Une formulation générique pour l'analyse et la synthèse robustes en stabilité et performance

Dimitri Peaucelle et Denis Arzelier[1]

1. Introduction

Cet article est principalement dédié à la présentation de résultats récents en analyse et synthèse robuste des systèmes dynamiques à incertitude paramétrique réelle. Nous nous sommes volontairement limités à des modèles avec incertitude structurée de type linéaire fractionnaire, $\mathcal{LFT}$. Les problèmes d'analyse robuste associés à ces modèles sont réputés difficiles, [ZHO 96] et ont généralement été abordés dans le cadre de la valeur singulière structurée, [ZHO 96], [PAC 93]. L'utilisation de la notion de stabilité quadratique, [BER 89], [PAC 90], a fourni une alternative à ce cadre de travail. Ce concept très fructueux a permis de développer de nombreux outils d'analyse et de synthèse numériquement intéressants de par leur simplicité, (conditions impliquant la résolution d'équations de Riccati ou de $\mathcal{LMI}$). Toutefois, il est apparu que ce concept nécessitant l'utilisation d'une fonction de Lyapunov unique pour l'ensemble des incertitudes, génère un pessimisme irréductible des conditions proposées. Des travaux préliminaires ont permis de montrer que celui-ci pouvait être réduit dans certains cas par l'introduction de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres incertains ainsi que par l'usage systématique de la S-procédure, [FER 96], [GAH 96].

Les conditions d'analyse proposées dans cet articles reposent également sur le concept de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres et prolongent ainsi les travaux récents sur le sujet. Nous nous sommes intéressés à divers problèmes d'analyse en stabilité et en performance. Pour chacun des problèmes traités, nous nous sommes attachés à présenter notre nouvelle approche le plus synthétiquemnt possible en omettant sciemment les preuves trop techniques et qui auraient alourdi inutilement cet article. Le lecteur désireux d'aller plus loin dans la compréhesion des mécanismes techniques utilisés peut se reporter aux nombreuses références citées dans le texte.

Finalement, l'aspect le plus intéressant de ce travail est, peut être, lié au fait qu'il fait apparaitre une généricité des problèmes qui permet leur traitement dans un cadre unifié et leur extension aisée à d'autres types de modélisation incertaines, [PEA 00D]. Il reste d'autre part que l'extension de ces techniques aux problèmes de synthèse constitue un domaine ouvert. Le résultat de synthèse proposé est établi uniquement dans le cadre quadratique. Certaines extensions utilisant des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres existent mais

[1]LAAS - CNRS 7, Avenue du Colonel Roche 31077 Toulouse cedex - France Tel. 05 61 33 64 17 fax : 05 61 33 69 69 email : peaucelle@laas.fr - arzelier@laas.fr

n'ont pas été inclues ici pour des raisons de concision, [ARZ 00a], [ARZ 0ba], [OLI 99]. Cet article ne doit donc pas apparaitre comme un état de l'art d'une recherche définitive et figée mais plutôt comme un instantané d'une recherche en pleine évolution.

Notations : La matrice transposée de A is notée A' et A^* est la matrice complexe conjuguée transposée. Etant données des matrices symétriques A et B, $> (\geq)$ est la relation d'ordre partiel telle que $A > (\geq) B$ si et seulement si $A - B$ est (semi) définie positive. $\mathbb{1}$ est la matrice identité et $\mathbb{0}$ la matrice nulle de dimensions appropriées. δ est l'opérateur de dérivation pour les systèmes en temps continu, $(\delta[x(t)] = \dot{x}(t))$ et l'opérateur de retard pour les systèmes en temps discret, $(\delta[x(t)] = x(t+1))$. $\otimes$ est le produit de Kronecker des matrices. Nous rappelons que $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$. $co\{A_1, \cdots, A_N\}$ définit l'enveloppe convexe des matrices sommets $A_1, \cdots, A_N$. Le signe $\star$ indique dans une matrice, un terme symétrique qui se déduit du contexte. Pour une matrice A donnée, $sym(A) = A + A'$. De plus, $\sigma = s$ ou $\sigma = z$ suivant que l'on considère des modèles en temps continu ou discret.

2. Les modèles incertains

2.1. *Introduction*

Les modèles Linéaires Temps-Invariant, (LTI) sont très largement utilisés en analyse et synthèse robustes du fait de leur simplicité et du fait qu'il existe de nombreux outils performants associés. Cette simplicité du modèle LTI n'est toutefois pas sans conséquence sur la précision relative de sa représentativité du système physique réel. Il est donc nécessaire, dans la plupart des cas, d'adjoindre au modèle LTI un modèle mathématique de l'incertitude représentant l'écart entre la réalité physique et le modèle mathématique simplifié.

Il est donc indispensable de définir des classes de modèles d'incertitude permettant l'élaboration de modèles incertains adéquats. Le modèle d'incertitude peut ainsi être caractérisé par différents facteurs tels que ceux définissant la nature de l'incertitude considérée.

2.2. *La modèlisation LFT*

Les modèles considérés sont linéaires invariant dans le temps (LTI) et peuvent être à temps continu ou à temps discret. Nous envisageons le problème d'analyse en vue de valider les performances d'un système bouclé par un correcteur donné, K. Nous considérons des entrées de perturbation sur le système, $w_{\mathcal{H}}(t)$ et des sorties de commande, $z_{\mathcal{H}}(t)$, qui mesurent l'effet des perturbations. Le modèle du système est supposé être incertain. Les incertitudes sont constantes et sont regroupées dans une matrice Δ dont on précisera la structure.

$$\begin{pmatrix} \delta[x(t)] \\ z_{\mathcal{H}}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_o(K,\Delta) & B_{\mathcal{H}}(K,\Delta) \\ C_{\mathcal{H}}(K,\Delta) & D_{\mathcal{H}}(K,\Delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ w_{\mathcal{H}}(t) \end{pmatrix} \qquad [1]$$

L'incertitude entre dans le modèle sous forme rationnelle. En adoptant l'écriture de Transformation Linéaire Fractionnaire ($\mathcal{LFT}$), le modèle est une expression affine de Δ_c :

$$\begin{bmatrix} A_o(K,\Delta) & B_{\mathcal{H}}(K,\Delta) \\ C_{\mathcal{H}}(K,\Delta) & D_{\mathcal{H}}(K,\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o(K) & B_{\mathcal{H}}(K) \\ C_{\mathcal{H}}(K) & D_{\mathcal{H}}(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w(K) \\ D_{\mathcal{H}w}(K) \end{bmatrix} \Delta_c \begin{bmatrix} C'_z(K) \\ D'_{z\mathcal{H}}(K) \end{bmatrix}' \qquad [2]$$

où Δ_c est une expression matricielle composée de fractions rationnelles. Elle s'écrit indifféremment sous les deux formes suivantes :

$$\Delta_c = \Delta(\mathbb{1} - D_{zw}(K)\Delta)^{-1} = (\mathbb{1} - \Delta D_{zw}(K))^{-1}\Delta \qquad [3]$$

