

## GT Identification et MOSAR du GdR MACS

Francisco Carillo, Marion Gilson, Edouard Laroche,  
Guillaume Mercère, Dimitri Peaucelle

26 Juin 2008 - ENSAM

- 10h15 - D. Peaucelle - *Modèles LTI incertains en commande robuste*
- 11h15 - C. Jauberthie-Salsman
  - *Estimation garantie d'état dans un contexte à erreurs bornées*
- ▲ 12h15 - Déjeuner
- 14h15 - M. Lovera - *Techniques d'estimation d'un modèle LPV et/ou LFT*
- 15h15 - G. Ferreres - *LPV/LFT modelling and identification: an overview*
- ▲ 16h15 - Discussions

## Modèles LTI incertains en commande robuste

Dimitri PEAUCELLE

LAAS-CNRS - Université de Toulouse - FRANCE



”Identification de modèles pour la commande robuste”

Journée commune entre les GT MOSAR et Identification du GdR MACS

## Objectifs

- Tour d'horizon des modèles linéaires espace d'état en commande robuste
- Formulations génériques et principaux sous-cas
- Incertitudes paramétriques et incertitudes variant dans le temps
- Modèles type descripteur - formulations implicites et systèmes augmentés

## Plan de la présentation

- 1 Préliminaires et notations
- 2 Classe des modèles affines polytopiques
- 3 Classe des modèles LFT (Transformée Linéaire-Fractionnaire)
- 4 Cas des incertitudes variant dans le temps (non-linéarités ?)
- 5 Modèles descripteurs

## 1 Préliminaires - Notations

---

### Modèles MIMO incertains avec canal de performance

$$\vartheta[x](t) = A(\Delta)x(t) + B_w(\Delta)w(t) + B_u(\Delta)u(t)$$

$$z(t) = C_z(\Delta)x(t) + D_{zw}(\Delta)w(t) + D_{zu}(\Delta)u(t)$$

$$y(t) = C_y(\Delta)x(t) + D_{yw}(\Delta)w(t) + D_{yu}(\Delta)u(t)$$

- Systèmes à temps continu ou discret

$$\vartheta_c[x](t) = \dot{x}(t) \quad , \quad \vartheta_d[x](t) = x(t + T)$$

- Représentation compacte

$$M(\Delta) = \begin{bmatrix} A(\Delta) & B_w(\Delta) & B_u(\Delta) \\ C_z(\Delta) & D_{zw}(\Delta) & D_{zu}(\Delta) \\ C_y(\Delta) & D_{yw}(\Delta) & D_{yu}(\Delta) \end{bmatrix}$$

- Incertitudes  $\Delta$  : scalaires/matricielles, réelles/complexes, constantes...

## ② Modèles affines polytopiques

### Modèles affines polytopiques

- Principalement dédiés aux incertitudes paramétriques ( $\dot{\Delta} = 0$ )
  - ▲ Imprécisions d'identification
  - ▲ Variabilité (lente) des paramètres dans le temps dues aux conditions extérieures
  - ▲ Variabilité due à la production en masse
  - ▲ ...
- Deux sous-cas importants
  - ▲ Modèles intervalles
  - ▲ Modèles parallélotopiques
- Outils de commande robuste spécifiques
  - ▲ LMIs sur tous les "sommets" simultanément couplées par Lyapunov ou SV
  - ▲ Techniques adaptées aux formes homogènes (Polya, SOS...)

## ② Modèles affines polytopiques

Sous-cas le plus simple : systèmes intervalles  $\underline{M} \preceq M(\Delta) \preceq \overline{M}$

$$M(\Delta) = [m_{ij}(\Delta)] \quad : \quad \underline{m}_{ij} \leq m_{ij}(\Delta) \leq \overline{m}_{ij}$$

- Exemple d'identification de "3DOF helicopter" - axe élévation seul

$$\ddot{\epsilon} = -a_1 \dot{\epsilon} - a_0 \sin(\epsilon) + bu \quad \xrightarrow{\epsilon \simeq 0} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

no Identif	1	2	3	...	min	max
$a_1$	0.073	0.082	0.081		0.073	0.086
$a_0$	0.640	0.662	0.648		0.630	0.665
$b$	0.298	0.321	0.301		0.287	0.322

