Méthodes LMI de stabilisation des systèmes linéaires périodiques

Christophe Farges *Dimitri Peaucelle* *Denis Arzelier*

LAAS - CNRS
7, Avenue du Colonel Roche - 31077 Toulouse cedex 4 - France
farges@laas.fr, peaucelle@laas.fr, arzelier@laas.fr

RESUME

Le problème de stabilisation par retour d'état des systèmes linéaires discrets périodiques est étudié dans cet article. Le cadre de travail choisi est celui de la théorie de Lyapunov et repose sur le formalisme des Inégalités Matricielles Linéaires ($\mathcal{LMI}$). Des conditions nécessaires et suffisantes pour la synthèse de correcteurs périodiques ainsi que des conditions suffisantes pour la synthèse de correcteurs non périodiques sont données. En particulier, un énoncé pour le cas non périodique, basé sur l'introduction de variables additionnelles, permet de s'affranchir du choix d'une matrice de Lyapunov unique et conduit ainsi à une condition de stabilisation moins pessimiste.

MOTS CLES : Systèmes Linéaires Périodiques à temps discret, Stabilisation par retour d'état, Lemme de Lyapunov Périodique, Inégalités Matricielles Linéaires

ABSTRACT

This paper adresses the problem of state feedback stabilisation for linear discrete-time periodic systems. The adopted framework is based on the Lyapunov theory and uses the Linear Matrix Inequalities ($\mathcal{LMI}$) formalism. Necessary and sufficient conditions for periodic controller synthesis are reminded. The focus of this article is on the design of non periodic state-feedback control. In that case, a formulation based on the introduction of additionnal variables allows to avoid choosing a single Lyapunov function and leads to a less conservative condition.

KEYWORDS : Linear Discrete-Time Periodic Systems,
State Feedback Stabilisation, Periodic Lyapunov Lemma, Linear Matrix Inequalities

1 INTRODUCTION

Cet article concerne une classe particulière de systèmes : les systèmes linéaires périodiques. Il s'agit de systèmes Linéaires Variant dans le Temps (*LTV*) dont le comportement dynamique est périodique.

De tels systèmes apparaissent par exemple dans les domaines de l'aéronautique et de l'espace. Dans [7], le modèle dynamique des pales du rotor d'un hélicoptère est périodique. Dans [11], Schubert propose un modèle linéarisé des positions relatives de deux satellites en orbite elliptique autour de la Terre. Ce modèle est périodique et de période égale à la durée de révolution du satellite. [1] fournit d'autres exemples dans le domaine de l'aérospatial et dans d'autres domaines comme la commande par calculateur de procédés industriels ou les systèmes de communication.

Même si les exemples que nous venons de citer, comme tous les systèmes physiques, sont de nature continue, il est important de noter que la théorie de la commande associée aux modèles périodiques discrets est actuellement plus aboutie que celle développée dans le cadre continu. Le lecteur intéressé pourra consulter [3] concernant les avancées théoriques récentes sur ces derniers. Nous nous intéressons donc ici au cas des systèmes à temps discret qu'il est toujours possible d'obtenir par échantillonnage. Il ne faut pourtant pas perdre de vue qu'un système ainsi discrétisé ne constitue qu'une approximation du modèle à temps continu dont il est issu. Cependant si l'échantillonnage est suffisamment fin, le modèle discret constituera une bonne approximation du modèle continu. Remarquons enfin que, la commande étant généralement réalisée par calculateur, un échantillonnage sera toujours nécessaire. Le choix de travailler en temps discret ne complexifie donc pas la mise en oeuvre physique du correcteur.

Le problème envisagé dans cet article est la synthèse d'un correcteur stabilisant. Il s'agit de trouver un correcteur tel que le système en boucle fermée soit stable. La structure de commande adoptée est le retour d'état.