La modélisation LFT permet ainsi de représenter une très grande variété de modèles incertains. Elle correspond à un bouclage de l'opérateur Δ sur un modèle LTI certain :

$$\begin{pmatrix} \delta[x(t)] \\ z(t) \\ z_{\mathcal{H}}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_o(K) & B_w(K) & B_{\mathcal{H}}(K) \\ C_z(K) & D_{zw}(K) & D_{z\mathcal{H}}(K) \\ C_{\mathcal{H}}(K) & D_{\mathcal{H}w}(K) & D_{\mathcal{H}}(K) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \\ w_{\mathcal{H}}(t) \end{pmatrix} \qquad [4]$$

$$w(t) = \Delta z(t)$$

où $w(t)$ et $z(t)$ sont des entrées/sorties exogènes fictives. Les matrices définissant le modèle sont dépendantes d'une loi de correction symbolisée par le correcteur K quelque soit sa nature.

2.3. *Caractérisation des incertitudes*

L'opérateur matriciel incertain Δ appartient à un domaine $\mathbb{\Delta}$ tel que :

- $\mathbb{\Delta}$ contient l'incertitude nulle $\Delta = \mathbb{0}$.

- $\mathbb{\Delta}$ est fermé convexe et peut éventuellement être non borné.

La modélisation LFT impose que le bouclage de l'incertitude sur le modèle LTI certain soit bien posé. Cette notion implique que le modèle incertain appartient à un domaine convexe compact. Même si $\mathbb{\Delta}$ est un domaine non borné, Δ_{LFT} évolue dans un domaine compact.

Les Incertitudes structurées

L'opérateur Δ est structuré pour prendre en compte les différents paramètres incertains qui peuvent être indépendants et peuvent intervenir simultanément dans différents éléments du modèle. L'écriture $\mathbb{1}_{r_j} \otimes \Delta_j$ exprime que le bloc Δ_j est répété r_j fois sur la diagonale. Les paramètres incertains peuvent être scalaires ou matriciels. Nous les représentons sous forme matricielle comme suit :

$$T_g \Delta T_d = \begin{bmatrix} \widehat{\Delta} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1}_{r_1} \otimes \Delta_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & & \cdots & \mathbb{1}_{r_l} \otimes \Delta_l \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} det(T_g) \neq 0 \\ \\ det(T_d) \neq 0 \end{array} \qquad [5]$$

Les deux matrices inversibles T_g et T_d caractérisent le changement de base qui conduit d'une forme Δ quelconque à la forme bloc diagonale structurée.

Les différents blocs incertains peuvent être de nature différente. Ils sont de nature polytopique, $\widehat{\Delta}$, ou de nature $H^{(j)}$-dissipative, Δ_j.

Les Incertitudes polytopiques

L'incertitude $\widehat{\Delta}$ est de nature polytopique si elle appartient au domaine incertain $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ défini comme l'enveloppe convexe de N sommets notés $\Delta^{[i]}$. Les éléments de ce domaine compact sont paramétrés par les N coordonnées barycentriques ζ_i comme suit :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{\Delta}} &= co.\left\{\Delta^{[1]}, \Delta^{[2]}, \cdots, \Delta^{[N]}\right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{N} \zeta_i \Delta^{[i]} \ : \ \sum_{i=1}^{N} \zeta_i = 1 \ , \ 0 \leq \zeta_i \leq 1 \right\} \end{aligned} \qquad [6]$$

Aucune structure n'est donnée explicitement sur $\widehat{\Delta}$ dans l'expression [5] puisque les incertitudes de nature polytopique permettent intrinsèquement de prendre en compte la structure. Les polytopes de matrices permettent de définir l'incertitude à la donnée de valeurs extrêmes des paramètres. Cette représentation généralise la description par matrices intervalles et la représentation parallélotopique. A la différence de ces deux dernières, elle n'impose pas de symétrie sur le domaine incertain et permet de prendre en compte des interdépendances entre différents paramètres. Cependant, cette modélisation conduit à la définition de conditions très couteuses en temps de calcul du fait du nombre de variables de décision générées. Il est souvent préférable pour des questions de combinatoire de choisir une modélisation dissipative des incertitude.

Les incertitudes dissipatives

L'incertitude Δ_j appartient au domaine $\mathbb{\Delta}_{H(j)}$ des matrices $H^{(j)}$-dissipatives si elle satisfait une inégalité matricielle du type ellipsoïdale telle que :

$$\Delta_j \in \mathbb{\Delta}_{H(j)} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \Delta_j' \end{bmatrix} H^{(j)} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \Delta_j \end{bmatrix} \geq \mathbb{0} \qquad [7]$$

où $H^{(j)}$ est une matrice donnée qui se décompose en blocs conformément à l'inégalité [7] :

$$H^{(j)} = \begin{bmatrix} H_{11}^{(j)} & H_{12}^{(j)} \\ H_{12}^{(j)\prime} & H_{22}^{(j)} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{array}{c} H_{11}^{(j)} \geq \mathbb{0} \\ H_{22}^{(j)} \leq \mathbb{0} \end{array} \qquad [8]$$

La condition sur $H_{11}^{(j)}$ impose que l'incertitude nulle fasse partie de l'ensemble incertain. La condition sur $H_{22}^{(j)}$ impose que $\mathbb{\Delta}_{H^{(j)}}$ soit un ensemble convexe. Si $H_{22}^{(j)}$ admet une valeur propre nulle alors le domaine incertain n'est pas nécessairement borné.

La notion d'incertitude dissipative permet de rendre compte d'aspects énergétiques sur les opérateurs incertains. La représentation dissipative des incertitudes est une généralisation de nombreuses représentations classiques. Elle offre l'avantage de permettre une grande flexibilité dans la modélisation des systèmes incertains car l'étape de modélisation ne nécessite par d'avoir à effectuer de changements d'échelle ou des changements de repère, [PEA 98], [PEA 00D]. Cette flexibilité a comme désavantage de permettre de nombreuses modélisations équivalentes d'un même système pour lesquelles nous ne sommes pas en mesure actuellement de garantir des résultats similaires en analyse ou en synthèse.