## ② Modèles affines polytopiques

Sous-cas le plus simple : systèmes intervalles  $\underline{M} \preceq M(\Delta) \preceq \overline{M}$

$$M(\Delta) = [m_{ij}(\Delta)] \quad : \quad \underline{m}_{ij} \leq m_{ij}(\Delta) \leq \overline{m}_{ij}$$

- Coefficients indépendants les uns des autres
- Autant de paramètres incertains ( $\bar{p}$ ) que l'éléments tels que  $\underline{m}_{ij} \neq \overline{m}_{ij}$
- Représentation ne permet pas les changements de base
- ▲ Représentations équivalentes

$$M(\Delta) = M_{cst} + \sum m_{ij}(\Delta) E_{ij} \quad , \quad E_{ij} = [e_{ij}] \quad : \quad e_{i=j} = 1 \quad e_{i \neq j} = 0$$

- ▲ Représentation centrée sur modèle nominal ( $\Delta = 0$ ) et normalisée  $|\delta_p| \leq 1$

$$M(\Delta) = M^{|0|} + \sum_{p=1}^{\bar{p}} \delta_p M^{|p|} \quad , \quad M^{|0|} = \frac{1}{2}(\underline{M} + \overline{M}) \quad , \quad M^{|p|} = \frac{1}{2}(\overline{m}_{ij} - \underline{m}_{ij}) E_{ij}$$

Remarque :  $\text{rang}(M^{|p|}) = 1$ .

## ② Modèles affines polytopiques

Second sous-cas : systèmes parallélotopiques

$$M(\Delta) = M^{|0|} + \sum_{p=1}^{\bar{p}} \delta_p M^{|p|} \quad : \quad |\delta_p| \leq 1$$

- $M^{|0|}$  : modèle nominal
- $M^{|p|}$  : "axes" du parallélotope (usuellement de rang faible)
- $\bar{p}$  paramètres incertains indépendants  
mais coefficients de  $M(\Delta)$  peuvent être linéairement liés
- Changements de base conservent les propriétés
- ▲ Forme géométrique à  $2^{\bar{p}}$  sommets définis par

$$M^{[v]} = M^{|0|} + \sum_{p=1}^{\bar{p}} \pm M^{|p|}$$

## 2 Modèles affines polytopiques

### Représentation générique : systèmes polytopiques

$$M(\Delta) \in \text{co} \{ M^{[v=1\dots\bar{v}]} \}$$

$$M(\Delta) = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v M^{[v]} \quad : \quad \zeta_{v=1\dots\bar{v}} \geq 0, \quad \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1$$

- $M^{[v]}$  : "sommets" du polytope
- $M^{[0]} = \frac{1}{\bar{v}} \sum M^{[v]}$  : modèle nominal
- Forme homogène
- Changements de base conservent les propriétés
- ▲ Polytope : ensemble compact dans espace à  $\bar{p}$  dim défini par  $\bar{v}$  sommets  
 Dans le cas des parallélotopes  $\bar{v} = 2^{\bar{p}}$  (pb numériques !)  
 Découpage possible en union de polytopes à  $\bar{v} = 2^{\bar{p}}$  sommets
- ▲ Identification : modèle incertain = enveloppe convexe des identifiés

## 2 Modèles affines polytopiques

### Factorisation avec matrices de rang réduit, cas des polytopes

$$M^{[v]} = M^{[0]} + M_B^{[v]} M_C^{[v]} \text{ avec } M_B^{[v]} \text{ et } M_C^{[v]} \text{ de rang } r_v$$

$$M(\Delta) = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v M^{[v]} = M^{[0]} + \sum_{v=1}^{\bar{v}} M_B^{[v]} (\zeta_v I_{r_v}) M_C^{[v]}$$

### Incertitudes dans un bloc structuré $M(\Delta) = M^{[0]} + M_B \Delta M_C$

$$M_B = \begin{bmatrix} M_B^{[1]} & M_B^{[2]} & \dots & M_B^{[\bar{v}]} \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \zeta_1 I_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 I_{r_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta_{\bar{v}} I_{r_{\bar{v}}} \end{bmatrix} \quad M_C = \begin{bmatrix} M_C^{[1]} \\ M_C^{[2]} \\ \vdots \\ M_C^{[\bar{v}]} \end{bmatrix}$$

