

Modèles descripteurs redondants
et réduction du pessimisme des conditions LMI

Dimitri PEAUCELLE

LAAS-CNRS - Toulouse, FRANCE



Journées Nationales du GdR MACS

9-11 Juillet 2007, Reims

→ Inégalités Matricielles Linéaires (LMI)

sources de nombreux résultats pessimistes en robustesse des systèmes LTI :

$$F(x) > 0 \Rightarrow \text{Garantie de performance pour } \Sigma(\Delta), \forall \Delta \in \Delta$$

→ Résultats théoriques de plus en plus appliqués. Enjeux :

Complexité Numérique (YALMIP et solveurs), Synthèse, Pessimisme

Objectifs de la présentation

→ Le point sur des méthodes LMI de moins en moins pessimistes :

Manipulations mathématiques, complexité numérique
et convergence vers des tests exacts

→ Interprétations par les modèles descripteurs redondants

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \rightarrow \quad E\dot{\eta} = A\eta, \quad E, A \in \mathbb{R}^{m \times p}, \quad p > n$$

→ Nouveaux résultats d'analyse

① Méthodes mathématiques pour les LMI dépendant des paramètres

→ Sommes de carrés

→ Théorème de Pólya [Peres] [Scherer]

→ Lemme KYP récursif

② Interprétation par l'analyse robuste des modèles redondants

③ Modèles descripteurs - outils d'analyse

④ Exemple des systèmes à retard

⑤ Conclusions et perspectives

Stabilité du système $\dot{x} = A(\delta)x$

$$\exists \epsilon > 0 : (s\mathbf{1} - A(\delta))^*(s\mathbf{1} - A(\delta)) - \epsilon\mathbf{1} \geq 0, \forall \text{Re}(s) \geq 0, \forall \delta \in \Delta$$

Si $A(\delta)$ matrice polynomiale et Δ ensemble de contraintes polynomiales

(i) $\exists x$ tq $F(x, y)$ (linéaire en x , polynomiale en y) est définie-positive
sous contraintes polynomiales $g_i(y) \geq 0$

Positif si somme de carrés $(ii)_r \Rightarrow (ii)_{r+1} \Rightarrow (i)$

$(ii)_r \exists H_i(y)$ polynôme de degré r , somme de carré,
tq $F(x, y) - \sum g_i(y)H_i(y)$ est somme de carré.

Propriétés [Chesi] [Henrion] [Lasserre] [Parillo] [Putinar] [Scherer]

→ Somme de carrés : conditions LMI ($H(y) = \hat{y}^T \hat{H} \hat{y}$, $\hat{H} > 0$)

→ Pessimisme ↘ quand r ↗ (degré de la représentation polynomiale)

sous hypothèses, $(ii) \Leftrightarrow (i)$ pour $r \rightarrow \infty$

Stabilité du système $\dot{x} = A(\delta)x$

$$\begin{bmatrix} (j\omega \mathbf{1} - A(\delta))^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \epsilon \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j\omega \mathbf{1} - A(\delta))^{-1} \\ 1 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \\ \forall \delta \in \Delta$$

Lemme KYP en temps continu $\Leftrightarrow \exists P(\delta)$ tq $\forall \delta \in \Delta$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \epsilon \mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(\delta) & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & P(\delta) \\ P(\delta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\delta) & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} < 0$$

Condition suffisante : $P(\delta)$ est polynôme de degré r .

Si $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ avec $|\delta_1| \leq 1$, l'inégalité se réécrit

$$\begin{bmatrix} \delta_1 (1 - \delta_1 \tilde{A}_1)^{-1} \tilde{B}_1 \\ 1 \end{bmatrix}^* M(P, \epsilon, \delta_2) \begin{bmatrix} \delta_1 (1 - \delta_1 \tilde{A}_1)^{-1} \tilde{B}_1 \\ 1 \end{bmatrix} < 0$$

Stabilité si $\exists P, \epsilon$ tq $\forall |\delta_1| = 1$

$$\begin{bmatrix} \delta_1(1 - \delta_1 \tilde{A}_1)^{-1} \tilde{B}_1 \\ 1 \end{bmatrix}^* M(P, \epsilon, \delta_2) \begin{bmatrix} \delta_1(1 - \delta_1 \tilde{A}_1)^{-1} \tilde{B}_1 \\ 1 \end{bmatrix} < 0$$

Lemme KYP en temps discret $\Leftrightarrow \exists Q(\delta_2)$ tq $\forall \delta_2 \in \Delta_2$

$$M(P, \epsilon, \delta_2) + \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{B}_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q(\delta_2) & 0 \\ 0 & -Q(\delta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{B}_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

Condition suffisante : $Q(\delta_2)$ est polynôme de degré r .