3. Analyse robuste en stabilité et performance des modèles incertains $\mathcal{LFT}$

3.1. *Introduction*

Le choix d'un modèle incertain étant effectué, pour un correcteur donné il est nécessaire de faire l'analyse des propriétés en stabilité et performance robustes de ce modèle. Suivant les résultats de cette dernière, une strategie de correction peut être nécessaire, résultant alors en la synthèse d'un nouveau compensateur. Celui-ci obtenu, une nouvelle étape d'analyse du système bouclé intervient afin d'attester des propriétes réelles du système corrigé. L'étape d'analyse est donc très importante dans le processus de synthèse puisqu'elle va conditionner en partie les choix effectués pour la synthèse mais également sanctionner les résultats de cette étape.
L'analyse est usuellement séparée en deux problèmes présentant des degrés de difficulté différents : l'analyse de stabilité robuste et l'analyse de performance robuste. Autant la définition du premier est univoque et sans ambiguité, autant la notion même de performance robuste recouvre des acceptions fort diverses. Nous nous attachons tout d'abord à définir et préciser les différentes notions que recouvre ce formalisme.

3.2. *Critères de stabilité et performance robustes*

La stabilité robuste

Etant donné un modèle LTI et la représentation de l'incertitude associée, il s'agit de tester la stabilité au sens de Lyapunov du système pour l'ensemble des incertitudes admissibles. Le problème de l'analyse robuste en stabilité vis à vis d'incertitudes structurées sous forme $\mathcal{LFT}$ n'est pas complètement résolu et l'on doit faire face à un compromis inévitable entre la complexité de la méthode et le degré de pessimisme qu'elle implique. Nous proposons donc dans la suite de ce chapitre des solutions de faible complexité améliorant les résultats existants pour des problèmes réputés difficiles.

De façon à écrire sous une même formulation générique la propriètè de stabilité robuste au sens de la théorie de Lyapunov pour les systèmes à temps continu et pour les systèmes à temps discret, nous définissons respectivement pour ces deux cas les matrices :

$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad , \quad R_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Par définition du produit de Kronecker, pour toute matrice $\mathbf{P}$ on a :

$$R_c \otimes \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbb{0} \end{bmatrix} \quad , \quad R_d \otimes \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$$

Déf. 3.1

Un systeme LTI incertain (1) est robustement stable si et seulement s'il existe une matrice symmétrique dépendant des paramètres incertains $\mathbf{P}(\Delta)$ telle que pour toute incertitude $\Delta \in \mathbb{\Delta}$:

$$\mathcal{A}(K,\Delta)\ (R \otimes \mathbf{P}(\Delta))\ \mathcal{A}'(K,\Delta) < \mathbb{0} \quad , \quad \mathbf{P}(\Delta) > \mathbb{0} \qquad [9]$$

où $R = R_c$ dans le cas des systèmes à temps continu, $R = R_d$ pour les systèmes à temps discret et où la matrice $\mathcal{A}(K)$ est définie à la donnée du modèle par :

$$\mathcal{A}(K,\Delta) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & A_o'(K,\Delta) \end{bmatrix}$$

La condition précédente revient à tester la localisation des pôles du système dans le demi-plan complexe gauche ou dans le disque unité. Ce type de test peut être étendu à d'autres sous-régions du plan complexe permettant d'affiner ainsi l'analyse des propriétés dynamiques du système bouclé.

La $\mathbb{D}_R$-Stabilité robuste

Le comportenent dynamique des systèmes (rapidité, amortissement, pulsation des oscillations...) constitue un critère de performance usuel pour les systèmes

LTI sans incertitudes. Il est en partie mesuré par le positionnement des pôles dans le plan complexe. L'extension de ce critère aux systèmes incertains se fait par la localisation des pôles dans des régions $\mathbb{D}$ du plan complexe. On parle alors de $\mathbb{D}$-stabilité robuste. Différents types de régions ont été envisagées dans la littérature, [GUT 81], [CHI 96], [PEA 00A]. Sont considérées dans ce document uniquement les régions $\mathcal{LMI}$ définies comme suit.

Déf. 3.2 *[PEA 00A]*
Soit R une matrice à valeurs complexes partitionnée comme suit :

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^* & R_{22} \end{bmatrix} \quad : \quad \begin{array}{l} R_{11} = R_{11}^* \ \in \mathbb{C}^{d\times d} \\ R_{22} = R_{22}^* \geq \mathbb{0} \ \in \mathbb{C}^{d\times d} \end{array} \qquad [10]$$

La région $\mathbb{D}_R$ se définit comme l'ensemble des complexes σ tels que :

$$\mathbb{D}_R = \{ \ \sigma \in \mathbb{C} \quad : \quad R_{11} + R_{12}\sigma + R_{12}^*\sigma^* + R_{22}\sigma\sigma^* < \mathbb{0} \ \} \qquad [11]$$

Les régions ainsi définies sont exactement identiques aux régions LMI proposées dans [CHI 96]. L'avantage de la définition adoptée ici est qu'elle conduit à des conditions de plus faible complexité numérique,[PEA 00A].

Les régions sont toutes convexes et peuvent être non bornées. Elles sont nécessairement bornées si $R_{22} > \mathbb{0}$. Le scalaire d caractérise la "dimension" de la région. Les régions usuelles telles que le demi-plan et le disque sont des régions de dimension $d = 1$. Les régions plus élaborées telles que l'interieur d'une parabole ou d'une ellipse sont des régions de dimension $d = 2$.

Par extention des résultats de [CHI 96], la $\mathbb{D}_R$-stabilité robuste se formule comme une généralisation des inégalités de Lyapunov pour la stabilité robuste.

Théorème 3.1
Un systeme LTI incertain [1] est robustement $\mathbb{D}_R$-stable si et seulement s'il existe une matrice symmétrique dépendant des paramètres incertains $\mathbf{P}(\Delta)$ telle que pour toute incertitude $\Delta \in \mathbb{\Delta}$:

$$\mathcal{A}(K,\Delta)\ (R \otimes \mathbf{P}(\Delta))\ \mathcal{A}'(K,\Delta) < \mathbb{0} \quad , \quad \mathbf{P}(\Delta) > \mathbb{0} \qquad [12]$$

où la matrice $\mathcal{A}(K)$ est définie à la donnée du modèle par

$$\mathcal{A}(K,\Delta) = \left[\ \mathbb{1} \quad \mathbb{1}_d \otimes A_o'(K,\Delta) \ \right]$$

La $\mathbb{D}_R$-stabilité robuste est clairement une notion permettant d'aborder le problème de robustesse en performance. Un autre moyen consiste à définir le transfert entre les sorties controllées $z_{\mathcal{H}}$ et les entrées de perturbation $w_{\mathcal{H}}$, $T_{z_{\mathcal{H}}w_{\mathcal{H}}}(\sigma, \Delta K)$. Pour un contrôleur donné et pour une classe de vecteurs de perturbations donnés, étudier la taille du vecteur des sorties controllées $z_{\mathcal{H}}$ revient à évaluer le degré de performance de la boucle fermée à partir d'un critère de performance défini comme une norme sur le transfert $T_{z_{\mathcal{H}} w_{\mathcal{H}}}(\sigma, \Delta, K)$. Il est nécessaire de définir une norme sur le vecteur des perturbations exogènes et une norme sur le vecteur des sorties. Cela permet en retour de définir la norme-système associée, (induite ou non). Dans cet article, seul le critère de performance induit de la norme $\mathcal{H}_\infty$ est présenté. Un développement similaire peut être fait dans le cas de la norme $\mathcal{H}_2$.

