

Commande adaptative directe basée sur la passivité

Dimitri PEAUCELLE - LAAS-CNRS - Université de Toulouse



Razvan LUZI - CNES - ONERA



New trends & challenges in control from specification to validation

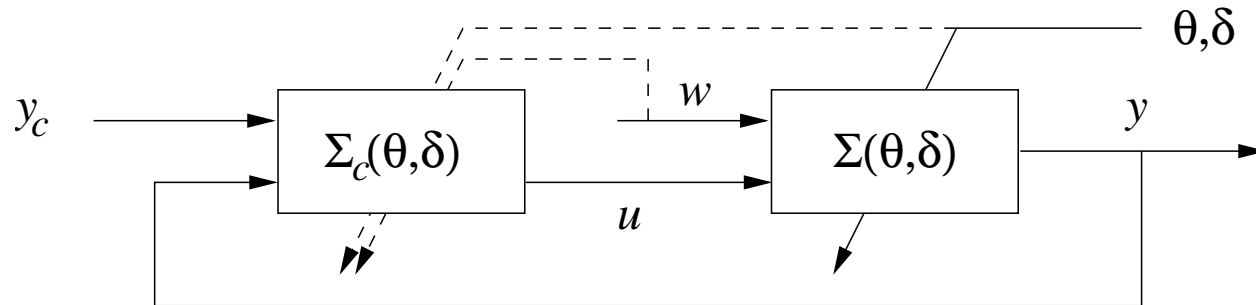
RTG12 Workshop



Toulouse - 29-30 Novembre 2011

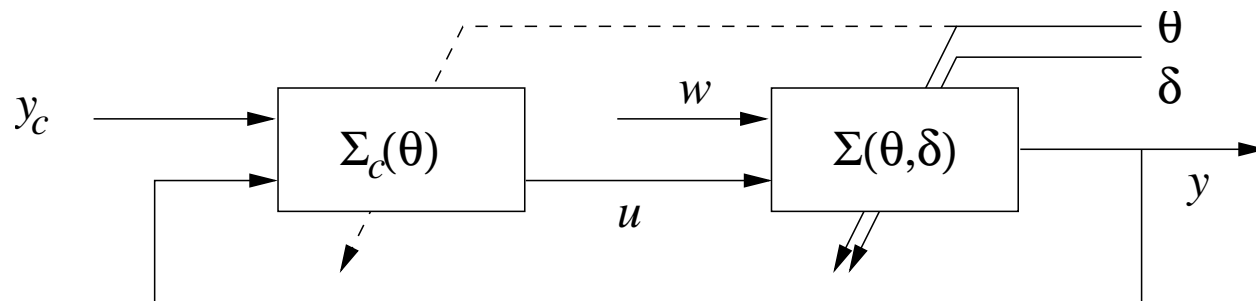
■ Commande adaptative :

“Modifier le comportement de la loi de commande en réponse à des modifications dans les dynamiques du processus à contrôler et des perturbations”



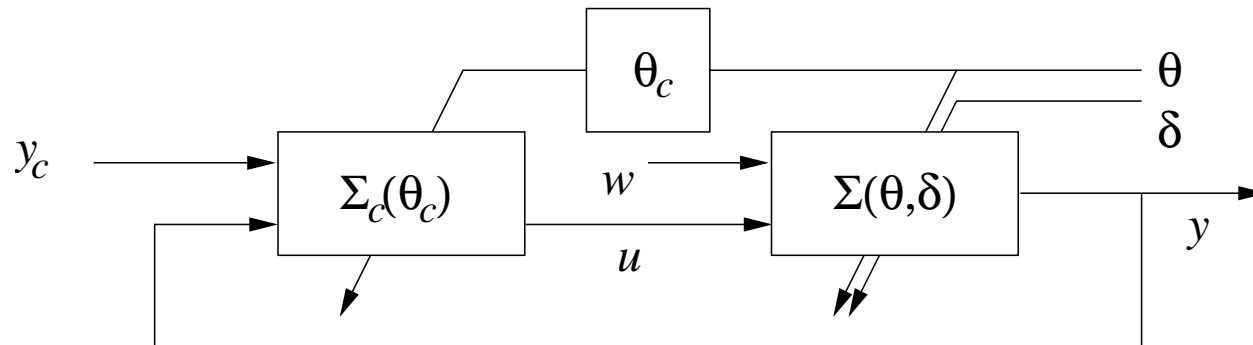
- ▲ Suppose de connaître θ, δ, w . Comment ?
- ▲ Impose un choix de loi d'adaptation. Lequel ?
- ▲ Le schéma global est non-linéaire. Preuves de stabilité ?

■ Commande adaptative robuste :



■ Commande adaptative - Séquençement de gain

- Hypothèses : θ connu en temps réel, varie lentement dans le temps

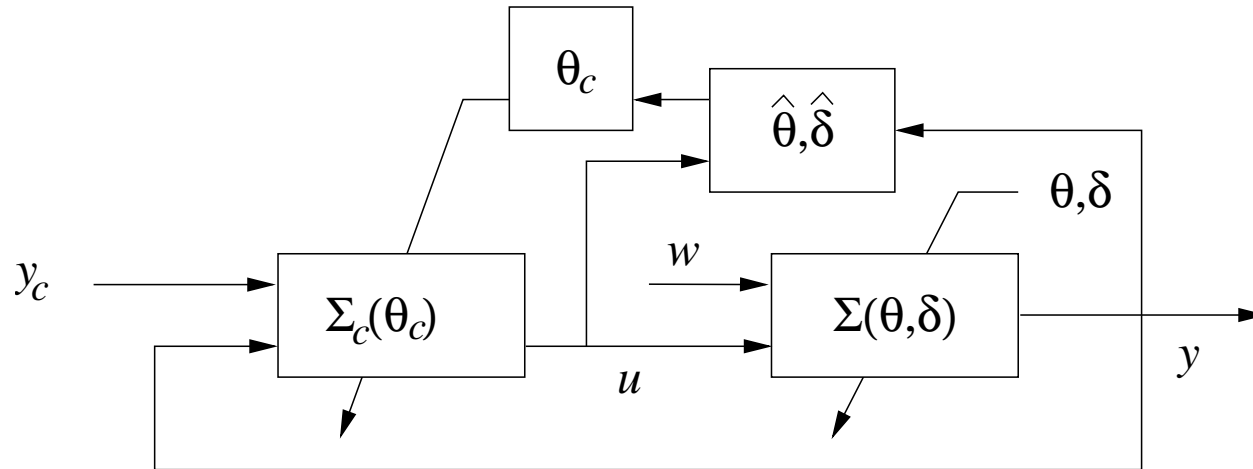


- ▲ Calculer régulièrement les paramètres (*optimaux, robustes...*) de Σ_c
- ▲ Choisir les paramètres de Σ_c dans une table de valeurs pré-calculées (commande tabulée)
- ▲ Définir a priori une fonction $\theta_c(\theta)$
(Quand Σ_c est linéaire : commande Linéaire à Paramètres Variants, LPV)
- Variations temporelles de θ induisent des comportements non-linéaires
- Et si θ n'est pas mesurée ?

■ Commande adaptative indirecte

● Hypothèses : θ, δ varient lentement dans le temps

● Estimation paramétrique en temps réel : estimées $\hat{\theta}, \hat{\delta}$



● Principe de séparation :

▲ Dynamiques d'estimation/séquencement de gain

n'ont pas/peu d'influence sur la dynamique globale

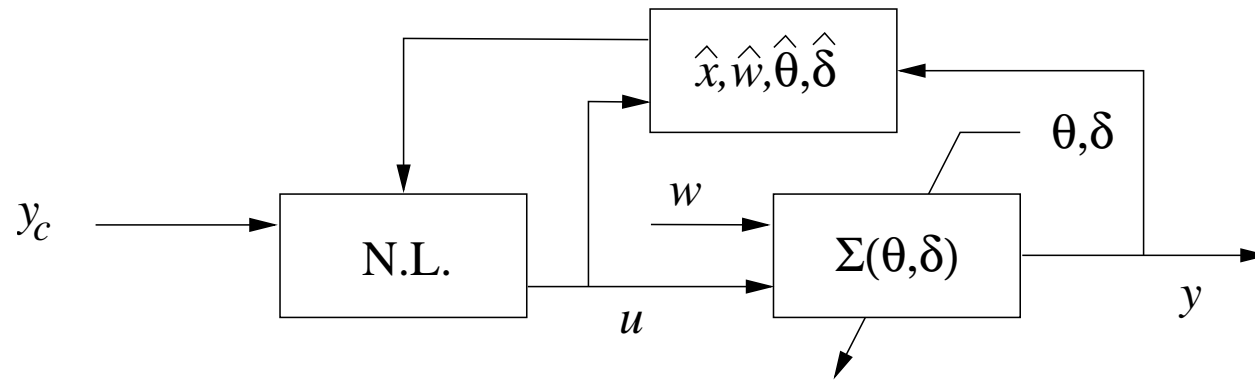
▲ Estimation indépendante de Σ_c

● Différentes techniques d'estimation : moindres carrés, gradient, projections...

● Précision d'estimation : besoin d'excitation permanente

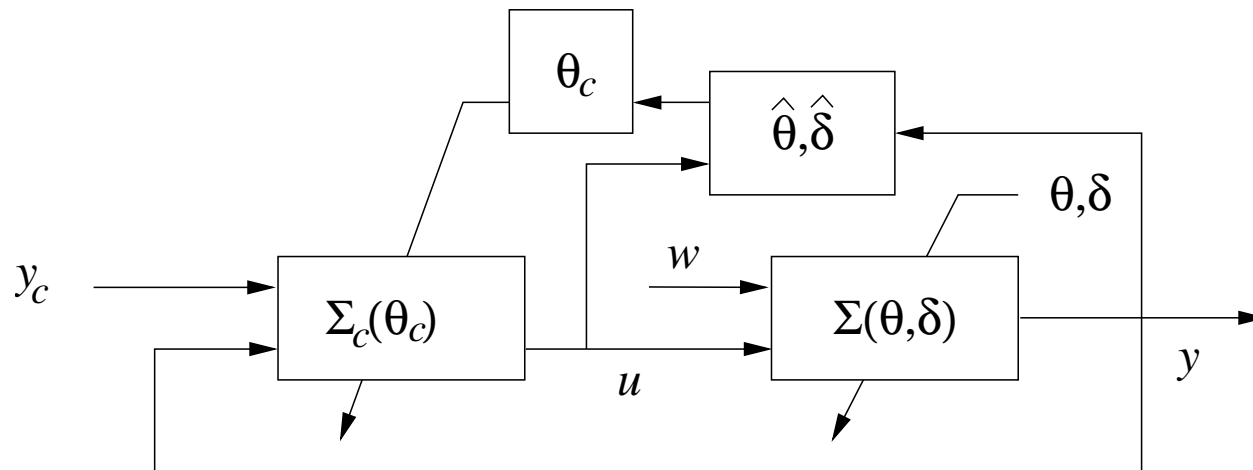
■ Commande adaptative indirecte

- Si les dynamiques de Σ sont suffisamment lentes : estimation de l'hyper-état

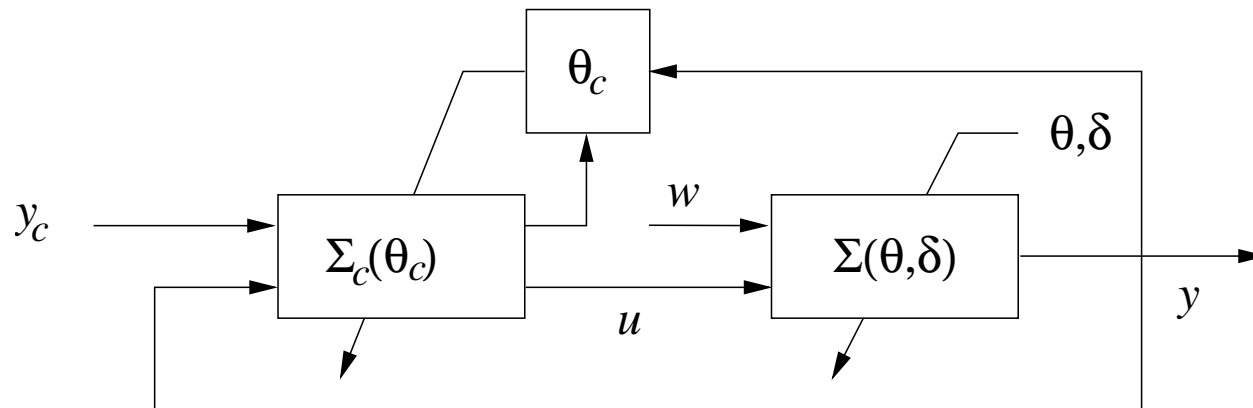


- ▲ Dynamiques de θ et celles de x peuvent être proches
- ▲ Généralise le schéma : retour d'état/observateur
- ▲ Problème d'estimation très complexe
- ▲ Commande fortement non linéaire, grandes dimensions