...

Propriétés [Bliman]

→ De manière récursive : conditions LMI

→ Pessimisme ↘ quand r ↗ (degré des matrices issues de KYP)

sous hypothèses, pessimisme $\rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$

- ① Méthodes mathématiques pour les LMI dépendant des paramètres
 - Manipulations mathématiques complexes
 - Réduction du pessimisme : représentation de degré + élevé
- ② **Interprétation par l'analyse robuste des modèles redondants**
- ③ Modèles descripteurs - outils d'analyse
- ④ Exemple des systèmes à retard
- ⑤ Conclusions et perspectives

Stabilité du système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw & \text{où} & & w &= \Delta z \\ z &= Cx + Dw & & & \Delta &= \text{diag}(\delta_i \dots, \Delta_j \dots) \in \Delta \end{aligned}$$

→ Conditions LMI pour fonction de Lyapunov (si $D = 0$ polynôme deg 2 en Δ)

$$V_{\Delta}(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta_C \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta_C \end{bmatrix} x : \Delta_C = \Delta(1 - D\Delta)^{-1}C$$

→ \Leftrightarrow conditions pour fonction de Lyapunov unique $V(\eta) = \eta^T P \eta$ pour

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw & \eta^T &= \begin{pmatrix} x^T & z^T \end{pmatrix} \\ z &= Cx + Dw & : & \begin{pmatrix} w \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ \dot{z} &= C\dot{x} + D\dot{w} & & \end{aligned}$$

Modèle descripteur - Contient l'information $\dot{\Delta} = 0$

Représentation polynomiale des incertitudes

→ Dérivées à l'ordre r des équations du système

$$z^{(r)} = Cx^{(r)} + Dw^{(r)}, \quad w^{(r)} = (\Delta z)^{(r)}$$

donne informations sur les dérivées de Δ au degré r .

→ Implicitement, Fonctions de Lyapunov dépendant de Δ de deg $2r$.

→ Si $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_p)$, $|\delta_i| \leq 1$, constants, équivalence avec lemme KYP récursif [Automatica 2007 avec Arzelier, Henrion, Gouaisbaut] et sommes de carrés [IEEE-TAC 2008 avec Sato]

→ Extension à localisation des pôles, performance H_2 [Ebihara 2006]

- ① Méthodes mathématiques pour les LMI dépendant des paramètres
- ② Interprétation par l'analyse robuste des modèles redondants
 - Manipulations de modèles avec connaissances physiques
 - Réduction du pessimisme : modèles descripteur redondants
- ③ **Modèles descripteurs - outils d'analyse**
- ④ Exemple des systèmes à retard
- ⑤ Conclusions et perspectives

Approche par les "Slack variables" [de Oliveira 2001]

Soit $V(\eta) = \eta^T P \eta$, sa dérivée est négative le long des trajectoires

$$(M + \Delta N) \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = 0, \quad \Delta \in \text{co}\{ \Delta^{[1]} \dots \Delta^{[N]} \}$$

si $\exists F$ telle que $\forall i \in \{1 \dots N\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + F(M + \Delta^{[i]} N) + (M + \Delta^{[i]} N)^T F^T < 0$$