Coût $\mathcal{H}_\infty$ robuste

On désire analyser le degré de performance robuste $\mathcal{H}_\infty$ du modèle incertain en boucle fermée. Le modèle du système n'étant pas parfaitement connu, une façon raisonnable d'envisager ce problème de performance robuste est de considérer le calcul de la norme $\mathcal{H}_\infty$ dans *le pire des cas*. Cela consiste à déterminer l'élément maximal de l'ensemble des normes $\mathcal{H}_\infty$ sur l'ensemble des modèles possibles. Le calcul exacte de cet élément est dans la majorité des cas irréaliste ou très ardu numériquement. La méthode adoptée consiste à calculer une borne supérieure appelée coût garanti, que l'on souhaite la moins pessimiste possible.

Théorème 3.2 :
L'inégalité $||T_{z_{\mathcal{H}} w_{\mathcal{H}}}(\sigma, \Delta, K)||_\infty^2 \leq \gamma_\infty$ est vérifiée si et seulement s'il existe une matrice symmétrique dépendant des paramètres incertains $\mathbf{P}(\Delta)$ telle que pour toute incertitude $\Delta \in \mathbb{\Delta}$:

$$\mathcal{A}(K,\Delta) \begin{bmatrix} R \otimes \mathbf{P}(\Delta) & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & -\boldsymbol{\gamma}_\infty \mathbb{1} \end{bmatrix} \mathcal{A}'(K,\Delta) < \mathbb{0} \quad , \quad \mathbf{P}(\Delta) > \mathbb{0}$$

avec : $$\mathcal{A}(K,\Delta) = \left[\begin{array}{cc|c|c} \mathbb{1} & A'_o(K,\Delta) & C'_{\mathcal{H}}(K,\Delta) & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & B'_{\mathcal{H}}(K,\Delta) & D'_{\mathcal{H}}(K,\Delta) & \mathbb{1} \end{array} \right]$$

3.3. *Les conditions d'analyse*

Les conditions proposées, que ce soit de stabilité robuste, de $\mathbb{D}_R$-stabilité robuste ou de coût garanti $\mathcal{H}_\infty$ sont exprimées en termes de l'existence de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres à un ensemble infini d'inégalités matricielles linéaires défini sur l'ensemble d'incertitude $\mathbb{\Delta}$. Il est donc indispensable d'une part de préciser la paramétrisation choisie pour la fonction de Lyapunov ainsi que l'approche utilisée afin de rendre le test utilisé numériquement efficace.

Choix de la paramétrisation de $\mathbf{P}(\Delta)$

Deux types de résultats sont présentés :

- Les premiers reposent sur la théorie de la **stabilité quadratique**. L'analyse robuste est menée par la recherche d'une fonction de Lyapunov unique sur l'ensemble des incertitudes admissibles ($\mathbf{P}(\Delta) = \mathbf{P}$). Ces résultats ont comme avantage d'être peu coûteux en temps de calcul mais induisent un fort pessimisme, [PEA 00A].
- Les seconds supposent la recherche d'une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres (**FLDP**). Les fonctions sont quadratiques en l'expression rationnelle de l'incertitude.

$$\mathbf{P}(\Delta) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & C_z'(K)\Delta_c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P_{11}} & \mathbf{P_{12}} \\ \mathbf{P_{12}'} & \mathbf{P_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \Delta_c C_z(K) \end{bmatrix} \qquad [13]$$

  Les résultats donnés à l'aide de FLDP sont necessairement moins pessimistes que ceux issus de la stabilité quadratique et les essais numériques montrent qu'ils sont en général bien meilleurs. Une telle paramétrisation a été utilisée dans la littérature pour des problèmes connexes, [HEL 99].

Utilisation de la séparation quadratique

Une fois choisie la paramétrisation de la fonction de Lyapunov $\mathbf{P}(\Delta)$, se pose le problème de la dérivation de conditions LMI numériquement traitables. Le fait de disposer d'une modélisation incertaine de type $\mathcal{LFT}$ permet de mettre en oeuvre la technique de séparation quadratique, [IWA 97], [IWA 98], [PEA 00B], [PEA 00C], issue du cadre théorique général de la séparation topologique. Nous avons choisi de ne pas détailler outre mesure les aspects techniques liés aux différentes théories utilisées dans ce document. Il est à noter que des résultats similaires ont été donnés dans [SCH 97B], [DET 98]. Toutefois, dans un souci didactique, nous rappellons un résultat de séparation quadratique dans le cas le plus simple. Il s'agit d'écrire une condition de stabilité quadratique du modèle LTI incertain [1]. En adaptant la définition 3.1, on obtient,

Déf. 3.3
Un systeme LTI incertain [1] est quadratiquement stable si et seulement s'il existe une matrice symmétrique $\mathbf{P}$ *telle que pour toute incertitude* $\Delta \in \mathbb{\Delta}$ *:*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & A_o(K,\Delta)' \end{bmatrix} (R \otimes \mathbf{P}) \begin{bmatrix} \mathbb{1} & A_o(K,\Delta)' \end{bmatrix}' < \mathbb{0} \quad , \quad \mathbf{P} > \mathbb{0} \qquad [14]$$

L'application du résultat de séparation quadratique à [14] conduit au résultat.