Dans le cas de l'hélicoptère [7] tout comme dans le cas du satellite [11], le problème est traité à l'aide d'une reformulation LTI connue sous le nom de *lifted reformulation* qui décrit l'évolution de l'état d'une période à la suivante. Il s'agit de construire une représentation d'état augmentée *LTI* (Linéaire Invariant dans le Temps) qui conserve certaines propriétés du système original, en particulier la stabilité. Cette approche, la plus courante pour traiter ce type de problème, a été proposée par [6]. De par sa construction une telle reformulation introduit certains désavantages : la commande n'est *réactualisée* qu'à chaque période et le choix de l'instant de début de période a une influence sur le résultat. La *lifted reformulation* n'est pas la seule reformulation LTI d'un système périodique. L'article de Bittanti [1] répertorie et détaille l'ensemble de ces représentations.

Pour s'affranchir des désavantages de la *lifted reformulation*, nous n'utiliserons pas cette réécriture du problème mais nous travaillerons directement sur le système discret périodique.

Nous nous plaçons dans le cadre d'une approche de type Lyapunov qui repose naturellement sur le formalisme
$\mathcal{LMI}$, [5]. Dans ce cadre, l'analyse de stabilité passe par la recherche de matrices de Lyapunov vérifiant le lemme de Lyapunov périodique [2]. Ce problème est purement $\mathcal{LMI}$ pour l'analyse et il est admis que lorsque un problème est formulé de manière $\mathcal{LMI}$, celui-ci est résolu, mises à part d'éventuelles difficultés numériques.

Deux types de lois de commande sont envisagés dans cet article: le retour d'état périodique et le retour d'état non-périodique.

Dans le cas du retour d'état périodique, De Souza et Trofino [5] proposent un changement de variables permettant de formuler le problème de synthèse de manière $\mathcal{LMI}$ sans conservatisme.

Il peut être également intéressant de considérer le cas d'un retour d'état non-périodique. Celui-ci présente l'avantage d'utiliser un correcteur unique, ne variant pas au cours du temps, simplifiant ainsi sa mise en oeuvre. En utilisant le résultat de [5], nous proposerons une première approche de ce problème qui se révèlera restrictive. Nous proposerons ensuite deux autres méthodes, inspirées des articles [10], [8], [4] traitant des systèmes *LTI* incertains, basées sur l'introduction de variables additionnelles permettant d'obtenir des formulations moins pessimistes. Ceci constitue la contribution principale de cet article.

Ces méthodes sont appliquées sur différents exemples académiques afin de discuter de leur efficacité.

2 NOTATIONS

Les notations suivantes sont utilisées :

- A' est la transposée de A

- $\mathbb{0}$ et $\mathbb{1}$ sont respectivement les matrices zéro et identité dont la taille est indiquée par le contexte
- $A > \mathbb{0}$ signifie que A est définie positive
- les variables des problèmes d'optimisation sont notées en gras : $\mathbf{X}$
- dans les matrices partitionnées, $\star$ indique le terme symétrique: $\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \star \\ B' & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix}$
- dans une inégalité, $\bigstar$ indique le terme transposé: $A + A' = A + \bigstar$

3 ANALYSE DE STABILITE

Dans ce paragraphe sont présentées diverses conditions d'analyse de stabilité des systèmes périodiques discrets que nous utiliserons par la suite pour résoudre le problème de synthèse.

Considérons un système linéaire discret N-périodique dont la représentation d'état est la suivante:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \ \begin{cases} A_{k+N} = A_k \\ B_{k+N} = B_k \end{cases} \tag{1}$$

où N désigne la période, $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'éat et $u_k \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande.

Il est démontré qu'un tel système est stable si, et seulement si, les valeurs propres de la matrice monodromique, définie comme la matrice de transition d'état écrite sur une période, $\Phi(k_0+N, k_0) = A_{k_0+N-1} A_{k_0+N-2} \cdots A_{k_0}$, appartiennent au disque unité. Ces valeurs propres, appelées *multiplieurs caractéristiques*, sont indépendantes de k_0. Nous choisissons donc de fixer la valeur de k_0 par la suite: $k_0 = 1$. La suite périodique de matrices $\{A_k\}$ vérifiant cette propriété est dite *p-stable* (periodiquement stable).