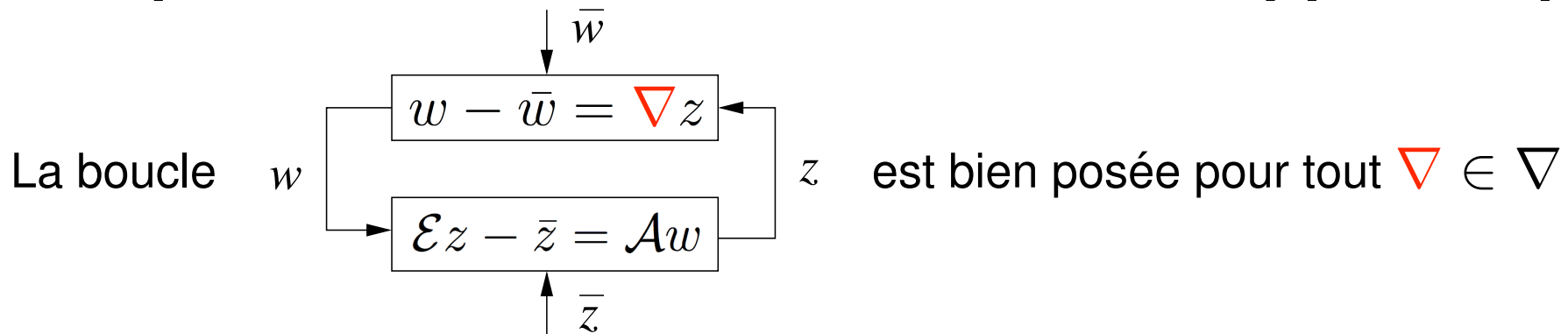
[IEEE-TAC 2008 avec Sato]

→ Extensions à incertitudes réelles et complexes, contraintes par des polynômes.

Séparation quadratique avec application linéaire implicite

Analyse de stabilité de systèmes descripteurs : cas particulier du bien posé

[Automatica 2007 avec Arzelier, Henrion, Gouaisbaut], [CDC 2007]



$$\text{ssi } \exists \gamma : \left\| \begin{matrix} w \\ z \end{matrix} \right\| \leq \gamma \left\| \begin{matrix} \bar{w} \\ \bar{z} \end{matrix} \right\| \text{ pour tout } \Delta \in \nabla$$

$$\text{ssi } \exists \Theta : \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ 1 \end{bmatrix}^T \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ 1 \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \Delta \end{bmatrix}^T \Theta \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \Delta \end{bmatrix} \leq 0, \forall \Delta \in \nabla.$$

Pour différents ∇ existe catalogue de LMI suffisantes (à compléter)

$$\nabla = \text{diag}(\nabla_i) : \nabla_i \in \{ \text{Re}(s^{-1}) \geq 0, |z^{-1}| \leq 1, \Delta^T \Delta \leq 1 \dots \}$$

- ① Méthodes mathématiques pour les LMI dépendant des paramètres
- ② Interprétation par l'analyse robuste des modèles redondants
- ③ Modèles descripteurs - outils d'analyse
 - Deux types de résultats pour représentations implicites
 - ∇_i ne représente pas que des incertitudes
- ④ **Exemple des systèmes à retard**
- ⑤ Conclusions et perspectives

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h)$$

Propriétés de l'opérateur retard [Gouaisbaut 2006-2007]

→ Fractionnement du retard $\delta_0(h) = e^{-sh} = \prod_{j=1}^q e^{-sh/q} = \prod_{j=1}^q \delta_0(\frac{h}{q})$:

$$x(t - h) = \delta_0(\frac{h}{q})x(t - \frac{(q-1)h}{q}) \quad \dots \quad x(t - \frac{h}{q}) = \delta_0(\frac{h}{q})x(t)$$

→ Développement de Taylor du retard $\delta_0(\frac{h}{q}) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-sh/q)^i}{i!} + \frac{(-sh/q)^k}{k!} \delta_k(\frac{h}{q})$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t - h) + \frac{h}{q} r_1(t) & r_i &= \delta_i(\frac{h}{q}) x^{(i)}(t) \\ x^{(i)}(t) &= r_i(t) + \frac{h}{q(i+1)} r_{i+1}(t) & & \quad , \quad |\delta_i(\frac{h}{q}) - \alpha_i| \leq r_i \end{aligned}$$

Séparation quadratique appliquée aux systèmes ainsi augmentés

→ Réduction du pessimisme si $k \nearrow$ et $q \nearrow$

→ $k = 0$ stabilité pour tout h (asymptotiquement exacte si $q \rightarrow \infty$)

→ $k = 1$ stabilité pour $h \in [0, \bar{h}]$

- ① Méthodes mathématiques pour les LMI dépendant des paramètres
- ② Interprétation par l'analyse robuste des modèles redondants
- ③ Modèles descripteurs - outils d'analyse
- ④ Exemple des systèmes à retard
- ⑤ **Conclusions et perspectives**
 - Nouveaux résultats d'analyse avec réduction du pessimisme
 - Manipulations de modèles sur la base de connaissances sur les opérateurs

 - Extensions à d'autres opérateurs (dim. infinie, non-lineaires...) ?
 - Synthèse de correcteurs ?