## ② Modèles affines polytopiques

Factorisation avec matrices de rang réduit, cas des parallélotopes

$$M^{[p]} = M_B^{[p]} M_C^{[p]} \quad \text{avec } M_B^{[p]} \text{ et } M_C^{[p]} \text{ de rang } r_p$$

$$M(\Delta) = M^{[0]} + \sum_{p=1}^{\bar{p}} \delta_p M^{[p]} = M^{[0]} + \sum_{p=1}^{\bar{p}} M_B^{[p]} (\delta_p I_{r_p}) M_C^{[p]}$$

Incertitudes dans un bloc structuré  $M(\Delta) = M^{[0]} + M_B \Delta M_C$

$$M_B = \begin{bmatrix} M_B^{[1]} & M_B^{[2]} & \dots & M_B^{[\bar{p}]} \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 I_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 I_{r_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_{\bar{p}} I_{r_{\bar{p}}} \end{bmatrix} \quad M_C = \begin{bmatrix} M_C^{[1]} \\ M_C^{[2]} \\ \vdots \\ M_C^{[\bar{p}]} \end{bmatrix}$$

## ③ Modèles LFT

Modèles LFT

- Incertitudes paramétriques, propriétés dissipatives ...
- ▲  $\Delta$  réelles et/ou complexes
- ▲  $\Delta \in \mathcal{A}$  combine polytopes, inégalités matricielles quadratiques et ...
  
- Dépendance rationnelle vis-à-vis de  $\Delta$
- ▲ expressions polynomiales et fractions rationnelles
  
- Outils de commande robuste spécifiques
- ▲  $\mu$ , IQC, full-block  $S$ -procédure, séparation quadratique

### ③ Modèles LFT

**Modèles LFT** Fractions rationnelles de  $\Delta$  :

$$\begin{aligned} M(\Delta) &= M^{|0|} + M_B \Delta (I - \Delta D_{\Delta\Delta})^{-1} M_C \\ &= M^{|0|} + M_B (I - D_{\Delta\Delta} \Delta)^{-1} \Delta M_C \end{aligned}$$

● Représentés par boucle  $w_\Delta = \Delta z_\Delta$  sur le système linéaire

$$\vartheta[x](t) = Ax(t) + B_\Delta w_\Delta(t) + B_w w(t) + B_u u(t)$$

$$z_\Delta(t) = C_\Delta x(t) + D_{\Delta\Delta} w_\Delta(t) + D_{\Delta w} w(t) + D_{\Delta u} u(t)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_{z\Delta} w_\Delta(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t)$$

$$y(t) = C_y x(t) + D_{y\Delta} w_\Delta(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t)$$

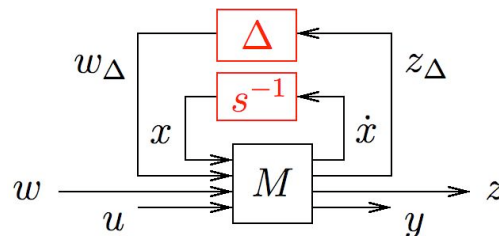
$$M^{|0|} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix}, \quad M_B = \begin{bmatrix} B_\Delta \\ D_{z\Delta} \\ D_{y\Delta} \end{bmatrix}, \quad M_C = \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta w} & D_{\Delta u} \end{bmatrix}$$

### ③ Modèles LFT

**Bien posé des modèles LFT**

$$M(\Delta) = M^{|0|} + M_B \Delta (I - \Delta D_{\Delta\Delta})^{-1} M_C$$

- $I - \Delta D_{\Delta\Delta}$  inversible pour toutes  $\Delta \in \mathbb{A}$
- Signaux  $z_\Delta$  et  $w_\Delta$  uniques et bornés si  $x$ ,  $u$  et  $w$  sont bornés.