Nous nous plaçons dans le cadre d'une approche de type Lyapunov et dans un formalisme $\mathcal{LMI}$. Dans ce cadre, l'analyse de stabilité passe par la recherche de N matrices de Lyapunov périodiques vérifiant le lemme de Lyapunov périodique suivant:

Lemme 1 *[2]*
Le système discret N-périodique (1) est p-stable ssi il existe N matrices $\mathbf{P_k}$ telles que, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:

$$\mathbf{P_k} = \mathbf{P_k'} > \mathbb{0}, \ \mathbf{P_{N+1}} = \mathbf{P_1}, \ A_k' \mathbf{P_{k+1}} A_k - \mathbf{P_k} < \mathbb{0} \tag{2}$$

La $\mathcal{LMI}$ (2) résulte du choix d'une fonction de lyapunov quadratique périodique de type $V(x) = x_k' \mathbf{P_k} x_k$ où $\{\mathbf{P_k}\}$ est une suite de matrices N-périodique: $\mathbf{P_{k+N}} = \mathbf{P_k}$. La force du lemme de Lyapunov est de montrer qu'un tel choix de fonction de Lyapunov conduit à une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

Une version duale du lemme de Lyapunov périodique peut aisément être formulée :

Lemme 2 *Le système (1) est p-stable ssi il existe N matrices X_k telles que, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\mathbf{X_k} = \mathbf{X_k'} > \mathbb{0}, \ \mathbf{X_{N+1}} = \mathbf{X_1}, \ A_k \mathbf{X_k} A_k' - \mathbf{X_{k+1}} < \mathbb{0} \tag{3}$$

Remarque 1 *Cette seconde formulation du lemme de Lyapunov s'obtient en appliquant par deux fois la transformation de Schur [12] à (2).*

L'analyse de la stabilité consiste donc à rechercher N matrices $\mathbf{P_k}$ ou $\mathbf{X_k}$ vérifiant les N $\mathcal{LMI}$ (2) ou (3) respectivement.

Nous proposons à présent différentes conditions d'analyse basées sur l'introduction de variables additionnelles. Cette idée est inspirée des articles [10], [8], [4] traitant des systèmes LTI. L'utilisation de variables additionnelles est vue dans [10] comme une contribution pour permettre l'
analyse robuste de systèmes incertains à l'aide de fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres incertains. Dans le présent article, leur utilisation permet la synthèse de retour d'état préservant la recherche de fonctions de Lyapunov périodiques.

Lemme 3 *Le système discret N-périodique (1) est stable ssi il existe N matrices $\mathbf{X_k}$, N matrices $\mathbf{F_k}$ et N matrices $\mathbf{G_k}$ telles que, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\begin{gathered} \mathbf{X_k} = \mathbf{X_k'} > \mathbb{0},\ \mathbf{X_{N+1}} = \mathbf{X_1}, \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_k \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F_k} & \mathbf{G_k} \end{bmatrix} + \bigstar < \mathbb{0} \end{gathered} \tag{4}$$

Démonstration *La condition (3) de stabilité implique
pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ A_k' \end{bmatrix} < \mathbb{0}$$

Appliquons le lemme d'élimination [12], on obtient pour chaque $k \in \{1 \cdots N\}$ qu'il existe $\mathbf{H_k}$ tel que:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_k \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} \mathbf{H_k'} + \bigstar < \mathbb{0}$$

$\mathbf{H_k}$ *pouvant toujours s'écrire sous la forme*
$\mathbf{H_k'} = \begin{bmatrix} \mathbf{F_k} & \mathbf{G_k} \end{bmatrix}$*, on retrouve (4).*

Par rapport à la condition de stabilité (2), cet énoncé conduit à un problème d'optimisation comprenant des variables additionnelles $\mathbf{F_k}$ et $\mathbf{G_k}$ qui, quoique non strictement nécessaires dans le problème d'analyse, seront mises à profit pour relaxer le problème de synthèse d'un retour d'état constant.

En observant le bloc inférieur droit de (4), on constate que $\mathbf{G_k}$ est inversible. Il est dès lors toujours possible de définir $\mathbf{A_k^{0'}} = -\mathbf{G_k^{-1}}\mathbf{F_k}$. On trouve alors le résultat suivant.