■ Commande adaptative indirecte



■ Commande adaptative directe

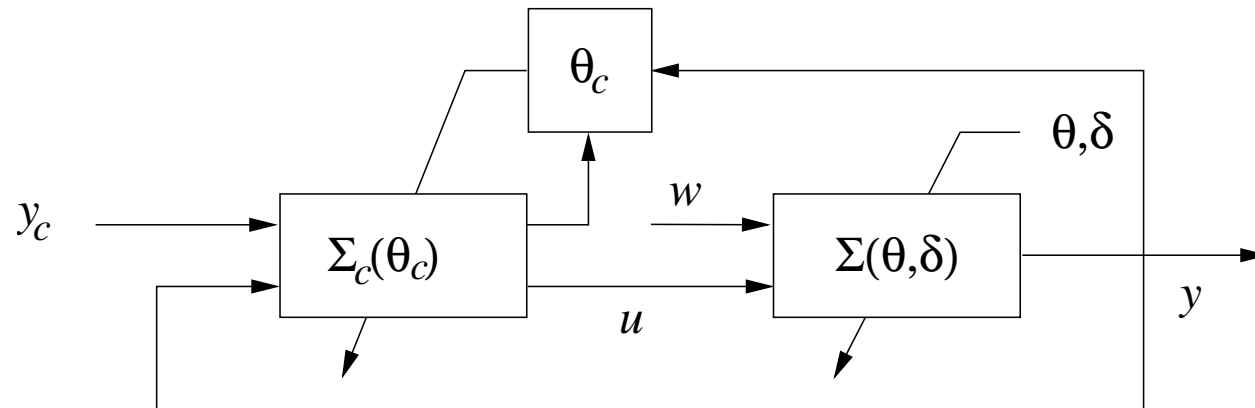


▲ Si $\theta_c = F(\theta, \delta)$ et F inversible :

le calcul de θ_c est un problème d'estimation pour $\Sigma(F^{-1}(\theta_c))$

▲ “MIT rule” : heuristique quand F est inconnue

■ Commande adaptative directe



● Schéma de commande plus simple

(parfois appelée “simple adaptive control”, [Barkana])

● Possibilité d’obtenir des preuves de stabilité de la boucle fermée complète

(sans principe de séparation)

▲ Résultats de stabilité par la théorie de Lyapunov

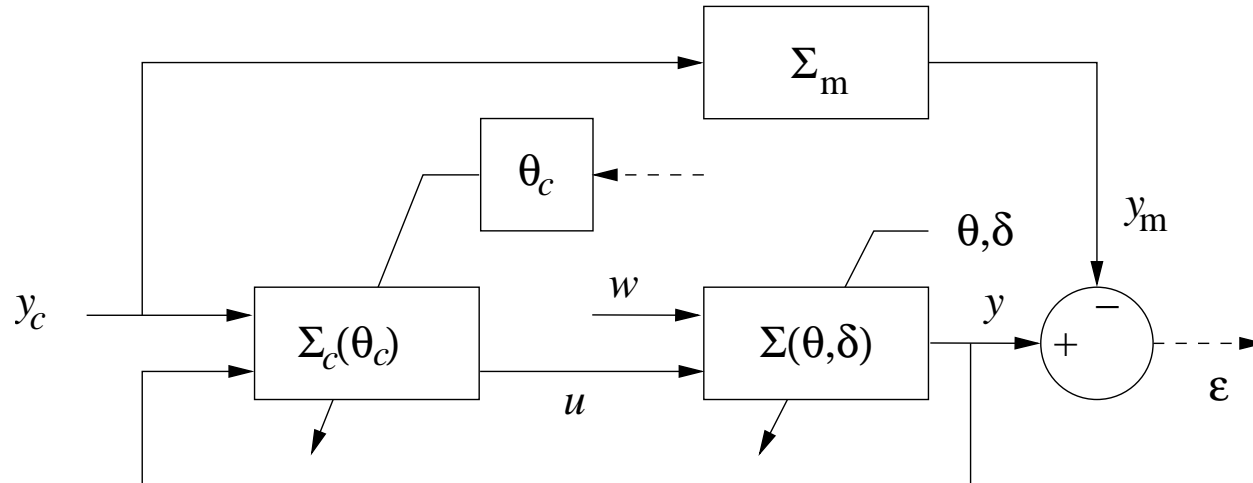
▲ Limitations : Hypothèses de passivité sur Σ

(parfois appelée “passivity-based adaptive control”, [Fradkov])

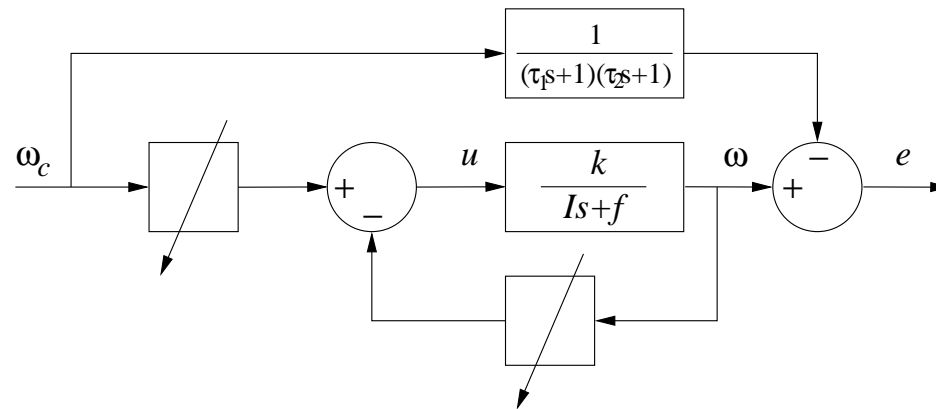
Introduction

■ Commande adaptative à modèle de référence - MRAC

- Jusqu'ici : régulation autour d'un point d'équilibre
- Résultats s'étendent à : adaptation pour suivre comportement de référence



- Exemple : Modèle de référence du second ordre pour moteur à courant continu



① MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

- ▲ Basée sur problème de régulation à 2 degrés de liberté (RST)
- ▲ Méthode de gradient issue des techniques d'estimation
- ▲ Règle heuristique

② Stabilisation par PBAC - le cas MIMO

- ▲ Hypothèses de type passivité sur les systèmes
- ▲ Preuves de stabilité avec théorie de Lyapunov

③ PBMRAC

④ Cas des systèmes non passifiables

■ Commande à deux degrés de liberté pour les systèmes linéaires

● Hypothèses

▲ Système à commander SISO, LTI : $y = \frac{B}{A}u$

▲ Modèle de référence : $y_m = \frac{B_m}{A_m}u_c$

● Loi de commande : $u = \frac{T}{R}u_c - \frac{S}{R}y$

● Nombreuses hypothèses sur A, B, A_m, B_m, R, S, T

■ Commande adaptative pour régler les coefficients de R, S, T

$$R(s) = s^q + r_{q-1}s^{q-1} + \dots r_1s + r_0,$$

$$S(s) = s_q s^q + \dots s_1s + s_0, \quad T(s) = t_q s^q + \dots t_1s + t_0$$

● Paramètres de commande

$$\theta_c = \left(r_{q-1} \quad \dots \quad r_0 \quad s_q \quad \dots \quad s_0 \quad t_q \quad \dots \quad t_0 \right)$$

▲ Commande adaptative : ajuster les θ_{ci} pour avoir $y = y_m$

▲ Choix d'un coût à minimiser :

$$J_1 = |e|, \quad J_2 = \frac{1}{2}e^2 \dots$$

où $e = y - y_m$

- Méthode du gradient pour minimiser les paramètres de commande :

$$\frac{d\theta_{ci}}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta_{ci}}$$

- ▲ Pour J_2 on trouve $\frac{d\theta_{ci}}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta_{ci}}$

- Connaître en temps réel $\frac{\partial e}{\partial \theta_{ci}}$?

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

- Règle du MIT :

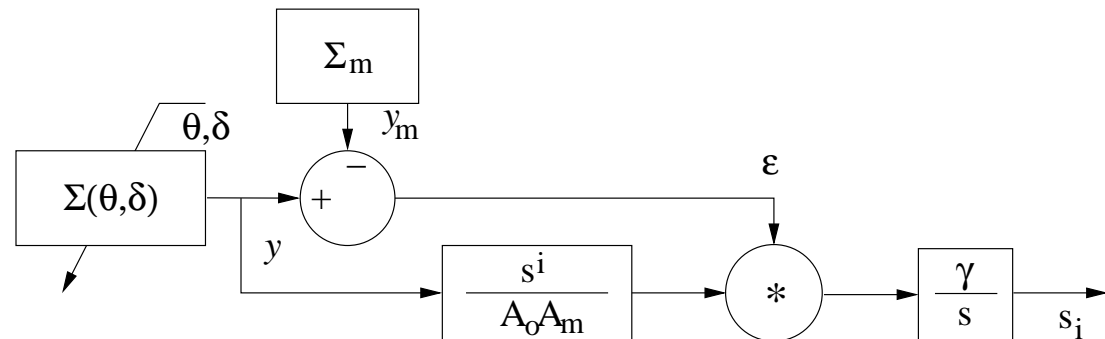
$$\frac{\partial e}{\partial t_i} \simeq \frac{s^i}{A_o A_m} u_c, \quad \frac{\partial e}{\partial s_i} \simeq -\frac{s^i}{A_o A_m} y, \quad \frac{\partial e}{\partial r_i} \simeq -\frac{s^i}{A_o A_m} u$$

où A_o polynôme aux dynamiques rapides (le plus souvent = 1).

- Les règles d'adaptation sont réalisables à l'aide de filtres et d'intégrateurs

▲ Exemple pour coût J_2 :

$$\frac{ds_i}{dt} = \gamma e \frac{s^i}{A_o A_m} y$$

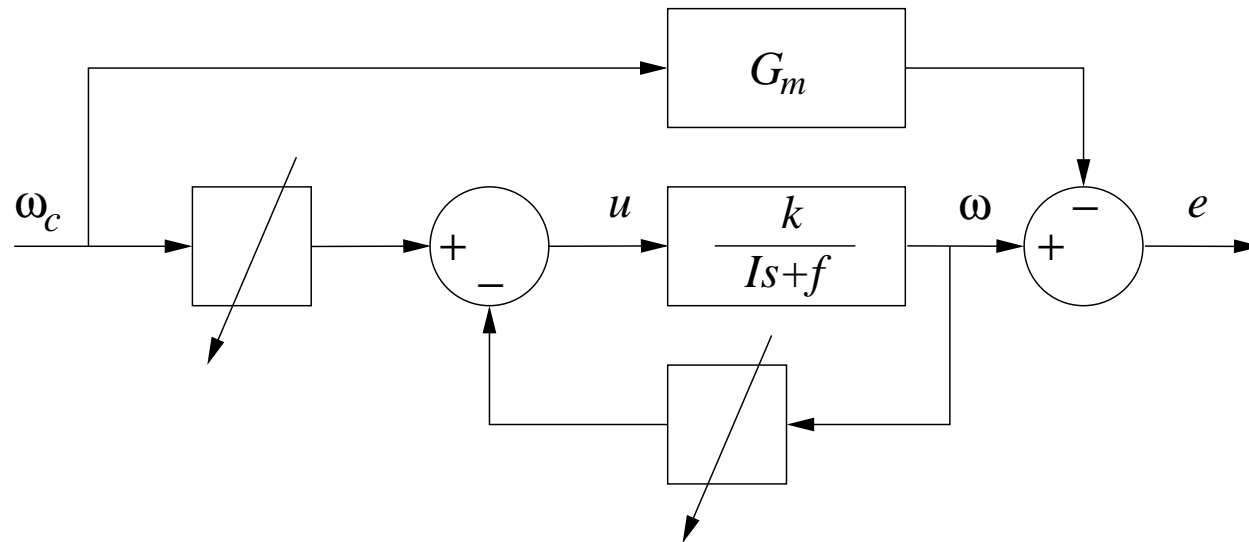


- Remarques :

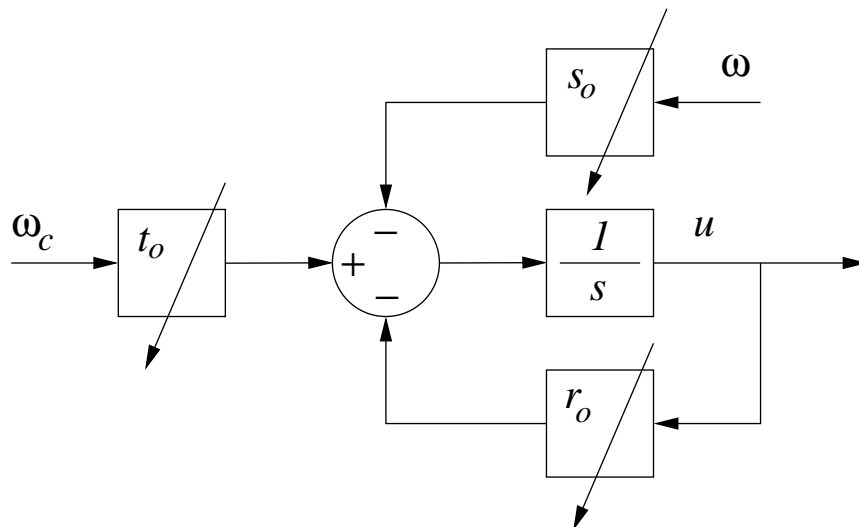
- ▲ Résultat est heuristique : pas de garantie (ni suivi de référence, ni stabilité)
- ▲ Si l'ordre du système est inconnu :
 - choisir A_o et degrés de R , S et T intuitivement
- ▲ Stabilité implique convergence de $e = y - y_m$
- ▲ Aucune indication sur la convergence des gains du correcteur