**Non-unicité des modèles LFT**

- Représentation non unique : changements de base sur  $z_\Delta$  et  $w_\Delta$
- Problème ouvert : trouver représentation minimale ( $\Delta$  de "taille minimale")

### ③ Modèles LFT

#### Représentations LFT sont non-unique (minimales ?) - Exemples

$$\dot{x} = \frac{\delta_1^2}{1+\delta_2}x \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = w_{\Delta 1} & w_{\Delta 1} = \delta_1 z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 1} = w_{\Delta 2} & w_{\Delta 2} = \delta_1 z_{\Delta 2} \\ z_{\Delta 2} = \frac{1}{1+\delta_2}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = w_{\Delta 1} & w_{\Delta 1} = \delta_1 z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 1} = w_{\Delta 2} & w_{\Delta 2} = \delta_1 z_{\Delta 2} \\ z_{\Delta 2} = x - w_{\Delta 3} & w_{\Delta 3} = \delta_2 z_{\Delta 3} \\ z_{\Delta 3} = x - w_{\Delta 3} \end{cases}$$

▲  $z_{\Delta 3} = z_{\Delta 2}$  ajouté pour que  $\Delta$  soit diagonale (est-ce nécessaire ?).

▲ Si  $\delta_1 = \delta_2$  alors  $z_{\Delta 3}$  et  $w_{\Delta 3}$  sont inutiles : forme réduite.

### ③ Modèles LFT

**Modèles LFT** Opérateur de Laplace peut être inclus dans les incertitudes :

$$\vartheta[x](t) = Ax(t) + B_{\Delta}w_{\Delta}(t) + B_w w(t) + B_u u(t)$$

$$z_{\Delta}(t) = C_{\Delta}x(t) + D_{\Delta\Delta}w_{\Delta}(t) + D_{\Delta w}w(t) + D_{\Delta u}u(t)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_{z\Delta}w_{\Delta}(t) + D_{zw}w(t) + D_{zu}u(t)$$

$$y(t) = C_y x(t) + D_{y\Delta}w_{\Delta}(t) + D_{yw}w(t) + D_{yu}u(t)$$

avec dans le cas temps continu et discret respectivement (conditions de stabilité)

$$\begin{pmatrix} x \\ w_{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-1}I_n & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_c[x] \\ z_{\Delta} \end{pmatrix}, \quad s^{-*} + s^{-1} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ w_{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}I_n & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_d[x] \\ z_{\Delta} \end{pmatrix}, \quad z^{-*} z^{-1} \leq 1$$



### ③ Modèles LFT

**Modèles LFT** Performance atténuation  $L_2$  peut être incluse dans incertitudes :

$$\begin{aligned} \vartheta[x](t) &= Ax(t) + B_\Delta w_\Delta(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z_\Delta(t) &= C_\Delta x(t) + D_{\Delta\Delta} w_\Delta(t) + D_{\Delta w} w(t) + D_{\Delta u} u(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{z\Delta} w_\Delta(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{y\Delta} w_\Delta(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{aligned} \quad \begin{aligned} w(t) &\in \mathbb{R}^m \\ z(t) &\in \mathbb{R}^l \\ \|z\|_2 &\leq \gamma \|w\|_2 \end{aligned}$$

équivalent à prouver robustesse vis-à-vis d'une incertitude pleine complexe

$$\begin{pmatrix} w_\Delta \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_{L_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_\Delta \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \Delta_{L_2} &\in \mathbb{C}^{m \times l} \\ \Delta_{L_2}^* \Delta_{L_2} &\leq \gamma^2 I_l \end{aligned}$$

- Résultat classique :  $H_\infty$  équivalent à incertitudes bornées en norme.
- Exemple où  $\Delta$  complexe peut représenter des dynamiques négligées.
- ▲ Mais tout critère de performance ne se réécrit pas comme incertitude (ex  $H_2$ ).

### ③ Modèles LFT

**Représentation générique des incertitudes**

$$\Delta = \begin{bmatrix} I_{r_1} \otimes \Delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{r_2} \otimes \Delta_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I_{r_{\bar{q}}} \otimes \Delta_{\bar{q}} \end{bmatrix}$$

- Par défaut  $\Delta_q$  matrices complexes, pas nécessairement carrées
- Si  $\Delta_q = \delta_q$  est scalaire alors  $I_{r_q} \otimes \Delta_q = \delta_q I_{r_q}$
- Génériquement,  $I_{r_q} \otimes \Delta_q$  est la répétition  $r_q$  fois de  $\Delta_q$  sur la diagonale

