortissement fort), pour $\Delta < 0$ (soit $\alpha < 1$) on obtient une sinusoide amorti. (régime pseudo-périodique). + *Allure des courbes*

   (e) Régime critique pour $\alpha = 1$, aors la résistance du circuit vaut $R_c = 2\sqrt{L/C} = 2700\ \Omega$, résistance critique.

III. Oscillations entretenues : Résistance négative. [Bonus : 3 points]

1. On introduit pour le calcul v_S, potentiel à la sortie de l'AO.
   Comme $i_- = 0$ (AO idéal), $i(t) = (v_- - v_S)/R_1$.
   Comme $i_+ = 0$ (idem) on peut appliquer le pont diviseur de tension pour relier v_+ à v_S :
   $v_S = v_+(R_0 + R_1)/R_0$.
   En régime linéaire, $v_+ = v_- = u(t)$ et les deux relations précédentes amènent à :
$$u(t) = -R_0 i(t).$$
   On a bien écrit cette relation en convention récepteur, l'amplificateur opérationnel se comporte comme une résistance négative.
2. La puissance dissipée par effet Joule dans le dipôle RLC vaut $P_J = Ri^2(t)$. L'amplificateur opérationnel reçoit la puissance $u(t)i(t) = -R_0 i^2(t)$, donc il fournit la puissance $R_0 i^2(t)$. Si on choisit $R_0 = R$ l'énergie dissipée dans la résistance est compensée par celle apportée par l'amplificateur opérationnel. L'énergie reçue provient de l'alimentation de l'AO.
   Remarque : on obtient pour $i(t)$ l'équation différentielle :
$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R - R_0}{L}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0,$$
   donc on a bien des oscillations sinusoïdales pour $R = R_0$. En pratique l'amplitude des oscillations est fixée par la saturation de l'amplificateur opérationnel et le régime n'est pas complètement linéaire.