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu



● Boucle de régulation $\frac{S}{R} = \frac{s_0}{s + r_0}$, Précommande $\frac{T}{R} = \frac{t_0}{s + r_0}$



$$\dot{s}_o = \gamma e \left[\frac{1}{A_m} \omega \right]$$

$$\dot{t}_o = -\gamma e \left[\frac{1}{A_m} \omega_c \right]$$

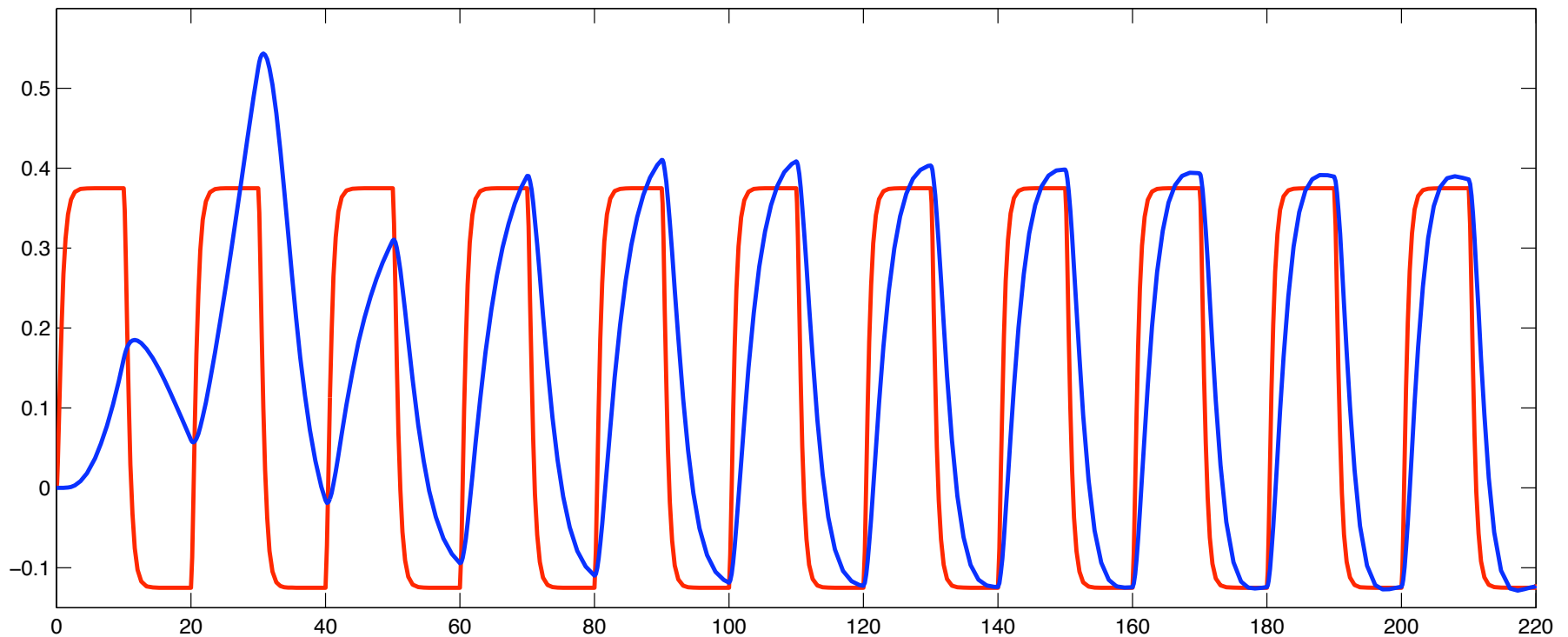
$$\dot{r}_o = \gamma e \left[\frac{1}{A_m} u \right]$$

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{1}{s+1}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 0.6$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période $20s$, valeur max = 0.375 , valeur min = -0.125



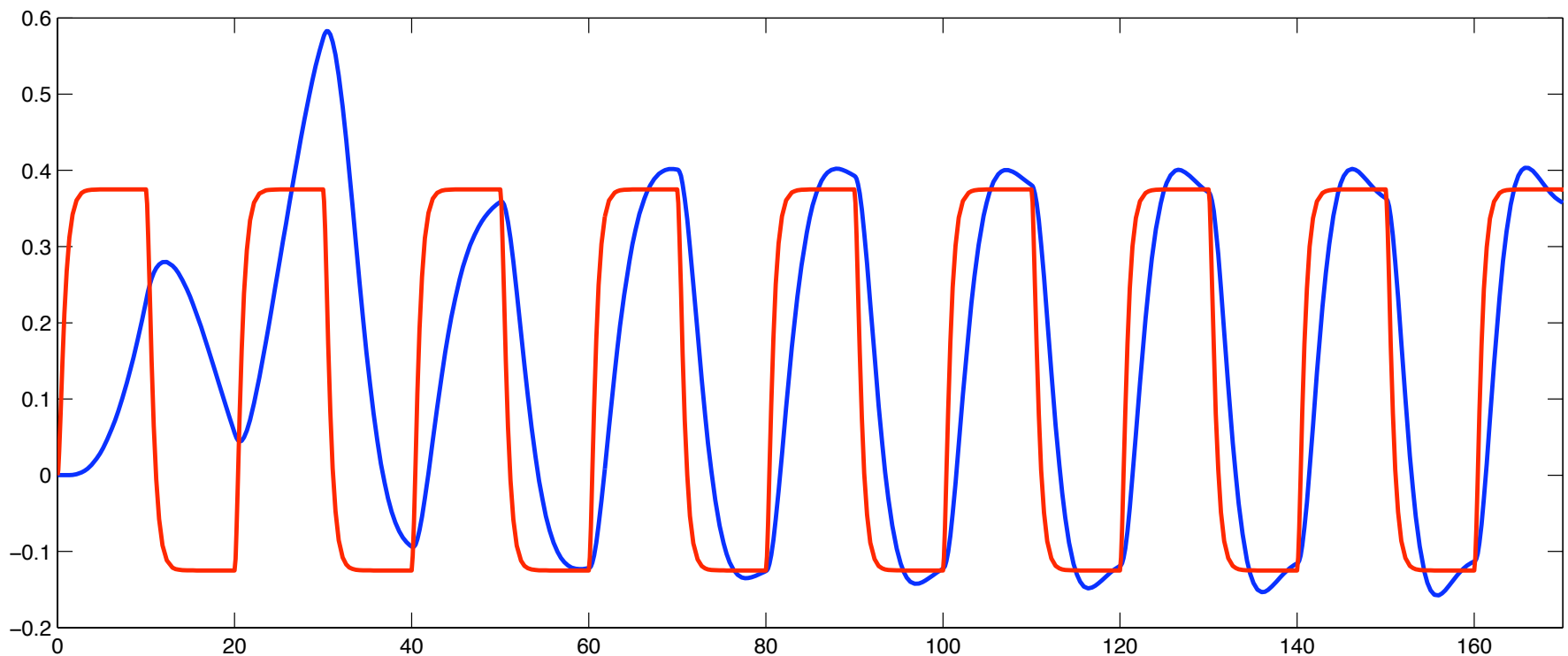
▲ Relativement bonne convergence

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{10}{(s+0.8)(s+8)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 0.6$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période $20s$, valeur max = 0.375 , valeur min = -0.125

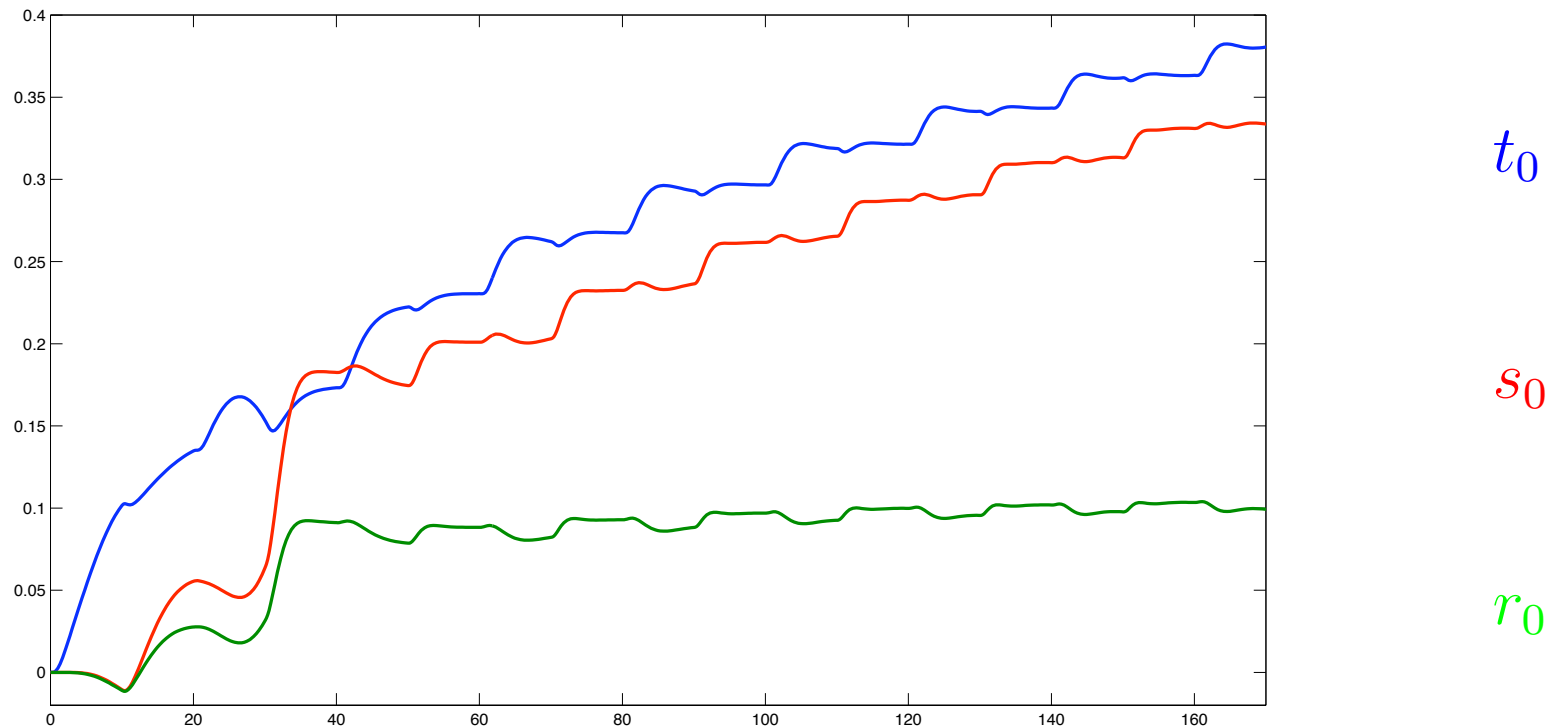


▲ Parait robuste

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{10}{(s+0.8)(s+8)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 0.6$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période 20s, valeur max = 0.375, valeur min = -0.125

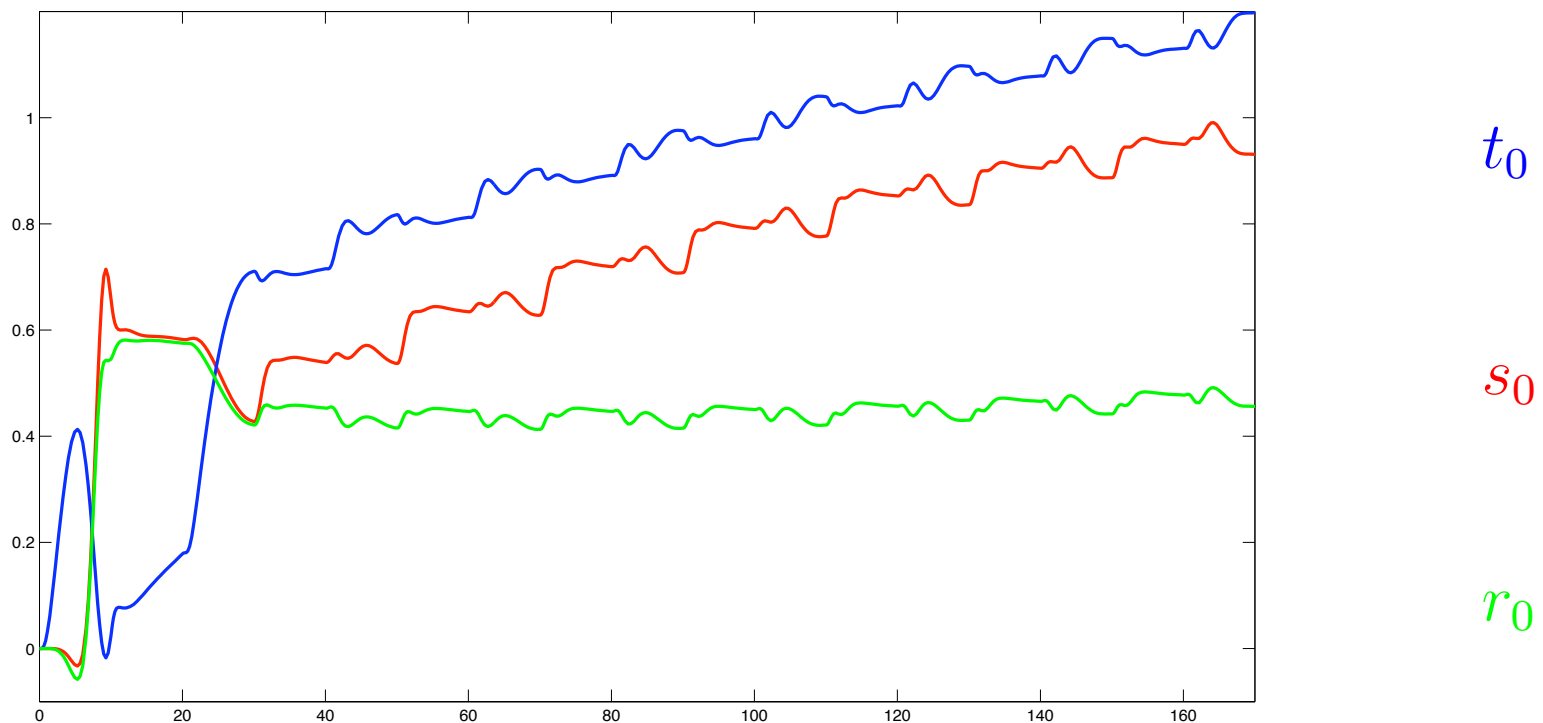


▲ Convergence lente (deux périodes) - augmenter γ pour accélérer

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{10}{(s+0.8)(s+8)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 6$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période 20s, valeur max = 0.375, valeur min = -0.125