### ③ Modèles LFT

#### Représentation générique des incertitudes

$$\Delta = \begin{bmatrix} I_{r_1} \otimes \Delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{r_2} \otimes \Delta_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I_{r_{\bar{q}}} \otimes \Delta_{\bar{q}} \end{bmatrix}$$

- $\Delta_q$  peut être définie par intervalle, paralléloétope, polytope

$$\underline{\Delta}_q \preceq \Delta_q \preceq \bar{\Delta}_q, \quad \Delta_q = \Delta_q^{[0]} + \sum \delta_{qp} \Delta_q^{[p]}, \quad \Delta_q \in \text{CO} \{ \Delta_q^{[v=1 \dots \bar{v}_q]} \}$$

- ou par des contraintes algébriques égalités/inégalités (quadratiques)

$$\begin{bmatrix} I & \Delta_q^* \end{bmatrix} \Phi_q \begin{bmatrix} I \\ \Delta_q \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} I & \Delta_q^* \end{bmatrix} \Psi_q \begin{bmatrix} I \\ \Delta_q \end{bmatrix} \leq 0$$

$\Delta_q$  est  $\Phi_q$ -structurée et  $\Psi_q$ -dissipative

### ③ Modèles LFT

#### Exemples de représentations pour incertitudes scalaires réelles

- $\delta$  dans un intervalle  $\underline{\delta} \leq \delta \leq \bar{\delta}$

- $\delta$  est  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ -structurée et  $\begin{bmatrix} 2\underline{\delta}\bar{\delta} & \underline{\delta} + \bar{\delta} \\ \underline{\delta} + \bar{\delta} & -2 \end{bmatrix}$ -dissipative

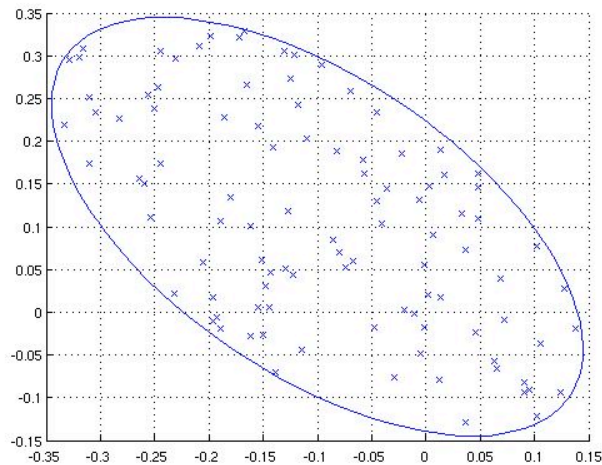
$$\begin{bmatrix} I & \delta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \delta \end{bmatrix} = \delta - \delta^* = 2\text{Im}(\delta) = 0$$

$$\begin{bmatrix} I & \delta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\underline{\delta}\bar{\delta} & \underline{\delta} + \bar{\delta} \\ \underline{\delta} + \bar{\delta} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \delta \end{bmatrix} = 2((\delta - c)^*(\delta - c) - r^2) \leq 0$$

$$\text{avec } c = \frac{\underline{\delta} + \bar{\delta}}{2} \text{ et } r = \frac{\bar{\delta} - \underline{\delta}}{2}.$$

### 3 Modèles LFT

#### Exemples de représentation pour 2 paramètres couplés



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta_1 \\ 0 & 1 & \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} \leq 0$$

### 4 Cas des paramètres variants

#### Incertitudes variant dans le temps ?

- Modèles LPV (linéaires à paramètres variants)
  - ▲ Dynamique des paramètres est externe au système
  - ▲ Bornes sur paramètres et sur les variations
  - ▲ Exemple : union de linéarisés autour de points de fonctionnements
  - ▲ Exemple : paramètres dépendent d'une trajectoire de consigne
- Approximations de modèles non-linéaires
  - ▲ Exemple :  $\sin(x(t))x(t) = \delta(t)x(t)$  avec  $\delta \in [-1, 1]$
  - ▲ Exemple :  $x^3(t) = \delta(t)x(t)$  avec  $\delta \in [0, 1]$  si  $|x| \leq 1$
  - ▲ Possibilités de prouver stabilité locale : ensembles de CI stables
  - ▲ Inclusion d'équipotentiels de Lyapunov dans domaines d'incertitudes
- Quels modèles sont les plus adaptés ?
  - ▲ parallélotopiques, LFT  $\Rightarrow$  combinaisons de modèles