Théorème 3.3 *:*

Un systeme LTI incertain [1] est quadratiquement stable si et seulement s'il existe une matrice symmétrique $\mathbf{P} > \mathbb{0}$ *et une matrice* $\mathbf{\Theta}$ *appelée* **candidate à**

la séparation quadratique *telles que :*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & A_o(K)' \\ \mathbb{0} & B_w(K)' \end{bmatrix} (R \otimes \mathbf{P}) [\star]' + \begin{bmatrix} C_z(K)' & \mathbb{0} \\ D_{zw}(K)' & \mathbb{1} \end{bmatrix} \mathbf{\Theta} [\star]' < \mathbb{0} \qquad [15]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \Delta' \end{bmatrix} \mathbf{\Theta} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \Delta \end{bmatrix} \geq \mathbb{0} \quad \forall \Delta \in \mathbb{\Delta} \qquad [16]$$

L'inégalité [16] définit un ensemble convexe de séparateurs $\mathbb{\Theta}$ comme l'intersection d'un nombre infini de $\mathcal{LMI}$ et dans lequel est recherché le candidat à la séparation quadratique. Du point de vue numérique, la contrainte $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{\Theta}$ sera généralement remplacée par une contrainte $\mathcal{LMI}$ relaxée $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{\Theta}_{\mathbb{\Delta}}$ où $\mathbb{\Theta}_{\mathbb{\Delta}} \subset \mathbb{\Theta}$. Les différents résultats proposés utilisent un résultat similaire à celui-ci. Tous les résultats d'analyse sont présentés sous une forme $\mathcal{LMI}$ générique telle que :

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}(K)\mathcal{P}(\mathbf{P}, \mathbf{\Theta})\mathcal{A}'(K) < \mathbb{0} \\ \mathbf{P} > \mathbb{0} \end{array} \qquad [17]$$

avec la contrainte d'appartenance

$$\mathbf{\Theta} \in \mathbb{\Theta}_{\mathbb{\Delta}} \qquad [18]$$

où $\mathcal{A}(K)$ regroupe linéairement les matrices définissant le système incertain et $\mathcal{P}(\mathbf{P}, \mathbf{\Theta})$ regroupe linéairement les variables de decision du problème. Il apparait donc deux groupes d'inégalités matricielles linéaires de nature différente. L'un, [17] définit le type de critère à considérer, (analyse de stabilité, $\mathbb{D}_R$-stabilité, performance) alors que le second, [18], caractérise la recherche du séparateur quadratique suivant en fonction de la nature de l'incertitude considérée dans le modèle.

Recherche des candidates à la séparation quadratique

Avant de préciser les notations particulières utilisées dans l'énoncé des conditions $\mathcal{LMI}$ sur les critères d'analyse en stabilité robuste et performance robuste, le théorème qui suit donne la méthode $\mathcal{LMI}$ générale pour la recherche de candidates à la séparation quadratique. Il est important de noter que ce théorème ne décrit pas de façon exacte l'ensemble des candidates à la séparation quadratique. Ce résultat est un compromis pessimiste mais numériquement efficace entre la volonté d'approcher les conditions de stabilité robuste exactes et la nécessité d'associer aux problèmes, des algorithmes de résolution, [IWA 98].

Théorème 3.4 $\boxed{\mathbf{\Theta} \in \mathbb{\Theta}_{\mathbb{\Delta}}}$

S'il existe trois matrices $\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{11}}$, $\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{12}}$ et $\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{22}}$ qui satisfont les $\mathcal{LMI}$ suivantes :

$$\begin{array}{l} \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{11}} = \widehat{\mathbf{\Theta}}'_{\mathbf{11}} \\ \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{22}} = \widehat{\mathbf{\Theta}}'_{\mathbf{22}} \leq \mathbb{0} \end{array} , \ \forall i = 1 \ .. \ N \quad \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \Delta^{[i]'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{11}} & \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{12}} \\ \widehat{\mathbf{\Theta}}'_{\mathbf{12}} & \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \Delta^{[i]} \end{bmatrix} \geq \mathbb{0} \qquad [19]$$

et l matrices $\mathbf{\Lambda}_j$ qui satisfont les contraintes $\mathcal{LMI}$:

$$\forall j = 1 \;..\; l \qquad \mathbf{\Lambda}_j = \mathbf{\Lambda}_j' > \mathbb{0} \quad \in \mathbb{R}^{r_j \times r_j} \qquad [20]$$

alors la matrice $\mathbf{\Theta}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} T_d & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & T_g^{-1} \end{bmatrix}' \mathbf{\Theta} \begin{bmatrix} T_d & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & T_g^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{11}} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{12}} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{\Lambda_1} \otimes H_{11}^{(1)} & & & \mathbb{0} & \mathbf{\Lambda_1} \otimes H_{12}^{(1)} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & & \cdots & \mathbf{\Lambda}_l \otimes H_{11}^{(l)} & \mathbb{0} & & \cdots & \mathbf{\Lambda}_l \otimes H_{12}^{(l)} \\ \hline \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{12}}' & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{22}} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{\Lambda_1} \otimes {H_{12}^{(1)}}' & & & \mathbb{0} & \mathbf{\Lambda_1} \otimes H_{22}^{(1)} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & & \cdots & \mathbf{\Lambda}_l \otimes {H_{12}^{(l)}}' & \mathbb{0} & & \cdots & \mathbf{\Lambda}_l \otimes H_{22}^{(l)} \end{array}\right] \qquad [21]$$

est une candidate à la séparation quadratique vis à vis des incertitudes structurées :

$$T_g \Delta T_d = \begin{bmatrix} \widehat{\Delta} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1}_{r_1} \otimes \Delta_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & & \cdots & \mathbb{1}_{r_l} \otimes \Delta_l \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \widehat{\Delta} \in co.\left\{\Delta^{[1]}, \Delta^{[2]}, \cdots, \Delta^{[N]}\right\} \\ \\ \forall j = 1 \;..\; l \quad \Delta_j \in \mathbb{\Delta}_{H(j)} \end{array} \qquad [22]$$

où T_g et T_d sont des matrices inversibles de changement de base et les notations sur la nature des différents blocs incertains sont celles du chapitre 2.

Remarques 3.1 $\boxed{\mathbf{\Theta} \in \mathbb{\Theta}_{\mathbb{1}_k \otimes \mathbb{\Delta}}}$
Avec peu de modifications, le théorème [3.4] permet également de décrire des candidates à la séparation quadratique vis à vis d'incertitudes structurées répétées k fois ($\mathbb{1}_k \otimes \Delta \;:\; \Delta \in \mathbb{\Delta}$). L'ensemble de ces candidates est noté $\mathbb{\Theta}_{\mathbb{1}_k \otimes \mathbb{\Delta}}$.