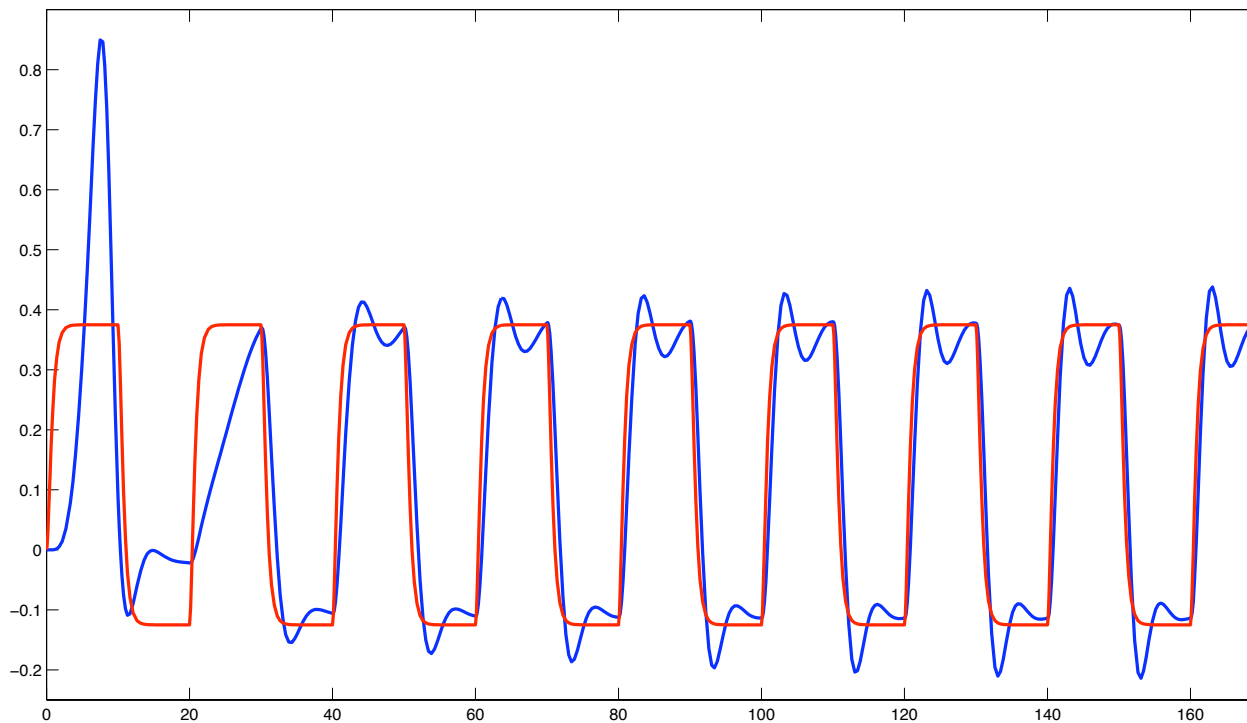
▲ Les gains sont rapidement plus grands (et très différents...)

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{10}{(s+0.8)(s+8)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 6$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période $20s$, valeur max = 0.375 , valeur min = -0.125



ω

ω_m

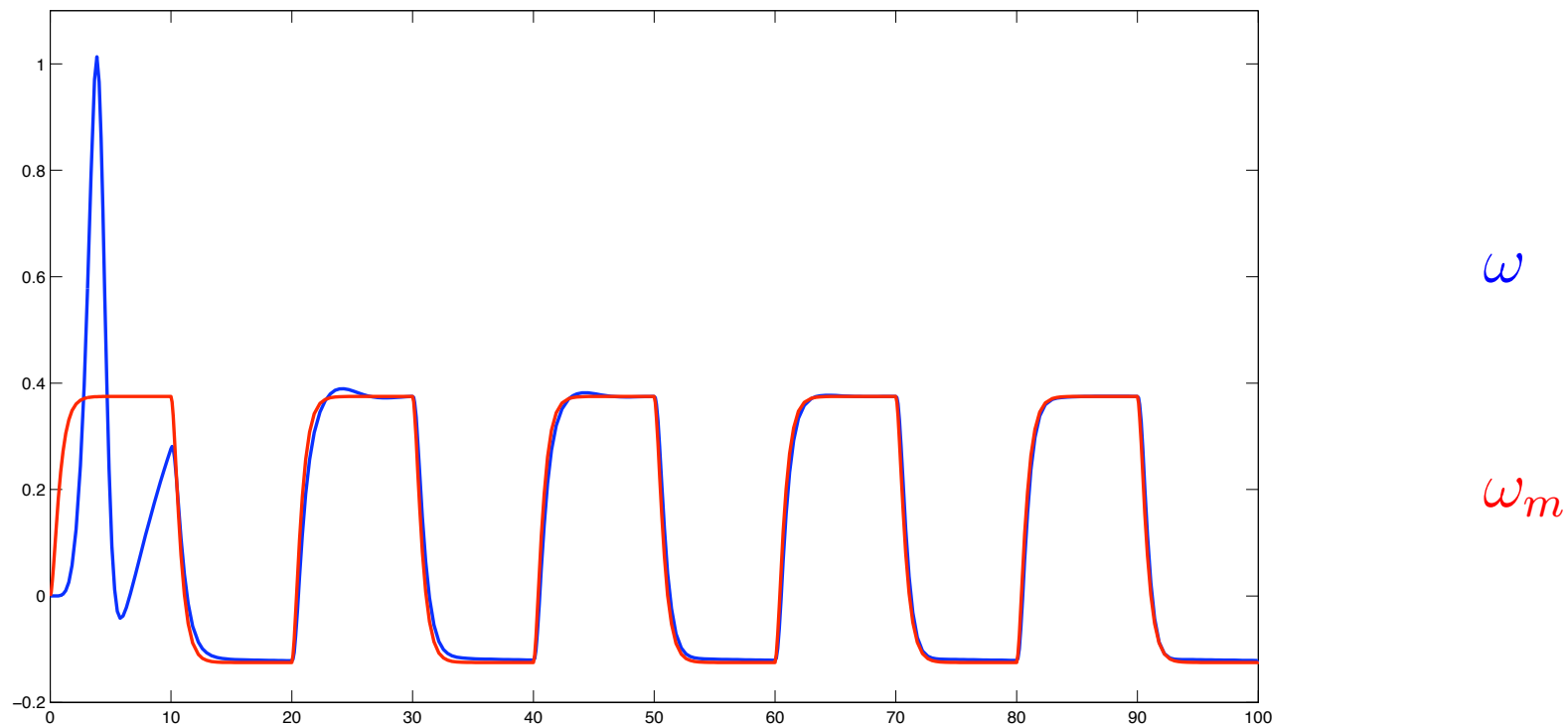
▲ Le transitoire (avant convergence des gains adaptatifs)
plus court, mais avec fort dépassement

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{10}{(s+0.8)(s+8)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 60$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période $20s$, valeur max = 0.375 , valeur min = -0.125



▲ Le transitoire très court, mais avec fort dépassement

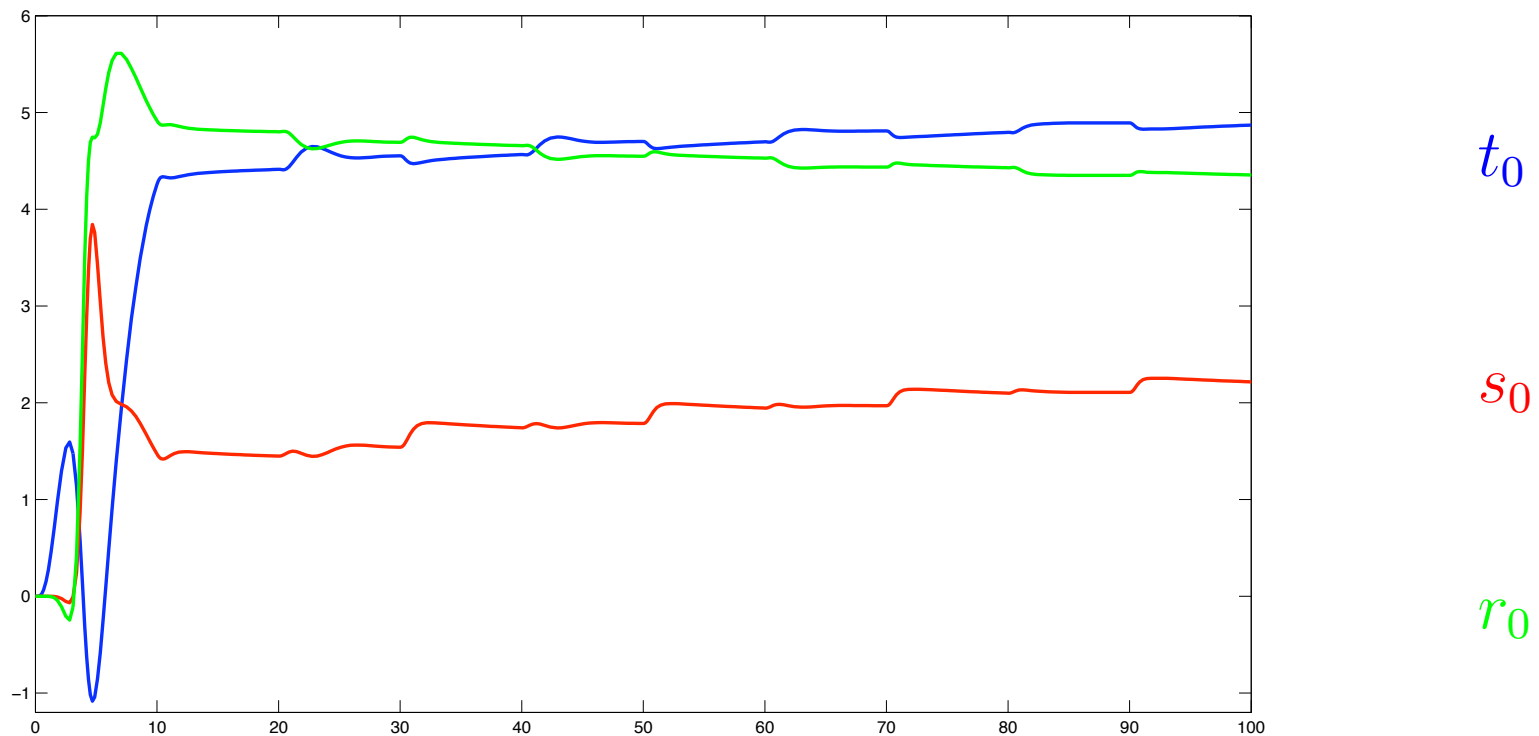
▲ Suivi de référence parfait une fois que les gains ont convergé

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{10}{(s+0.8)(s+8)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 60$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période 20s, valeur max = 0.375, valeur min = -0.125



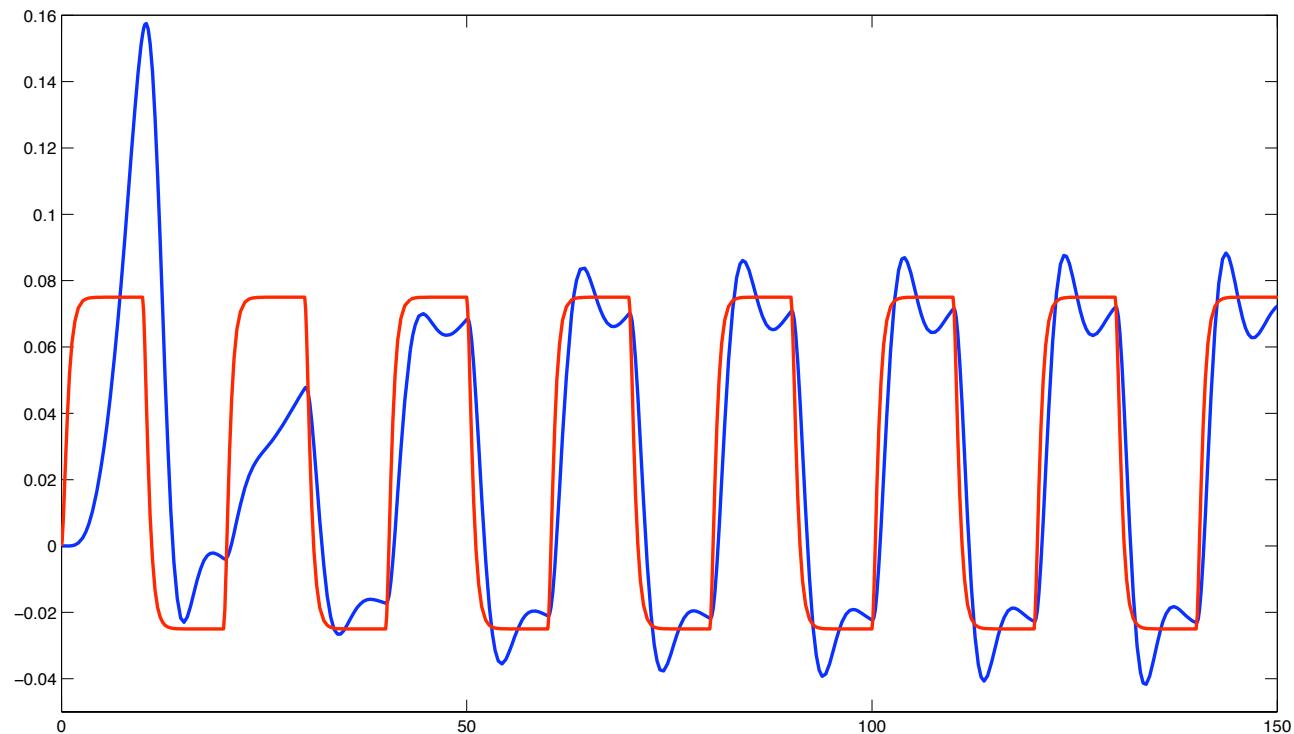
▲ Les gains semblent vraiment converger

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{10}{(s+0.8)(s+8)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 60$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période 20s, valeur max = 0.075, valeur min = -0.025