## 4 Cas des paramètres variants

### Modèles parallélotopiques plutôt que polytopiques

- Modèle polytopique : les  $\zeta_v$  n'ont pas sens physique

$$M(\Delta) = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v M^{[v]} \quad : \quad \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1, \quad \zeta_v \geq 0$$

- ▲ Les  $\zeta_v$  sont couplés :  $\sum_{v=1}^{\bar{v}} \dot{\zeta}_v = 0$
- ▲ Difficile de prendre en compte si certains paramètres sont constants

- Modèle parallélotopiques :  $\delta_p$  sont paramètres physiques (à chgt échelle près)

$$M(\Delta) = M^{|0|} + \sum_{p=1}^{\bar{p}} \delta_p M^{[p]} \quad : \quad |\delta_p| \leq 1, \quad \underline{\theta}_p \leq \dot{\delta}_p \leq \bar{\theta}_p$$

## 4 Cas des paramètres variants

### Modèles TV parallélotopiques plutôt que polytopiques

- ▲ Mais polytopes plus flexibles et analyse robuste moins pessimistes
- Combiner polytopes (incertitudes constantes) et parallélotopes (TV)

$$M(\Delta) = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v M^{[v]} + \sum_{p=1}^{\bar{p}} \delta_p M^{[p]}$$

$$\sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1, \quad \zeta_v \geq 0, \quad \dot{\zeta}_v = 0$$
$$|\delta_p| \leq 1, \quad \underline{\theta}_p \leq \dot{\delta}_p \leq \bar{\theta}_p$$

## 4 Cas des paramètres variants

### Modèles LFT particulièrement adaptés

$$\Delta = \begin{bmatrix} I_{r_1} \otimes \Delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{r_2} \otimes \Delta_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I_{r_{\bar{q}}} \otimes \Delta_{\bar{q}} \end{bmatrix}$$

- $\Delta_q$  peut être dans polytope (si constante)

$$\Delta_q \in \text{CO} \left\{ \Delta_q^{[v=1 \dots \bar{v}_q]} \right\}, \quad \dot{\Delta}_q = 0$$

- $\Delta_q$  peut être dans paralléloptope (si TV)

$$\Delta_q = \Delta_q^{[0]} + \sum \delta_{qp} \Delta_q^{[p]}, \quad |\delta_{qp}| \leq 1, \quad \underline{\theta}_{qp} \leq \dot{\delta}_{qp} \leq \bar{\theta}_{qp}$$

- ou par des contraintes algébriques égalités/inégalités (quadratiques)

$\Delta_q$  est  $\Phi_q$ -structurée et  $\Psi_q$ -dissipative

$\dot{\Delta}_q$  est  $\hat{\Phi}_q$ -structurée et  $\hat{\Psi}_q$ -dissipative

## 4 Cas des paramètres variants

### Modèles LFT particulièrement adaptés

$$\Delta = \begin{bmatrix} I_{r_1} \otimes \Delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{r_2} \otimes \Delta_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I_{r_{\bar{q}}} \otimes \Delta_{\bar{q}} \end{bmatrix}$$

- $\Delta_q$  peuvent aussi comprendre des éléments non-linéaires ou de dim-infinie

▲ saturations, zones mortes, hystérésis... [Tarbouriech, Biannic...]

▲ retards constants ou TV [Gouaisbaut, Myrkin...]

▲ autres ?

## 4 Cas des paramètres variants

### Techniques de commande robuste pour les modèles TV ?

- Contiennent l'information sur dérivée de l'équation d'état

#### ▲ Cas des modèles LFT

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_{\Delta}w_{\Delta}(t) \\ z_{\Delta}(t) = C_{\Delta}x(t) + D_{\Delta\Delta}w_{\Delta}(t) \end{cases}, \quad w_{\Delta}(t) = \Delta(t)z_{\Delta}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_{\Delta}w_{\Delta}(t) \\ z_{\Delta}(t) = C_{\Delta}x(t) + D_{\Delta\Delta}w_{\Delta}(t) \\ \dot{z}_{\Delta}(t) = C_{\Delta}\dot{x}(t) + D_{\Delta\Delta}\dot{w}_{\Delta}(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} w_{\Delta}(t) = \Delta(t)z_{\Delta}(t) \\ \dot{w}_{\Delta}(t) = \Delta(t)\dot{z}_{\Delta}(t) + \dot{\Delta}(t)z_{\Delta}(t) \end{cases}$$