Lemme 4 *Le système discret N-périodique (1) est stable ssi il existe N matrices $\mathbf{X_k}$, N matrices $\mathbf{G_k}$ et N matrices $\mathbf{A_k^0}$ telles que, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\begin{gathered} \mathbf{X_k} = \mathbf{X_k'} > \mathbb{0},\ \mathbf{X_{N+1}} = \mathbf{X_1}, \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_k \\ -\mathbb{1} \end{bmatrix} (-\mathbf{G_k}) \begin{bmatrix} \mathbf{A_k^{0'}} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} + \bigstar < \mathbb{0} \end{gathered} \tag{5}$$

Démonstration *Appliquons le lemme d'élimination [12] sur (5), on obtient, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ A_k' \end{bmatrix} < \mathbb{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{A_k^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbf{A_k^{0'}} \end{bmatrix} < \mathbb{0} \end{array} \right.$$

L'analyse de stabilité passe donc cette fois par la recherche de matrices $\mathbf{X_k}$ et $\mathbf{A_k^0}$ vérifiant (5). Il est intéressant de remarquer que la suite de matrices $\{A_k^0\}$ solutions de (5) présente la particularité d'être p-stable.

Parmi les suites de matrices $\{A_k^0\}$ p-stables, le choix particulier de prendre toutes les matrices A_k^0 nulles, $A_k^0 = \mathbb{0}\ \forall k$, présente l'avantage que la condition (6) obtenue reste une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

Lemme 5 *Le système discret N-périodique (1) est stable* <u>*ssi*</u> *il existe N matrices $\mathbf{X_k}$ et N matrices $\mathbf{G_k}$ telles que, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\begin{gathered} \mathbf{X_k} = \mathbf{X_k'} > \mathbb{0},\ \mathbf{X_{N+1}} = \mathbf{X_1}, \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_k\mathbf{G_k} \\ \mathbf{G_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{0} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} + \bigstar < \mathbb{0} \end{gathered} \tag{6}$$

Démonstration
<u>*Preuve de suffisance:*</u> *Si $\exists\ \mathbf{X_k} > \mathbb{0}, \mathbf{G_k}$ vérifiant (6) alors $\exists \mathbf{X_k} > \mathbb{0}, \mathbf{G_k}, \mathbf{A_k^0}$ vérifiant (5) où $\mathbf{A_k^0} = \mathbb{0}$ est une solution. (5) étant une condition nécessaire et suffisante de stabilité, alors le système est stable.*
<u>*Preuve de nécessité:*</u> *Si le système est stable alors le lemme de Lyapunov (3) est vérifié. Appliquons la transformation de Schur sur (3), on obtient, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & A_k\mathbf{X_k} \\ \star & -\mathbf{X_k} \end{bmatrix} < \mathbb{0}$$

Alors, en posant $\mathbf{G_k} = \mathbf{X_k}$, on peut écrire, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & A_k\mathbf{G_k} \\ \star & \mathbf{X_k} - \mathbf{G_k} - \mathbf{G_k'} \end{bmatrix} < \mathbb{0}$$

4 RESULTATS PRINCIPAUX

Nous présentons dans cette partie différentes méthodes de synthèse issues des conditions d'analyse énoncées dans la section précédente.

Deux types de loi de commandes sont envisagées:
- le retour d'état périodique: $u_k = K_k x_k$
- le retour d'état non-périodique: $u_k = K x_k$

4.1 Retour d'Etat Périodique

Soit le retour d'état périodique:

$$u_k = K_k x_k \tag{7}$$

La représentation d'état du système bouclé est la suivante:

$$x_{k+1} = (A_k + B_k K_k)x_k = A_k^{BF} x_k \tag{8}$$

Il s'agit de trouver une suite périodique de correcteurs $\{K_k\}$ tel que la suite $\{A_k^{BF}\}$ soit p-stable.