ω

ω_m

▲ L'amplitude de l'erreur étant faible, la convergence est lente

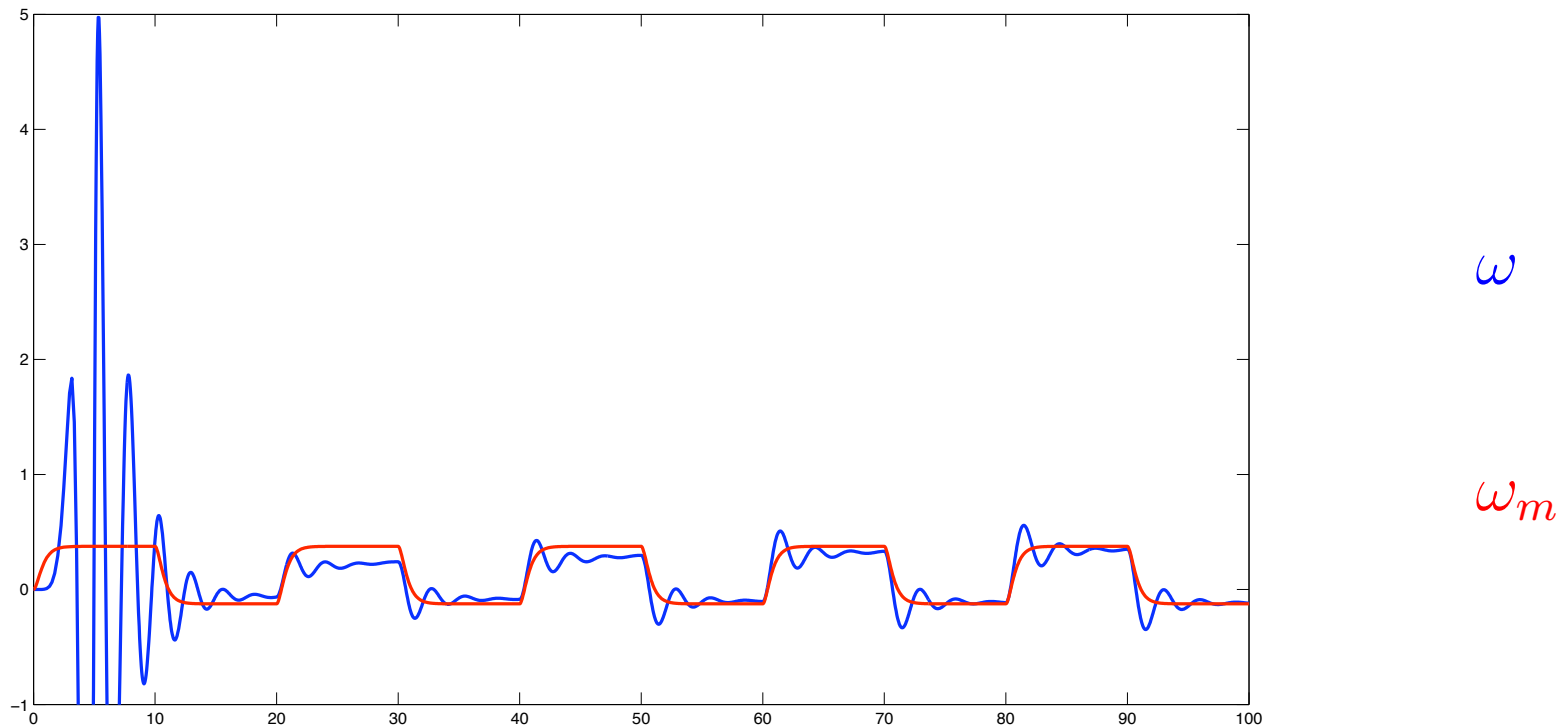
▲ Possibilité pour éviter ces phénomènes : adapter γ

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{10}{(s^2+s+1)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 60$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période $20s$, valeur max = 0.375 , valeur min = -0.125



▲ Ce n'est quand même pas parfait pour tout système

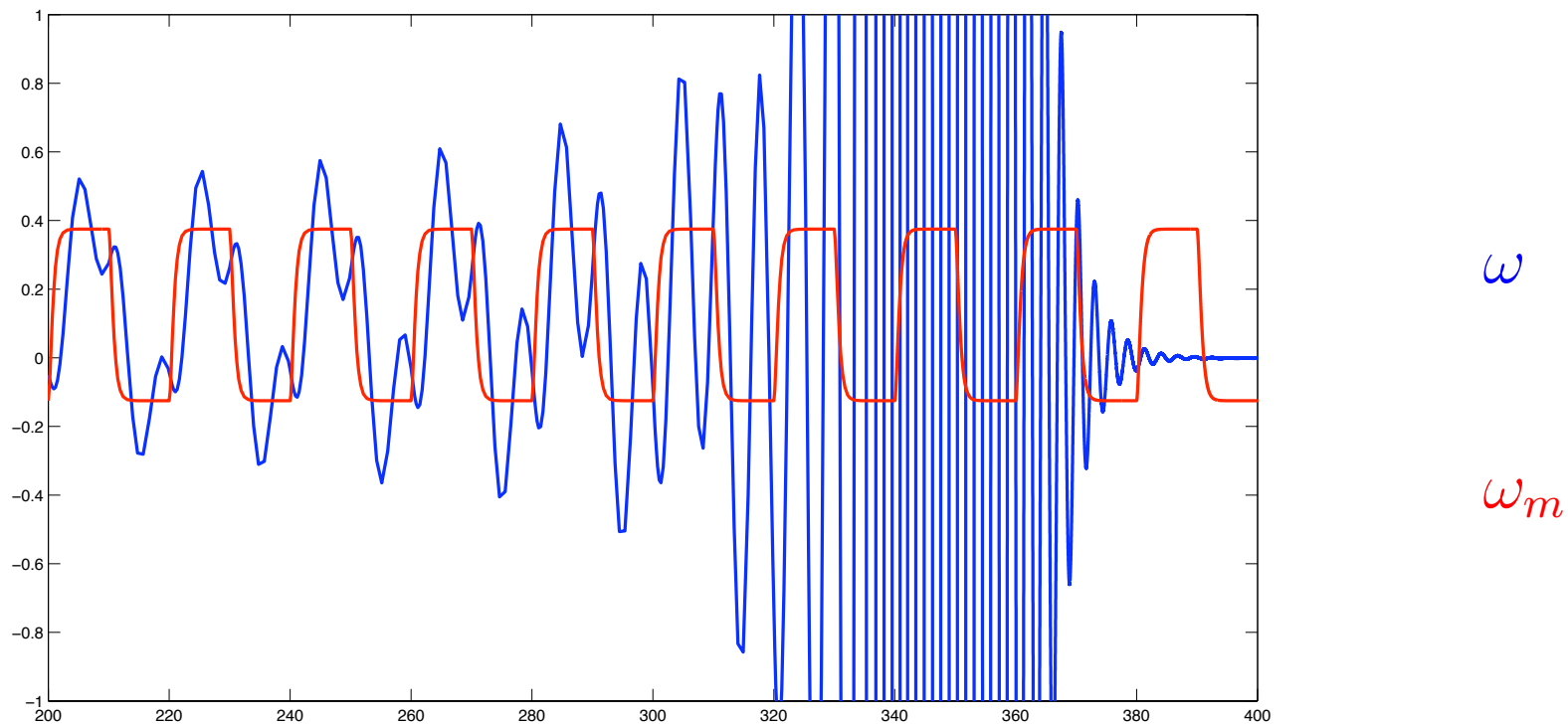
▲ Degrés du régulateur RST sous hypothèse d'un système du 1er ordre

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{-1.1s+10}{(s^2+s+1)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 60$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période 20s, valeur max = 0.375, valeur min = -0.125



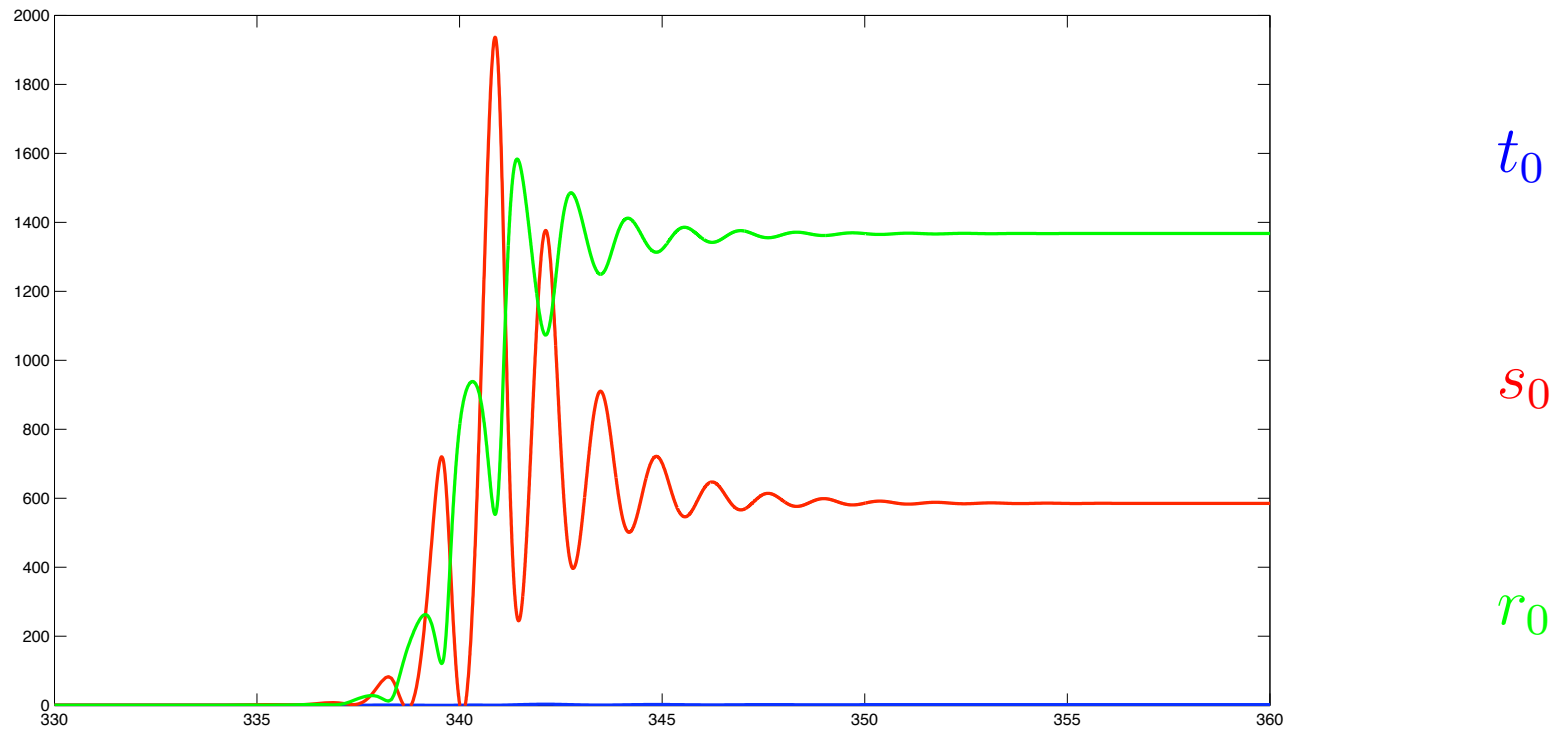
▲ Il peut y avoir des phénomènes instables : 'burst'

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

● $G(s) = \frac{-1.1s+10}{(s^2+s+1)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 60$,

● $\omega_c(t)$ créneau de période $20s$, valeur max = 0.375 , valeur min = -0.125