Catalogue $\mathcal{LMI}$ pour l'analyse robuste en stabilité et en performance

Les pages qui suivent constituent le catalogue d'inégalités matricielles linéaires pour l'analyse de systèmes incertains de forme $\mathcal{LFT}$ tels que définis dans le chapitre 2. Dans l'ordre se trouvent les inégalités pour la $\mathbb{D}_R$-stabilité robuste et le coût garanti $\mathcal{H}_\infty$. Pour chaque critère de performance sont données, à la suite l'une de l'autre, les $\mathcal{LMI}$ correspondant aux résultats issus du cadre de travail de la stabilité quadratique et ceux utilisant les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres (FLDP) définies précédemment. Pour les problèmes

LMI 3.1 $\mathbb{D}_R$-Stabilité Quadratique

$$\mathcal{A}(K)\left[\begin{array}{c|c} R\otimes\mathbf{P} & \mathbb{0}\\ \hline \mathbb{0} & \mathbf{\Theta}\end{array}\right]\mathcal{A}'(K) < \mathbb{0} \quad : \quad \begin{array}{l}\mathbf{\Theta}\in\mathbb{\Theta}\\ \mathbf{P}>\mathbb{0}\end{array}$$

$$\mathcal{A}(K) = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbb{1} & \mathbb{1}_d\otimes A_o'(K) & \mathbb{1}_d\otimes C_z'(K) & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & \mathbb{1}_d\otimes B_w'(K) & \mathbb{1}_d\otimes D_{zw}'(K) & \mathbb{1}\end{array}\right] \qquad \mathbb{\Theta} = \mathbb{\Theta}_{\mathbb{1}_d\otimes\mathbb{\Delta}}$$

LMI 3.2 $\mathbb{D}_R$-Stabilité par les FLDP

$$\mathcal{A}(K)\left[\begin{array}{cc|c|c} R\otimes\mathbf{P_{11}} & R\otimes\mathbf{P_{12}} & \mathbf{E} & \mathbb{0}\\ R\otimes\mathbf{P_{12}'} & R\otimes\mathbf{P_{22}} & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{E}'} & \mathbb{0} & \mathbb{0}\\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbb{0}} & \mathbb{0} & \mathbf{\Theta}\end{array}\right]\mathcal{A}'(K) < \mathbb{0} \quad : \quad \begin{array}{l}\mathbf{\Theta}\in\mathbb{\Theta}\\ \mathbf{P}_{11}>\mathbb{0}\end{array}$$

$$\mathcal{A}(K) = \left[\begin{array}{c|c|cccc} & \mathbb{1}_d\otimes A_o'(K) & \mathbb{1}_d\otimes C_z'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0}\\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1}_d\otimes C_z'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0}\\ & \mathbb{1}_d\otimes B_w'(K) & \mathbb{1}_d\otimes D_{zw}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0}\\ & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1}_d\otimes D_{zw}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{1}\end{array}\right] \qquad \mathbb{\Theta} = \mathbb{\Theta}_{\mathbb{1}_{2d}\otimes\mathbb{\Delta}}$$

LMI 3.3 Coût $\mathcal{H}_\infty$ par la Stabilité Quadratique

$$\mathcal{A}(K)\left[\begin{array}{c|c|c|c} R\otimes\mathbf{P} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0}\\ \hline \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0}\\ \hline \mathbb{0} & \mathbb{0} & -\boldsymbol{\gamma}\,\mathbb{1} & \mathbb{0}\\ \hline \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbf{\Theta}\end{array}\right]\mathcal{A}'(K) < \mathbb{0} \quad : \quad \begin{array}{l}\mathbf{\Theta}\in\mathbb{\Theta}\\ \mathbf{P}>\mathbb{0}\end{array}$$

$$\mathcal{A}(K) = \left[\begin{array}{cc|c|c|cccc} \mathbb{1} & A_o'(K) & C_{\mathcal{H}}'(K) & \mathbb{0} & C_z'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & B_{\mathcal{H}}'(K) & D_{\mathcal{H}}'(K) & \mathbb{1} & \mathbb{0} & D_{z\mathcal{H}}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & B_w'(K) & D_{\mathcal{H}w}'(K) & \mathbb{0} & D_{zw}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & B_w'(K) & D_{\mathcal{H}w}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & D_{zw}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{1}\end{array}\right] \qquad \mathbb{\Theta} = \mathbb{\Theta}_{\mathbb{1}_2\otimes\mathbb{\Delta}}$$

de coût garanti, des cas particuliers tels que l'une des deux matrices $D_{z\mathcal{H}}(K)$ ou $D_{\mathcal{H}w}(K)$ est nulle, sont traités séparément du cas général. Ces cas particuliers ont pour intérêt de réduire le nombre de variables sans pessimisme.

LMI 3.4 Coût $\mathcal{H}_\infty$ par la Stabilité Quadratique (Cas Particuliers)

$$\mathcal{A}(K)\left[\begin{array}{c|c|c|c} R\otimes\mathbf{P} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \hline \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \hline \mathbb{0} & \mathbb{0} & -\boldsymbol{\gamma}\,\mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \hline \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbf{\Theta} \end{array}\right]\mathcal{A}'(K) < \mathbb{0} \quad : \quad \begin{array}{l} \mathbf{\Theta}\in\Theta \\ \mathbf{P} > \mathbb{0} \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(K) = \left[\begin{array}{cc|c|c|cc} \mathbb{1} & A_o'(K) & C_{\mathcal{H}}'(K) & \mathbb{0} & C_z'(K) & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & B_{\mathcal{H}}'(K) & D_{\mathcal{H}}'(K) & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & B_w'(K) & D_{\mathcal{H}w}'(K) & \mathbb{0} & D_{zw}'(K) & \mathbb{1} \end{array}\right] \quad \Theta = \Theta_{\mathbb{A}}}$$

LMI 3.5 Coût $\mathcal{H}_\infty$ par les FLDP

$$\mathcal{A}(K)\left[\begin{array}{cccc|c|c|c} -\boldsymbol{\gamma}\,\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & & & \\ \mathbb{0} & R\otimes\mathbf{P_{11}} & \mathbb{0} & R\otimes\mathbf{P_{12}} & \mathbf{E} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & & & \\ \mathbb{0} & R\otimes\mathbf{P}_{\mathbf{12}}' & \mathbb{0} & R\otimes\mathbf{P_{22}} & & & \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{\mathbf{E}'} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{\mathbb{0}} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{\mathbb{0}} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbf{\Theta} \end{array}\right]\mathcal{A}'(K) < \mathbb{0} \quad : \quad \begin{array}{l} \mathbf{\Theta}\in\Theta \\ \mathbf{P_{11}} > \mathbb{0} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{A}(K) = \\ \left[\begin{array}{c|c|c|cccccc} & B_{\mathcal{H}}'(K) & D_{\mathcal{H}}'(K) & D_{z\mathcal{H}}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ & A_o'(K) & C_{\mathcal{H}}'(K) & \mathbb{0} & C_z'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & C_z'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ & B_w'(K) & D_{\mathcal{H}w}'(K) & D_{zw}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ & B_w'(K) & D_{\mathcal{H}w}'(K) & \mathbb{0} & D_{zw}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & D_{zw}'(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{array}\right] \end{array} \quad \Theta = \Theta_{\mathbb{1}_3\otimes\mathbb{A}}}$$