Pour résoudre ce problème, [5] a proposé la méthode de synthèse suivante, basée sur la condition de stabilité (2):

Théorème 1 *[5]*
Le système (1) est stabilisable par le retour d'état périodique (7), <u>*ssi*</u> *il existe N matrices $\mathbf{X_k}$ et N matrices $\mathbf{S_k}$*

telles que, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:

$$\begin{array}{c} \mathbf{X_k} = \mathbf{X_k'} > \mathbb{0},\ \mathbf{X_{N+1}} = \mathbf{X_1}, \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{X_k} & (A_k\mathbf{X_k} + B_k\mathbf{S_k})' \\ A_k\mathbf{X_k} + B_k\mathbf{S_k} & -\mathbf{X_{k+1}} \end{bmatrix} < \mathbb{0} \end{array} \tag{9}$$

Une suite $\{K_k\}$ p-stabilisant le système est:

$$K_k = S_k X_k^{-1}\ , \quad \forall\, k \in \{1, \cdots, N\} \tag{10}$$

4.2 Retour d'Etat Non-périodique

Un retour d'état non-périodique s'écrit:

$$u_k = Kx_k \tag{11}$$

La représentation d'état du système bouclé est la suivante:

$$x_{k+1} = (A_k + B_k K)x_k = A_k^{BF} x_k \tag{12}$$

Il s'agit de trouver un correcteur K unique tel que $\{A_k^{BF}\}$ soit p-stable. Une première approche de ce problème consiste à étendre le résultat (9) de [5] au cas du retour non-périodique.

Théorème 2 *Le système (1) est p-stabilisable par le retour d'état non-périodique (11), si il existe une matrice $\mathbf{X}$ et une matrice $\mathbf{S}$ telles que, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}' > \mathbb{0},\ \begin{bmatrix} -\mathbf{X} & (A_k\mathbf{X} + B_k\mathbf{S})' \\ A_k\mathbf{X} + B_k\mathbf{S} & -\mathbf{X} \end{bmatrix} < \mathbb{0} \tag{13}$$

Un retour d'état p-stabilisant non-périodique est alors donné par:

$$K = SX^{-1} \tag{14}$$

Démonstration *Immédiat à partir de (9): il suffit de prendre une matrice $\mathbf{X}$ unique, $\mathbf{X_k} = \mathbf{X}\ \forall\, k$.*

Remarque 2 *Remarquons que le fait de choisir une matrice de Lyapunov $\mathbf{X}$ unique ne conduit qu'à une condition suffisante de p-stabilisabilité.*

Nous allons proposer une méthode qui conduit elle aussi à une condition simplement suffisante, mais moins restrictive que (13).

Cette méthode est basée sur la condition d'analyse (6).

Théorème 3 *Le système discret N-périodique (1) est stabilisable par le retour d'état non-périodique (11), si il existe N matrices $\mathbf{X_k}$, une matrice $\mathbf{G}$ et une matrice $\mathbf{S}$ telles que, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\begin{array}{c} \mathbf{X_k} = \mathbf{X_k'} > \mathbb{0},\ \mathbf{X_{N+1}} = \mathbf{X_1}, \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_k\mathbf{G} - B_k\mathbf{S} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{0} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} + \bigstar < \mathbb{0} \end{array} \tag{15}$$

Un retour d'état p-stabilisant non-périodique est alors donné par:

$$K = SG^{-1} \tag{16}$$

Démonstration *Appliquons la condition d'analyse (6) au système en boucle fermée (8), on obtient, pour tout*

$k \in \{1 \cdots N\}$:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(A_k + B_k\mathbf{K_k})\mathbf{G_k} \\ \mathbf{G_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{0} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} + \bigstar < \mathbb{0}$$

(15) est obtenue en prenant des matrices $\mathbf{G_k}$ et $\mathbf{K_k}$ uniques: $\mathbf{G_k} = \mathbf{G}$ et $\mathbf{K_k} = \mathbf{K}$ puis en posant $\mathbf{S} = \mathbf{KG}$. Ceci peut être fait puisque le bloc inférieur droit de (15) vaut $-\mathbf{G} - \mathbf{G}' + \mathbf{X_k}\ \forall k$. On a donc $\mathbf{G} + \mathbf{G}' > \mathbf{X_k} > \mathbb{0}$. $\mathbf{G}$ est donc inversible.