▲ Ce ne sont évidemment pas des valeurs de gain réalisables

■ Modification des lois d'adaptation

● σ -modification : Empêcher les gains de diverger

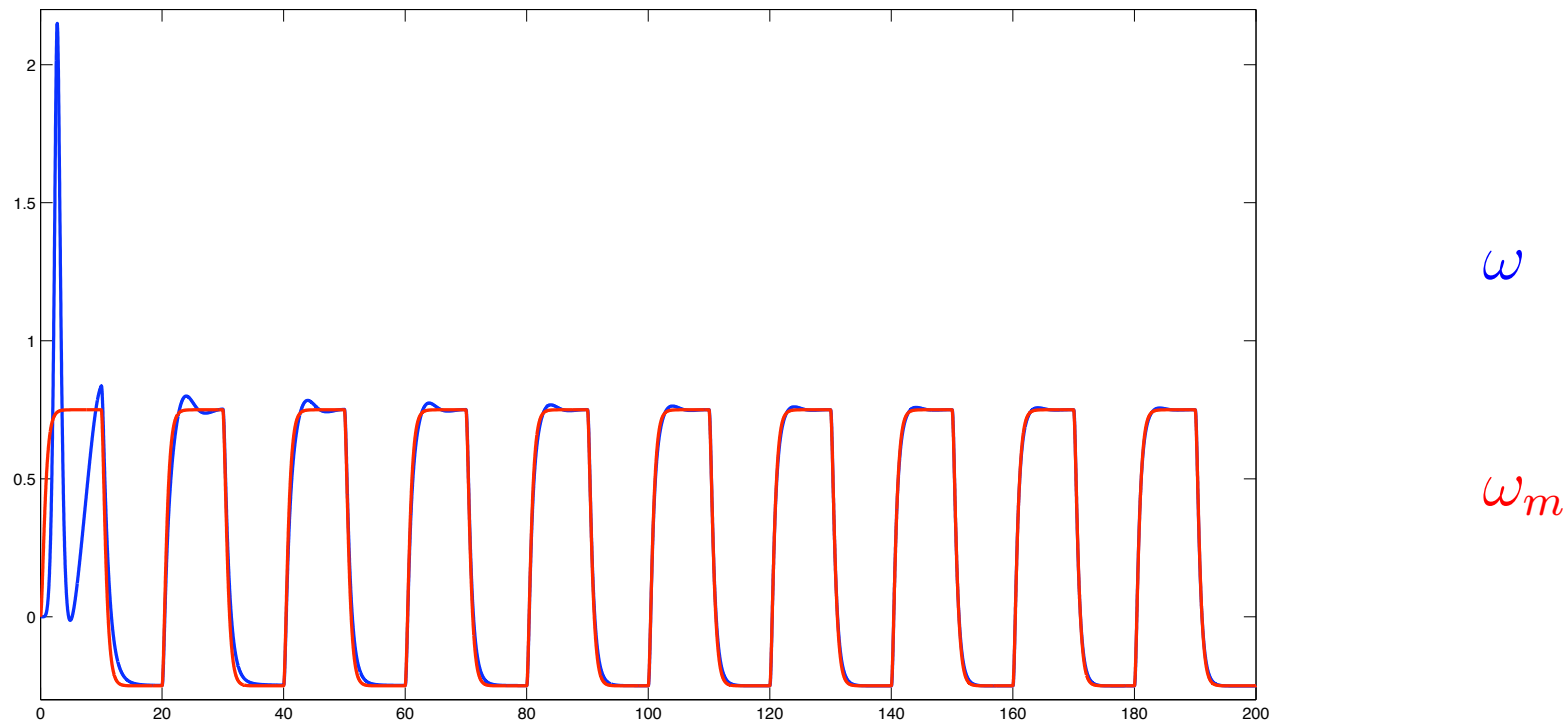
(en particulier sous l'effet de bruits de mesure)

$$\begin{aligned} \dot{s}_o &= \gamma e\left[\frac{1}{A_m}\omega\right] & \dot{s}_o &= \frac{\gamma}{1+\beta e^2} e\left[\frac{1}{A_m}\omega\right] - \sigma s_o \\ \dot{t}_o &= -\gamma e\left[\frac{1}{A_m}\omega_c\right] & \dot{t}_o &= -\frac{\gamma}{1+\beta e^2} e\left[\frac{1}{A_m}\omega_c\right] - \sigma t_o \\ \dot{r}_o &= \gamma e\left[\frac{1}{A_m}u\right] & \dot{r}_o &= \frac{\gamma}{1+\beta e^2} e\left[\frac{1}{A_m}u\right] - \sigma r_o \end{aligned}$$

▲ Pas de point d'équilibre possible pour les gains

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

- $G(s) = \frac{10}{(s+0.8)(s+8)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 60$, $\beta = 0.1$, $\sigma = 10^{-4}$,
- $\omega_c(t)$ créneau de période 20s, valeur max = 0.75, valeur min = -0.25

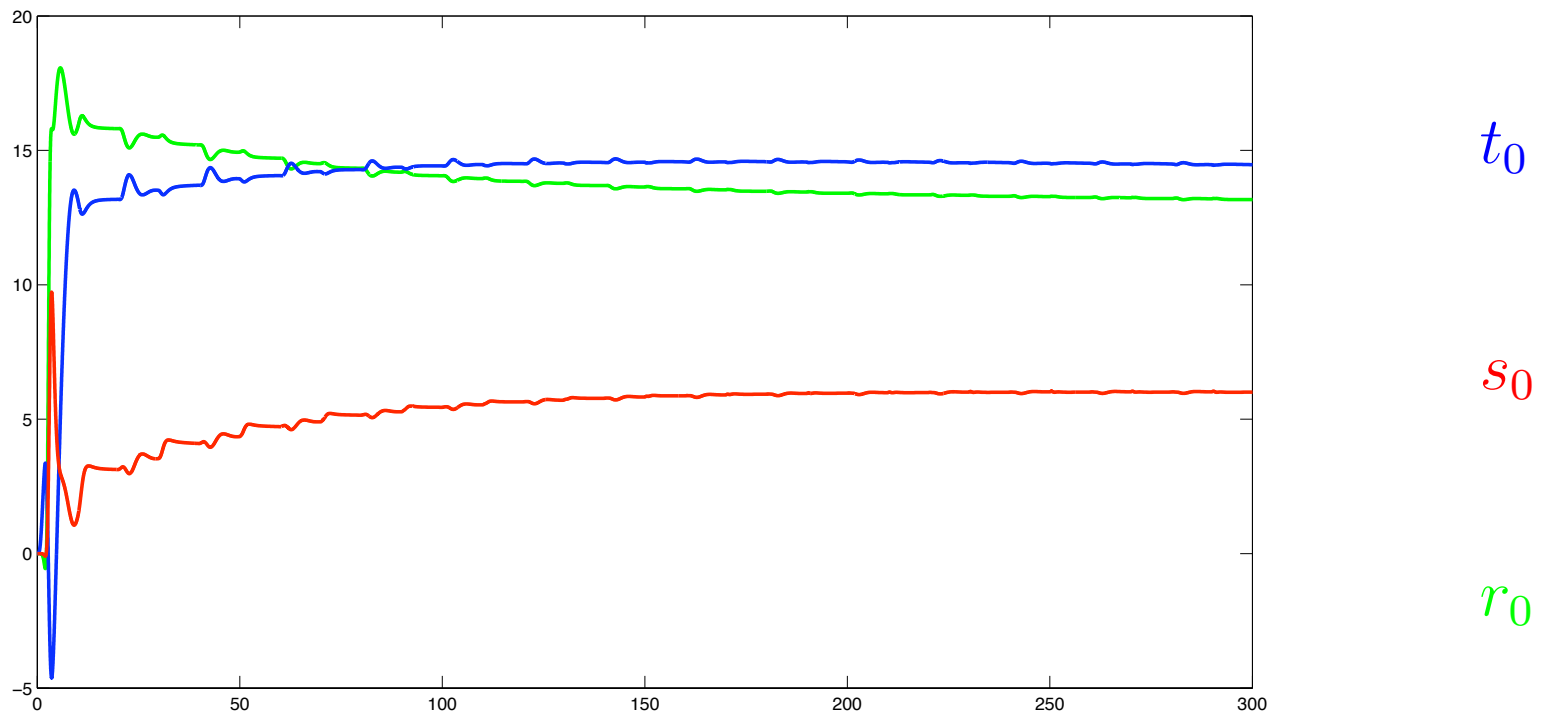


▲ Bon réglage de l'algorithme d'adaptation : bonnes performances de suivi

1 MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

■ Exemple : moteur à courant continu - Simulations

- $G(s) = \frac{10}{(s+0.8)(s+8)}$, $G_m(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$, $\gamma = 60$, $\beta = 0.1$, $\sigma = 10^{-4}$,
- $\omega_c(t)$ créneau de période 20s, valeur max = 0.75, valeur min = -0.25



▲ Bon réglage de l'algorithme d'adaptation : gains raisonnables, varient peu

■ Conclusions

● Algorithme du gradient potentiellement satisfaisant

- ▲ Robustesse relativement grande - mais non prouvée

- ▲ Pas besoin de connaître le modèle du système

- ▲ γ influe sur la vitesse de convergence, à régler par expérimentations

- ▲ β, σ modifications, à régler par expérimentations

● Aucune preuve de stabilité/performance

- ▲ Quelles hypothèses à faire sur le système ?

- ▲ Est-il possible de stabiliser des systèmes instables ?

- ▲ Extensions aux systèmes MIMO ?

- ▲ Comment garantir des gains bornés/réalisables ?

① MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

- ▲ Basée sur problème de régulation à 2 degrés de liberté (RST)
- ▲ Méthode de gradient issue des techniques d'estimation
- ▲ Règle heuristique

② Stabilisation par PBAC - le cas MIMO

- ▲ Hypothèses de type passivité sur les systèmes
- ▲ Preuves de stabilité avec théorie de Lyapunov

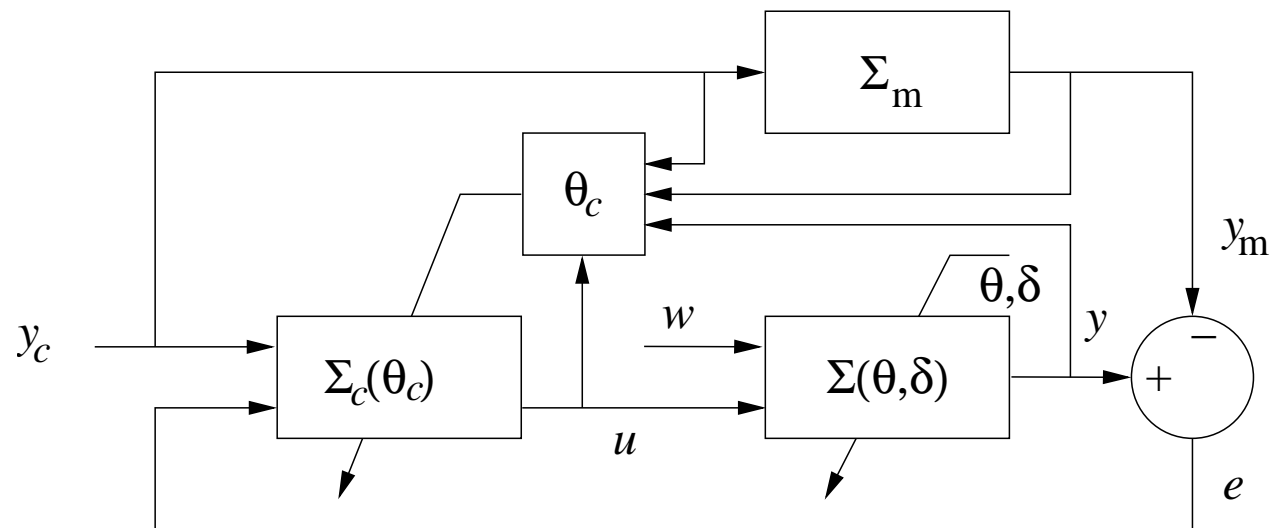
③ PBMRAC

④ Cas des systèmes non passifiables

2 Stabilisation par PBAC

■ Commande adaptative basée sur la passivité (PBAC)

- ▲ Hypothèses de type passivité sur les systèmes
- ▲ Preuves de stabilité avec théorie de Lyapunov



- Dans un premier temps on suppose $y_c = 0$
- On veut montrer que le système est stable

■ Systèmes passifs

● Système non-linéaire $\dot{x} = f(x, v)$, $z = g(x, v)$ est passif si

▲ il est carré : nombre d'entrées v = nombre de sorties z ,

▲ pour des CI nulles $x(0) = 0$, pour tout v et pour tout $t \geq 0$, on a

$$\int_0^t z^T(t)v(t)dt \geq 0$$

● Passivité : produit scalaire entrées/sorties est positif

“sorties vont dans le même sens que les entrées”

● Propriété de nombreux systèmes

● Pour les systèmes mécaniques (entrées : forces - sorties : vitesse),

l'intégrale correspond à l'énergie accumulée dans le système

■ Théorème - Systèmes passifs

Un système est strictement passif s'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

▲ nulle à l'origine : $V(0) = 0$

▲ définie-positive : $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

▲ dont les dérivées le long des trajectoires du système vérifient

$$\dot{V}(x) \leq z^T v - \epsilon x^T x$$

● V : “*storage function*”

● aussi fonction de Lyapunov prouvant la stabilité asymptotique du système

■ Rétroaction de systèmes passifs

- Soient deux systèmes avec le même nombre d'entrées/sorties

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, v_1) \quad , \quad z_1 = g_1(x_1, v_1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2, v_2) \quad , \quad z_2 = g_2(x_2, v_2)$$

- ▲ s'ils sont tous les deux strictement passifs

- ▲ alors l'interconnexion $v_2 = z_1, v_1 = -z_2$ est asymptotiquement stable

- Preuve $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq \underbrace{z_1^T v_1 + z_2^T v_2}_{=0} - \epsilon_1 x_1^T x_1 - \epsilon_2 x_2^T x_2 < 0$

- Cas particulier : $z_2(t) = \Delta_K(t)v_2(t)$ avec $\Delta_K(t) + \Delta_K^T(t) \succ 0$

- ▲ un cône de gains statiques qui préservent la stabilité de la boucle fermée

- ▲ les gains peuvent varier dans le temps, quelle que soit la règle, adaptative ?