LMI 3.6 Coût $\mathcal{H}_\infty$ par les FLDP (Cas Particuliers)

$$
\mathcal{A}(K)\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}
-\boldsymbol{\gamma}\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & & & \\
\mathbb{0} & R\otimes\mathbf{P_{11}} & R\otimes\mathbf{P_{12}} & \mathbf{E} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\
\mathbb{0} & R\otimes\mathbf{P}'_{\mathbf{12}} & R\otimes\mathbf{P_{22}} & & & \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{\mathbf{E}'} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{\mathbb{0}} & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{\mathbb{0}} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \boldsymbol{\Theta}
\end{array}\right]\mathcal{A}'(K) < \mathbb{0} \quad : \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{\Theta}\in\mathbb{\Theta} \\ \mathbf{P_{11}} > \mathbb{0} \end{array}
$$

$$
\mathcal{A}(K) = \left[\begin{array}{c|c|c|cccc}
 & B'_{\mathcal{H}}(K) & D'_{\mathcal{H}}(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\
 & A'_o(K) & C'_{\mathcal{H}}(K) & C'_z(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\
\mathbb{1} & -\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & C'_z(K) & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\
 & B'_w(K) & D'_{\mathcal{H}w}(K) & D'_{zw}(K) & \mathbb{0} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\
 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & D'_{zw}(K) & \mathbb{0} & \mathbb{1}
\end{array}\right] \qquad \mathbb{\Theta} = \mathbb{\Theta}_{\mathbb{1}_2\otimes\mathbb{\Delta}}
$$

4. Synthèse robuste par séparation et stabilisabilité quadratique

Autant la technique de séparation quadratique que l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres se prètent à la problématique de l'analyse. Il en va différemment en ce qui concerne les problèmes de synthèse qui dans la majorité des cas impliquent la résolution d'inéquations matricielles bilinéaires, ($\mathcal{BMI}$). Afin de ne pas alourdir cet article, seul le problème de stabilisation quadratique par retour de sortie dynamique d'ordre plein est ici abordé pour les modl̀es LTI en temps continu. Nous considérons donc le modèle LTI incertain suivant :

$$
\left\{\begin{array}{l}
\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_w w(t) + B_o u(t) \\
z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zo} u(t) \quad w(t) = \Delta z(t) \\
y(t) = C_o x(t) + D_{ow} w(t)
\end{array}\right. \qquad [23]
$$

Le problème de synthèse est alors de déterminer un compensateur d'ordre plein donné par ses équations d'état :

$$
(K) \quad : \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_K(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right] \begin{pmatrix} x_K(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad [24]
$$

où $x_K \in \mathbb{R}^n$. Le système bouclé par un tel correcteur est défini par les matrices en boucle fermée :

$$
\begin{array}{llll}
A_o(K,\Delta) & = \begin{bmatrix} A_o + B_o D_K C_o & B_o C_K \\ B_K C_o & A_K \end{bmatrix} & B_w(K) & = \begin{bmatrix} B_w + B_o D_K D_{ow} \\ B_K D_{ow} \end{bmatrix} \\
C_z(K) & = \begin{bmatrix} C_z + D_{zo} D_K C_o & D_{zo} C_K \end{bmatrix} & D_{zw}(K) & = D_{zw} + D_{zo} D_K D_{ow}
\end{array}
$$

[25]

L'idée est alors de réécrire les conditions d'analyse en $\mathbb{D}_R$-stabilité quadratique pour la stabilité des systèmes en temps continu données par la LMI 3.1 en définissant la fonction de Lyapunov pour le système bouclé par :

$$\mathbf{P}_{cl} = \begin{bmatrix} Y & Y_2 \\ Y_2' & * \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2' & * \end{bmatrix} \tag{26}$$

Ces conditions sont conjointement bilinéaires en les variables définissant le correcteur et en les variables définissant la fonction de Lyapunov et son inverse. Il est usuel dans ce cas d'utiliser le changement de variables linéarisant défini dans [SCH 97A].

Théorème 4.1 *: [ARZ99]*
S'il existe $\mathbf{X} = \mathbf{X}' > \mathbb{0}$ *et* $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' > \mathbb{0}$, $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $\mathbf{\Theta} \in \Theta_{\mathbb{A}}$ *et* $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$ *telles que :*

$$\mathbf{V} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S} & \mathbf{W} \\ \hline \mathbf{W}' & \mathbf{Z} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{\Theta}_{11}^{-1} & \mathbf{\Theta}_{11}^{-1}\mathbf{\Theta}_{12} \\ \hline \mathbf{\Theta}_{12}'\mathbf{\Theta}_{11}^{-1} & \mathbf{\Theta}_{12}'\mathbf{\Theta}_{11}^{-1}\mathbf{\Theta}_{12} - \mathbf{\Theta}_{22} \end{array}\right] \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} sym(A_o\mathbf{X} + B_o\tilde{\mathbf{C}}) & \star & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{A}} + A_o' + D_{ow}'\tilde{\mathbf{D}}'B_o' & sym(A_o'\mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{B}}C_o) & \star & \star \\ B_w' + C_o'\tilde{\mathbf{D}}'B_o' & B_o'\mathbf{Y} + D_{ow}'\tilde{\mathbf{B}}' & -\mathbf{Z} & * \\ C_z\mathbf{X} + D_{zo}\tilde{\mathbf{C}} & C_z + D_{zo}\tilde{\mathbf{D}}C_o & D_{zw} + D_{zo}\tilde{\mathbf{D}}D_{ow} - \mathbf{W} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} < \mathbb{0} \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > \mathbb{0} \tag{29}$$

alors [23] est quadratiquement satbilisable par retour de sortie (K)*. De plus :*

$$\mathbb{1} - \mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2' > \mathbb{0} \tag{30}$$

et un contrôleur stabilisant quadratiquement le système est donné par :

$$\begin{cases} D_K = \tilde{\mathbf{D}} \\ C_K = (\tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{D}}C_o\mathbf{X})\mathbf{X}_2'^{-1} \\ B_K = \mathbf{Y}_2^{-1}(\tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{Y}B_o\tilde{\mathbf{D}}) \\ A_K = \mathbf{Y}_2^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}C_o\mathbf{X} - \mathbf{Y}B_o\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{Y}(A_o - B_o\tilde{\mathbf{D}}C_o)\mathbf{X})\mathbf{X}_2'^{-1} \end{cases} \tag{31}$$

Ce résultat établit une condition suffisante de stabilisabilité quadratique en termes de l'existence de solutions à des $\mathcal{LMI}$, [28], [29] vérifiant la contrainte algébrique nonlinéaire [27]. Nous retrouvons une formulation fréquemment rencontrée en synthèse robuste vis à vis de modèles d'incertitude structurés, [APK 00]. Cette formulation possède l'avantage d'être équivalente à la formulation suivante qui correspond à la résolution d'un problème de minimisation concave.