## 4 Cas des paramètres variants

### Techniques de commande robuste pour les modèles TV ?

- Contiennent l'information sur dérivée de l'équation d'état

#### ▲ Cas des modèles parallélotopiques

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A^{|0|} + \sum_{p=1}^{\bar{p}} \delta_p(t) A^{|p|})x(t) \\ \ddot{x}(t) &= (A^{|0|} + \sum_{p=1}^{\bar{p}} \delta_p(t) A^{|p|})\dot{x}(t) + (\sum_{p=1}^{\bar{p}} \dot{\delta}_p(t) A^{|p|})x(t) \end{aligned}$$

#### ▲ Dans les deux cas on abouti à des modèles descripteurs

$\dot{x}(t) = \dot{x}(t)$  doit être ajouté aux équations ce qui rend le modèle sous forme

$$\mathcal{E}\dot{\eta}(t) = \mathcal{A}(\Delta(t), \dot{\Delta}(t))\eta(t)$$

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \eta(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}(\Delta(t), \dot{\Delta}(t)) \text{ affine}$$

## 5 Systèmes descripteurs

Modèles descripteurs  $E(\Delta)$  et  $M(\Delta)$  affines polytopiques

$$\begin{bmatrix} E(\Delta) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta[x](t) \\ z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M(\Delta) \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

Modèles descripteurs, LFT  $w_\Delta = \Delta z_\Delta$  bouclé avec

$$E_A \vartheta[x](t) + E_B z_\Delta(t) = Ax(t) + B_\Delta w_\Delta(t) + B_w w(t) + B_u u(t)$$

$$E_C \vartheta[x](t) + E_D z_\Delta(t) = C_\Delta x(t) + D_{\Delta\Delta} w_\Delta(t) + D_{\Delta w} w(t) + D_{\Delta u} u(t)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_{z\Delta} w_\Delta(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t)$$

$$y(t) = C_y x(t) + D_{y\Delta} w_\Delta(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t)$$

## 5 Systèmes descripteurs

Quelques éléments en faveur des modèles descripteurs incertains

- Tenir compte des dérivées sur les incertitudes
- Modèles naturels
- ▲ Exemple en mécanique

$$M(\Delta)\ddot{\theta} + C(\Delta)\dot{\theta} + K(\Delta)\theta = u$$

inertie  $M$ , friction  $C$ , rappel  $K$ , forces extérieures  $u$

- Simplicité des représentations
- ▲ Modèle descripteur peut être affine contrairement à

$$\ddot{\theta} + M^{-1}(\Delta)C(\Delta)\dot{\theta} + M^{-1}(\Delta)K(\Delta)\theta = M^{-1}(\Delta)u$$

- Minimalité des représentations
- ▲ Manipulations de LFT descripteurs conduit à LFT de dimensions réduites

### Quelques éléments en faveur des modèles descripteurs incertains

- Modèles descripteurs polytopiques : alternative aux LFT [Trofino]

$$\dot{x} = \frac{\delta_1^2}{1+\delta_2} x \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \delta_1 \pi_1 \\ 0 = \pi_1 - \delta_1 \pi_2 \\ 0 = x - (1 - \delta_2) \pi_2 \end{cases}$$

- Modèles descripteurs incertains et modèles d'ordre variable

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \end{bmatrix} x \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x \text{ si } \delta = 0 \\ x = 0 \text{ si } \delta \neq 0 \end{cases}$$

## Conclusions

---

### Outils logiciels

- LFR Toolbox - JF Magni
- RoMulOC - D Peaucelle

### Deux classe de modèles : Polytopiques et LFT

- Grande variété de modèles - lesquels sont les plus adaptés à l'identification ?
- Minimalité des modèles à prendre en compte dès le début ?
- Modèles linéaires incertains, alternatives à certains modèles non-linéaires ?
- Modèles descripteurs en identification ?
- ...