- Conditions de strict-passivité des systèmes linéaires :

$$P = P^T \succ 0 : \begin{bmatrix} A^T P + PA + 2\epsilon 1 & PB - C^T \\ B^T P - C & -D - D^T \end{bmatrix} \preceq 0$$

▲ Preuve : $V = \frac{1}{2}x^T P x$

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + 2\epsilon 1 & PB - C^T \\ B^T P - C & -D - D^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = 2(\dot{V} - z^T w + \epsilon x^T x) \leq 0$$

▲ Dans le cas des systèmes sans transfert direct ($D = 0$)

$$P = P^T \succ 0 , \quad A^T P + PA + 2\epsilon 1 \preceq 0 , \quad PB = C^T$$

■ [Fra74, BK85] Théorème

- Passification par retour de sortie adaptatif des systèmes “presque passifs”
- S’il existe un retour de sortie statique $u = -Fy$ qui rend le système

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bv, \quad y = Cx, \quad z = y$$

strictement passif en boucle fermée, alors, pour tout $\Gamma \succ 0$,
la commande adaptative

$$u = -Ky, \quad \dot{K} = yy^T \Gamma$$

rend le système passif en boucle fermée.

● Preuve intuitive

▲ Existence d'un retour de sortie passifiant :

$$\Rightarrow \dot{x} = (A - BFC)x + Bv, \quad z = Cx \quad \text{est passif}$$

$$\Rightarrow \forall \Delta_K^T + \Delta_K \succ 0 \quad \dot{x} = (A - BFC - B\Delta_K C)x \quad \text{est stable}$$

▲ En prenant Δ_K suffisamment grand,

tout $K = F + \Delta_K$, $K + K^T \succ 0$, stabilise le système

▲ La loi adaptative $\dot{K} = yy^T \Gamma$ "pousse" les gains à devenir "grands"
dans la direction $K + K^T \succ 0$

▲ Tand que y n'a pas convergé à zéro,
la loi tend à augmenter le gain de commande

- Preuve par la théorie de Lyapunov

- ▲ On souhaite prouver la passivité du système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = (A - BK(t)C)x(t) + Bv(t), \quad \dot{K}(t) = y(t)y^T(t)\Gamma, \quad z(t) = Cx(t)$$

- ▲ sous l'hypothèse qu'il existe un gain K_o strictement passifiant :

$$\exists F, P \succ 0, \epsilon > 0 :$$

$$(A - BFC)^T P + P(A - BFC) + 2\epsilon \mathbf{1} \preceq 0, \quad PB = C^T$$

- ▲ Choix d'une fonction de Lyapunov qui dépend de tous les états

$$V(x, K) = \frac{1}{2} (x^T P x + \text{Tr} ((K - F)\Gamma^{-1}(K - F)^T))$$

- ▲ Il suffit de démontrer que $\dot{V} \leq z^T v$, le long des trajectoires

- Preuve par la théorie de Lyapunov

$$V(x, K) = \frac{1}{2} (x^T P x + \text{Tr} ((K - K_o) \Gamma^{-1} (K - K_o)^T))$$

- ▲ Calcul de sa dérivée

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + \text{Tr} (\dot{K} \Gamma^{-1} (K - K_o)^T)$$

- ▲ Trajectoires : $\dot{x} = (A - BKC)x + Bv$, $\dot{K} = yy^T \Gamma$

$$\dot{V} = x^T (A - BKC)^T P x + v^T B^T P x + \text{Tr} (yy^T (K - K_o)^T)$$

- ▲ Propriété de l'opérateur trace : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$:

$$\text{Tr} (yy^T (K - K_o)^T) = \text{Tr} (y^T (K - K_o)^T y) = y^T (K - K_o)^T y$$

- ▲ Donc comme $y = Cx$ on a

$$\dot{V} = x^T (A - BKC)^T P x + v^T B^T P x + x^T C^T (K - K_o)^T C x$$

- Conditions pour qu'un système linéaire soit stabilisable par PBAC [Fra03]
- Cas des systèmes SISO, $y = H(s)u$:
 - ▲ Le système doit être stabilisable par $u = -ky$ avec $k > 0$ grand
 - ▲ Lieu d'Evans : $H(s)$ ne doit pas avoir de zéros instables
 - ▲ Lieu d'Evans : $H(s)$ doit être de degré relatif ≤ 1
- Cas des systèmes MIMO : (A, B, C) à hyper minimum de phase
 - ▲ $\det(sI - A) \det(C(sI - A)^{-1}B)$ a toutes ses racines stables (zéros)
 - ▲ $CB = (CB)^T \succ 0$, gain haute fréquence est défini positif
(le degré relatif du système $\leq m$ où m : nb d'entrées)
- Limitations
 - ▲ Systèmes carrés (CB est carrée), et tels que $CB = (CB)^* \succ 0$
 - ▲ Degré relatif $\leq m$ et zéros stables

■ PBAC modifiée pour les systèmes non-carrés

■ [Fra03] Théorème

● S'il existe un retour de sortie statique $u = -K_o y$,
et une matrice G qui rendent le système

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bv, \quad y = Cx, \quad z = Gy$$

strictement passif en boucle fermée, alors, pour tout $\Gamma \succ 0$,
la commande adaptative

$$u = -Ky, \quad \dot{K} = Gyy^T \Gamma$$

rend le système passif en boucle fermée.

▲ Exercice : démontrer le théorème

● Applicable si le nombre de sorties est supérieur au nombre de commandes

■ Exemple - Modèle avion - longitudinal

- $x = \begin{pmatrix} \alpha & q \end{pmatrix}^T$, α incidence, q vitesse de tangage,
- $u = \delta$ braquage de gouverne

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} z_\alpha & 1 \\ m_\alpha & m_q \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ m_\delta \end{bmatrix} u, \quad y = x$$

▲ Matrice de transfert :

$$y = \frac{m_\delta}{s^2 - (z_\alpha + m_q)s + z_\alpha m_q - m_\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ s - z_\alpha \end{bmatrix} u$$

■ Exemple - Modèle avion

▲ Combinaison linéaire des sorties $z = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} y$:

$$\frac{z}{u} = \frac{m_\delta g_2 (s - z_\alpha + g_1/g_2)}{s^2 - (z_\alpha + m_q)s + z_\alpha m_q - m_\alpha}$$

est à hyper minimum de phase si $g_1/g_2 - z_\alpha > 0$ et $m_\delta g_2 > 0$

▲ En prenant $g_2 = \text{sign}(m_\delta)$ (m_δ doit être de signe connu)
et en prenant $|g_1|$ suffisamment grand devant valeurs attendues de z_α

$$u = -Ky, \quad \dot{K} = Gyy^T\Gamma$$

stabilise le système pour toute valeur des paramètres.

▲ Γ (et β, σ modifications) à régler en simulation.

① MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

- ▲ Basée sur problème de régulation à 2 degrés de liberté (RST)
- ▲ Méthode de gradient issue des techniques d'estimation
- ▲ Règle heuristique

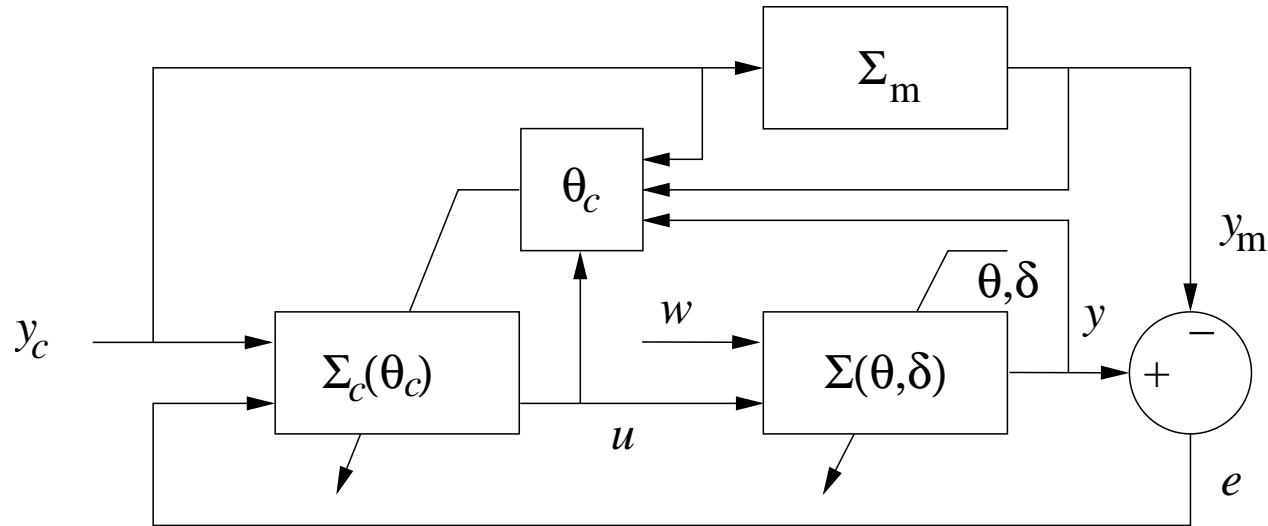
② Stabilisation par PBAC - le cas MIMO

- ▲ Hypothèses de type passivité sur les systèmes
- ▲ Preuves de stabilité avec théorie de Lyapunov

③ PBMRAC

④ Cas des systèmes non passifiables

■ MRAC basée sur la passivité



- Jusqu'ici $y_c = 0$ et commande $u(t) = -K(t)y(t)$
- Cas avec modèle de référence : $u = -K(t)e(t) + L(t)x_m(t) + M(t)y_c(t)$
 - ▲ $K(t)$ a pour rôle de stabiliser la boucle (comme précédemment)
 - ▲ $L(t)$ et $M(t)$ définissent une pré-commande pour le suivi de la référence
- Etude menée pour les systèmes linéaires (linéarisé d'un modèle non-linéaire)

■ Hypothèses sur le système

- Le système est “presque passif” :

Il existe un retour de sortie statique $u = -K_o y$,
et une matrice G qui rendent le système

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bv, \quad y = Cx, \quad z = Gy$$

strictement passif en boucle fermée

- Il existe une pré-commande L_o, M_o qui permet le suivi parfait :

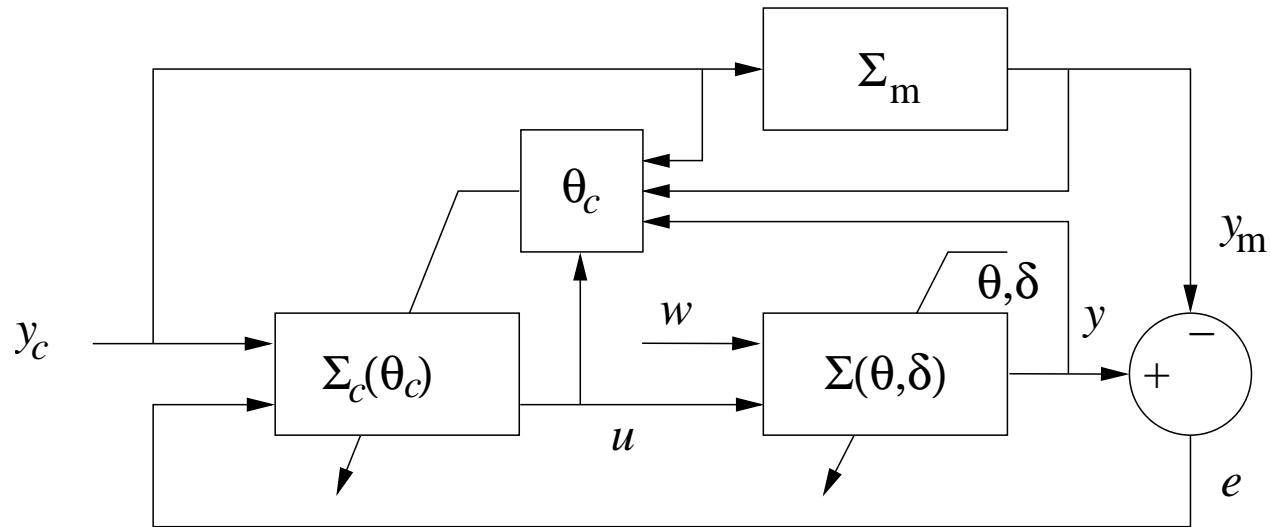
$$\dot{x}_o = Ax_o + B(L_o x_m + M_o y_c) \Rightarrow Cx_o = y_m$$

où x_m est l'état du modèle de référence (dont l'ordre peut être $\neq n$)

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m y_c, \quad y_m = C_m x_m$$

- ▲ Hypothèse forte, équivalente aux hypothèses sur régulateurs RST

■ MRAC basée sur la passivité



● Si les hypothèses sont vérifiées, alors pour tous $\Gamma_K \succ 0$, $\Gamma_L \succ 0$, $\Gamma_M \succ 0$, la loi de commande

$$u = -K(t)e(t) + L(t)x_m(t) + M(t)y_c(t) \quad , \quad e = y - y_m$$

$$\dot{K} = Gee^T \Gamma_K \quad , \quad \dot{L} = -Gex_m^T \Gamma_L \quad , \quad \dot{M} = -Gey_c^T \Gamma_M$$

est telle que $\lim(x(t) - x_o(t)) = 0$.