Théorème 4.2 *: [ARZ99]*
S'il existe des solutions optimales $\mathbf{X} = \mathbf{X}' > \mathbb{0}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' > \mathbb{0}$, $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $\mathbf{\Theta}^* \in \Theta_{\mathbb{A}}$ *et* $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{W} \\ \mathbf{W}' & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$ *au problème de minimisation concave :*

$$\min \quad trace(\mathbf{\Theta}_{11} - \mathbf{S}^{-1}) + trace(\mathbf{\Theta}_{22} + \mathbf{Z} - \mathbf{W}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W})$$

[28]

[30]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Theta}_{11} & \mathbf{\Theta}_{12} & \mathbb{1} \\ \mathbf{\Theta}'_{12} & \mathbf{\Theta}_{22} + \mathbf{Z} & \mathbf{W}' \\ \mathbb{1} & \mathbf{W} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \geq \mathbb{0}$$

satisfaisant de plus :

$$trace(\mathbf{\Theta}_{11} - \mathbf{S}^{-1}) + trace(\mathbf{\Theta}_{22} + \mathbf{Z} - \mathbf{W}^{'}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{W}) = 0 \qquad [32]$$

alors [23] est stabilisable quadratiquement par le retour de sortie (K). *De plus, un contrôleur quadratiquement stabilisant est donné par [31] calculé à l'optimum.*

La résolution du problème de synthèse robuste initial est ainsi ramenée à la résolution d'un problème de minimisation concave multi-extrema dont les propriétés intrinsèques permettent d'utiliser des méthodes numériques de résolution du type directions admissibles. Ainsi, les méthodes du gradient contraint, (dite aussi de Franck et Wolfe), [APK 00], ou les méthodes utilisant la complémentarité conique, [ELG 97], peuvent alors être mises en oeuvre. Il est à noter que ces algorithmes ne fournissent que des solutions locales.

Références

[APK 00] P. Apkarian, H.D. Tuan, "Robust control via concave minimization local and global algorithms", *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 45, No. 2, pp. 299-305, Février 2000.

[ARZ99] D.Arzelier, D. Peaucelle, "Robust synthesis via quadratic separation and quadratic stabilizability", *rapport technique LAAS-CNRS No. 99098*, Septembre 1999.

[ARZ 00a] D.Arzelier, D. Peaucelle, "Robust multi-objective output-feedback control for real parametric uncertainties via parameter-dependent Lyapunov functions", *Proceedings of the 3rd Symposium on Robust Control Design, ROCOND 2000*, Prague, Juin 2000.

[ARZ 0ba] D.Arzelier, D. Henrion, D. Peaucelle, “Robust $\mathcal{D}$ stabilization of a polytope of matrices”, *rapport technique LAAS -CNRS No. 2000295*, soumis à Systems and Control Letters, Juin 2000.

[BER 89] J. Bernussou, P.L.D. Peres, J.C. Geromel, "A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 13, pp.65-72, 1989.

[CHI 96] M. Chilali, P. Gahinet, "$\mathcal{H}_\infty$ Design with pole placement constraints : an $\mathcal{LMI}$ approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-41, No. 3, pp. 358-367, 1996.

[DET 98] M. Dettori, C.W. Scherer, "Robust stability analysis for parameter-dependent systems using full block S-procedure", *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, Décembre 1998.

[ELG 97] L. El Ghaoui, F. Oustry, M. Ait Rami, "A cone complementarity linearisation algorithm for static outpu-feedback and related problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-42, No. 8, 1997.

[FER 96] E. Feron, P. Apkarian, P. Gahinet, "Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-41, No. 7, pp. 1041-1046, 1996.

[GAH 96] P. Gahinet, P. Apkarian, M. Chilali, "Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-41, No. 3, pp. 436-442, 1996.

[GUT 81] S. Gutman, E.I. Jury, "A general theory for matrix root clustering in subregion of the complex plane", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, pp. 853-863, 1981.

[HEL 99] A. Helmersson, "Parameter dependent Lyapunov functions based on linear fractional transformation", *Proceedings of the 14th World IFAC Congress*, Beijing, P.R. China, Juillet 1999.

[IWA 97] T. Iwasaki, "Robust stability analysis with quadratic separator : parametric time-varing uncertainty case", *Proceedings of the 36rd Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, Décembre 1997.

[IWA 98] T. Iwasaki, S. Hara, "Well-posedness of feedback systems : insights into exact robustness analysis and approximate computations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 5, pp. 619-630, 1998.

[OLI 99] M.C. Oliveira, J.C. Geromel, J. Bernussou, “An $\mathcal{LMI}$ optimization approach to multiobjective and robust $\mathcal{H}_\infty$ controller design for discrete-time systems”, *Proceedings of the Control and Decision Conference*, Phoenix, Ar., USA, Décembre 1999.

[PAC 90] A. Packard, J. Doyle, “Quadratic stability with real and complex perturbations”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-35, No. 2, Février 1990.

[PAC 93] A. Packard, J.C. Doyle, "The complex structured singular value", *Automatica*, Vol. 29, no. 1, pp. 71-109, 1993.

[PEA 98] D. Peaucelle, D. Arzelier, "Robust Disk Pole Assignment by state and dynamic output feedback for Generalised Uncertainty Models - An $\mathcal{LMI}$ Approach", *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, Tampa, Fl., Décembre 1998.

[PEA 00A] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, J. Bernussou, "A new robust $\mathcal{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty", *Systems and Control Letters*, vol. 40, pp.21-30, Mai 2000.

[PEA 00B] D. Peaucelle, D. Arzelier, "New $\mathcal{LMI}$-based conditions for robust $\mathcal{H}_2$ performance analysis", *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, Chicago, Il., USA, juin 2000.

[PEA 00C] D. Peaucelle, D. Arzelier, "Robust performance analysis with $\mathcal{LMI}$ based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions", *rapport technique LAAS-CNRS No. 99231*, à paraitre dans IEEE Transactions on Automatic Control, 2001.

[PEA 00D] D. Peaucelle, *Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres*, Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 04 Juillet 2000.

[SCH 97A] C. Scherer, P. Gahinet, M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via $\mathcal{LMI}$ optimisation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 7, pp. 896-911, 1997.

[SCH 97B] C. Scherer, "A full block S-procedure with applications", *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, San Diego, CA. , Décembre 1997.

[ZHO 96] K.Zhou, J.C. Doyle, K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.