■ PBMRAC pour une classe de systèmes nonlinéaires

$$\dot{x} = Ax + A_\phi \phi(y, u, t) + Bu, \quad y = Cx$$

● La loi de commande suivante stabilise le système et $x(t) \rightarrow x_m(t)$.

$$u = -Ke + Lx_m + My_c + N\phi, \quad e = y - y_m$$

$$\dot{K} = Gee^T \Gamma_K, \quad \dot{L} = -Gex_m^T \Gamma_L, \quad \dot{M} = -Gey_c^T \Gamma_M, \quad \dot{N} = -Ge\phi^T \Gamma_N$$

▲ Exemple : système saturé

$$\dot{x} = Ax + B\text{sat}(u) = Ax + Bu - Bdz(u)$$

Le terme $Ndz(u)$ de la commande est un anti-windup.

▲ En pratique si y_c n'est pas constante $N(t)$ diverge...

■ Conclusions sur PBMRAC

- Fort potentiel d'application pour les systèmes "presque passifs"
(existence de G et K_o tels que $G(H(s) \star K_o)$ est passif
- Loi d'adaptation de la forme $\dot{K} = Ge\check{e}^T\Gamma$
 - ▲ Tant que e n'a pas convergé les gains s'adaptent, dans la direction G
 - ▲ Ils peuvent potentiellement diverger
 - ▲ Si (transitoirement) $\|e\|$ est grand, alors \dot{K} est grand (pas réalisable)
- Possibilité de faire β, σ modifications :

$$\dot{K} = Ge\check{e}^T\Gamma(1 + e^T\beta e)^{-1} - \sigma K$$

- ▲ mais les preuves de stabilité ne tiennent plus ...
- ▲ Ici dans le cas $\beta = 0$

$$\dot{V} \leq -\epsilon\|x - x_o\|^2 - \sigma\text{Tr}(K\Gamma^{-1}(K - K_o)^T) \leq 0?$$

Si K est bornée, on peut avoir $\dot{V} \leq 0$ pour $\|x - x_o\| \geq \rho$: stabilité pratique

① MRAC dans le cas SISO et règle du MIT

- ▲ Basée sur problème de régulation à 2 degrés de liberté (RST)
- ▲ Méthode de gradient issue des techniques d'estimation
- ▲ Règle heuristique

② Stabilisation par PBAC - le cas MIMO

- ▲ Hypothèses de type passivité sur les systèmes
- ▲ Preuves de stabilité avec théorie de Lyapunov

③ PBMRAC

④ Cas des systèmes non passifiables

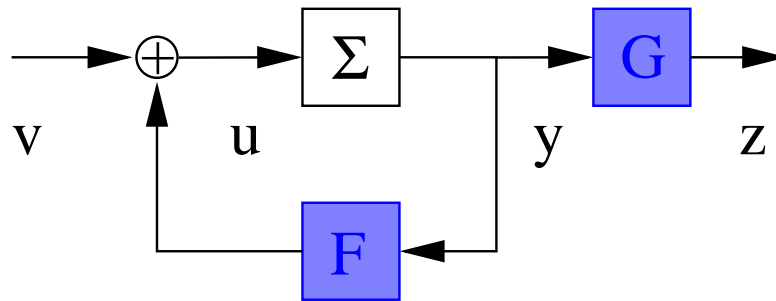
4 Cas des systèmes non passifiables

■ Passivity-Based Adaptive Control [Fradkov 1974, 2003]

& Simple Adaptive Control [Kaufman, Barkana, Sobel 94]

● Let $\Sigma \sim (A, B, C, D)$ be a MIMO system with m inputs / $p \geq m$ outputs.

● If $\exists (G, F) \in (\mathbb{R}^{p \times m})^2$ such that the following system is passive



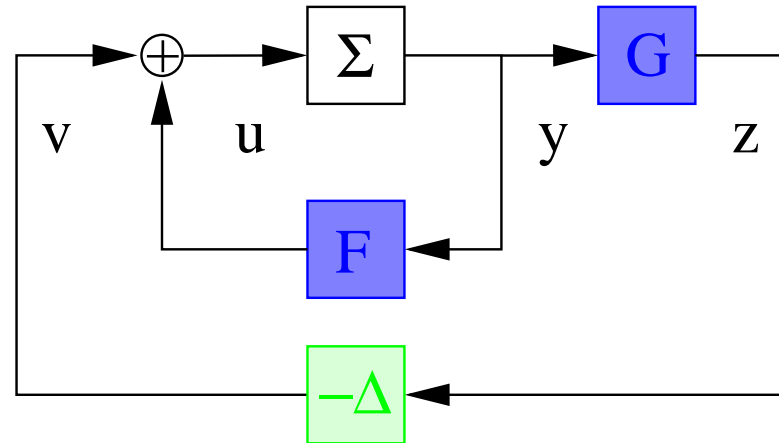
● then the following adaptive law stabilizes the system for all $\Gamma > 0$

$$\dot{K} = -Gyy^T\Gamma, \quad u = Ky$$

4 Cas des systèmes non passifiables

Underlying properties

- Passivity implies that for all $\Delta + \Delta^* \geq 0$ the following system is stable



- i.e.* all gains $(F - \Delta G)$ stabilize the system, for $\Delta + \Delta^* \geq 0$, possibly large
- $\dot{K} = -Gyy^T \Gamma$ “pushes” the gains in that direction until stability is reached

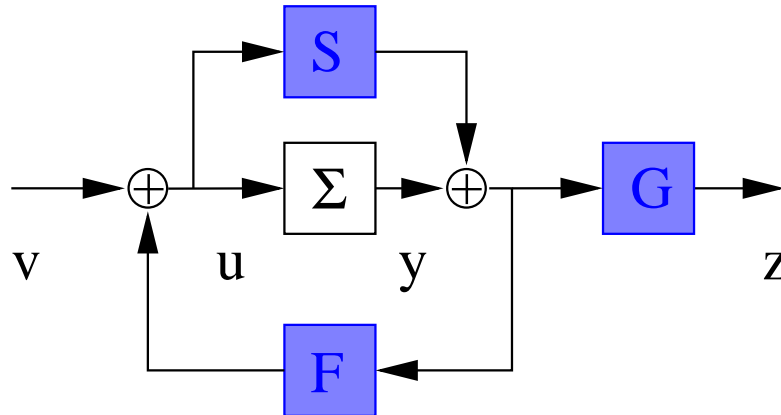
▲ In practice : Need to limit growth of K . Modifications of adaptive law

$$\dot{K} = -Gyy^T \Gamma + \phi(K) \quad (\text{eg. } \phi(K) = -\sigma K)$$

4 Cas des systèmes non passifiables

■ What if Σ is not passifiable by (G, F) ?

● $\exists S$ a feedthrough (or Shunt) such that the following system is passive



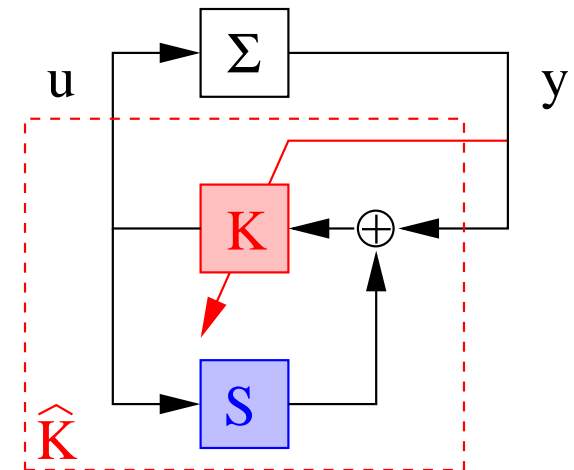
● then the adaptive law stabilizes the system $\Sigma + S$.

▲ [KBS94] For SISO Σ one can take $S(s) = F_S^{-1}(s)$ where F_S is stabilizing

▲ In practice : S should be small for tracking issues ($u = K(y + Su)$)

▲ Rq : The actual gain is bounded

$$\hat{K} = (1 - KS)^{-1}K$$



■ Proposed result [PDPM11]

● K bounded thanks to a modification of the adaptive law :

$$\dot{K} = -Gyy^T\Gamma - \psi_D(K) \cdot (K - F) , \quad u = Ky$$

▲ ψ_D is a deadzone : no modification when K is close to F

$$\psi_D(K) = 0 \quad \text{if} \quad \|K - F\|_{\bullet}^2 \leq \nu$$

▲ ψ_D is a barrier : goes to infinity when K reaches border of accepted region

$$\psi_D(K) \rightarrow +\infty \quad \text{if} \quad \|K - F\|_{\bullet}^2 \rightarrow \nu\beta \quad (\beta > 1)$$

4 Cas des systèmes non passifiables

■ LMI-based design of $(G, D = \frac{\mu}{2}\mathbf{1}, \nu)$ assuming a given stabilizing F

● Step 1 (LMI) : minimize μ such that $\begin{cases} \dot{x} = A(F)x + Bw, \\ z = GCx + \frac{\mu}{2}w \end{cases}$ is passive :

$$\begin{bmatrix} A^T(F)P + PA(F) & PB - C^T G^T \\ B^T P - GC & -\mu\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0$$

● Step 2 (LMI) : maximize ν , the size of admissible adaptive gains

$$Q > 0, \begin{bmatrix} T & (\hat{F} - F)^T \\ (\hat{F} - F) & \mu^{-1}\mathbf{1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{Tr}(T) \leq \nu\mu,$$

$$\begin{pmatrix} A^T(F)Q + QA(F) + \nu\mu\beta C^T C \\ +R + C^T(G^T(\hat{F} - F) + (\hat{F} - F)^T G)C \end{pmatrix} < 0.$$

$$\begin{bmatrix} R & QB - C^T G^T \\ B^T Q - GC & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} \geq 0,$$

4 Cas des systèmes non passifiables

■ LMI-based design of $(G, D = \frac{\mu}{2}1, \nu)$ assuming a given stabilizing F

▲ Procedure guaranteed to succeed if F stabilizes the system

▲ K remains in a convex set around F (appreciated by engineers)

▲ ν may be small, *i.e.* small admissible adaptation ($K \simeq F$)

▲ LMI results can be easily extended to uncertain systems

⇒ proof of robustness of adaptive control for given uncertainty set

▲ In the robust case, step 2 is based on the existence of a PDSOF $\hat{F}(\theta)$

Compared to $\hat{F}(\theta)$, the adaptive gain K needs not the estimation of θ

▲ Lyapunov function for global (robust) stability of PBAC

$$V(x, K, \theta) = x^T Q(\theta)x + \text{Tr}((K - \hat{F}(\theta))\Gamma^{-1}(K - \hat{F}(\theta))^T)$$

Conclusions

■ LMI-based method that guarantees (**robust**) stability of PBAC

- Applies to any stabilizable LTI MIMO system
- Adaptive gains remain bounded
- Adaptive gains remain close to known value F
- With σ -modification : converge to known value F_0

$$\dot{K} = -Gyy^T\Gamma - \psi_D(K) \cdot (K - F) - \sigma(K - F_0)$$

■ Prospectives

- Enlarge admissible region for K
- Structured control (decentralized etc.)
- Guaranteed robustness for time-varying uncertainties
- Take advantage of flexibilities on G for engineering issues (saturations...)
- ...

Références

- [AKO07] A. Astolfi, D. Karagiannis, and R. Ortega, *Nonlinear and adaptive control with applications*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, 2007.
- [AOS00] A. Astolfi, R. Ortega, and R. Sepulchre, *Control of complex systems*, ch. Passivity–based control of Nonlinear Systems, Springer, London, 2000.
- [ÅW89] K.J. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive control*, Addison-Wesley, 1989.
- [BK85] I. Barkana and H. Kaufman, *Global stability and performance of an adaptive control algorithm*, Int. J. Control **42** (1985), no. 6, 1491–1505.

- [FFY81] V. Fomin, A. Fradkov, and V. Yakubovich, *Adaptive control of dynamic plants*, Nauka, Moscow, 1981, In Russian.
- [Fra74] A.L. Fradkov, *Adaptive stabilization of a linear dynamic plant*, Autom. Remote Contr. **35** (1974), no. 12, 1960–1966.
- [Fra90] _____, *Adaptive control of complex systems*, Nauka, 1990, in Russian.
- [Fra03] _____, *Passification of non-square linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov lemma*, European J. of Control **6** (2003), 573–582.
- [HC98] W.M. Haddad and V.-S. Chellaboina, *Nonlinear fixed-order dynamic compensation for passive systems*, International Journal of Robust and Nonlinear Control **8** (1998), 349–365.
- [IF06] P. Ioannou and B. Fidan, *Adaptive control tutorial*, Advances in Design and Control, SIAM, 2006.

- [IS96] P. Ioannou and J. Sun, *Robust adaptive control*, Prentice Hall, Inc, 1996.
- [KBS94] H. Kaufman, I. Barkana, and K. Sobel, *Direct adaptive control algorithms*, Springer, New York, 1994.
- [PDPM11] D. Peaucelle, A. Drouot, C. Pittet, and J. Mignot, *Simple adaptive control without passivity assumptions and experiments on satellite attitude control DEMETER benchmark*, IFAC World Congress, August 2011.
- [PKP09] D. Peaucelle, H.M. Khan, and P.V. Pakshin, *LMI-based analysis of robust adaptive control for linear systems with time-varying uncertainty*, Autom. Remote Contr. **70** (2009), no. 9, 1540–1552.