Remarque 3 *Cette condition est moins restrictive que (13). En effet (13) peut être obtenue à partir de (15) en posant $\mathbf{X_{k+1}} = \mathbf{X_k} = \mathbf{X}$ et $\mathbf{G} = \mathbf{X}$.*

Enfin, en se basant sur (5), il est possible d'obtenir une autre condition suffisante pour la synthèse :

Théorème 4 *Soit une suite N-périodique de matrices $\{A_k^0\}$ p-stable, alors le système discret N-périodique (1) est stabilisable par le retour d'état non-périodique (11), si il existe N matrices $\mathbf{X_k}$, une matrice $\mathbf{G}$ et une matrice $\mathbf{S}$ telles que, pour tout $k \in \{1 \cdots N\}$:*

$$\mathbf{X_k} = \mathbf{X_k'} > \mathbb{0},\ \mathbf{X_{N+1}} = \mathbf{X_1},$$
$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X_{k+1}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbf{X_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_k\mathbf{G} - B_k\mathbf{S} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k^{0'} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} + \bigstar < \mathbb{0} \qquad (17)$$

La valeur du retour d'état est donnée par:

$$K = SG^{-1} \qquad (18)$$

La suite de matrices $\{A_k^0\}$ p-stable apparaissant dans (17) peut être générée au préalable en utilisant (9).
Appliquons le Théorème 4 au système (1). Un correcteur K_k périodique stabilisant est obtenu. Les matrices A_k^0 sont alors issues du bouclage des matrices A_k sur ce correcteur: $A_k^0 = A_k + B_kK_k$.
Les matrices A_k^0 utilisées dans les exemples numériques qui suivent ont été générées en suivant cette procédure.

Remarque 4 *Nous avons montré que la condition de stabilisabilité (15) est moins pessimiste que la condition (13). Par contre il n'est a priori pas possible ici de conclure si (17) est moins pessimiste que (15) ou même que (13).*

5 EXEMPLES NUMERIQUES

Dans cette partie les différentes méthodes de synthèse que nous avons présentées sont appliquées à des exemples générés de manière aléatoire.

Ces méthodes étant énoncées sous forme purement $\mathcal{LMI}$, une solution peut être calculée grâce aux outils de programmation SDP. Parmi les différents solveurs nous avons retenu SeDuMi [13] dont l'inferfaçage avec Matlab a été assuré par *YALMIP* [9].

Dans un premier temps un exemple est détaillé puis une étude statistique de l'efficacité de chaque méthode est menée sur un lot de 100 exemples.

5.1 Un Exemple Aléatoire

Soit un système d'ordre $n = 3$ à une entrée de période $N = 3$ décrit dans l'espace d'état par les matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.180 & 0.370 & 0 \\ 0 & 0 & 0.520 \\ 0.810 & 0.990 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.440 & 0 & 0.930 \\ 0 & 0.990 & 0.380 \\ 0 & 0.720 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.480 & 0 & 0 \\ 0 & 0.360 & 0.760 \\ 1.130 & 0.010 & 0.980 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.760 \\ 0.160 \\ 0.550 \end{bmatrix}$$
$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.780 \\ 0.030 \\ 0.860 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.690 \\ 0.980 \\ 0.070 \end{bmatrix}$$

Les modules des multiplieurs caractéristiques $\tilde{\lambda}_i$ de ce système sont:

$$|\tilde{\lambda}_1| = 1.2192$$
$$|\tilde{\lambda}_2| = 0.0033$$
$$|\tilde{\lambda}_3| = 0.3154$$

Un multiplieur caractéristique est de module plus grand que 1, le système est donc instable.

<u>Méthode basée sur le Théorème 1 :</u>

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.7268 & -1.0026 & -0.0802 \end{bmatrix}$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.2717 & -0.4449 & -0.5786 \end{bmatrix}$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.2423 & -0.2395 & -0.5050 \end{bmatrix}$$

Les modules des multiplieurs caractéristiques du système bouclé sont: $|\tilde{\lambda}_i| = \begin{cases} 0.0324 \\ 0.0033 \\ 0.0000 \end{cases}$

<u>Méthode basée sur le Théorème 2 :</u>

Cette méthode ne permet pas de calculer un correcteur non-périodique stabilisant.

<u>Méthode basée sur le Théorème 3 :</u>

$$K = \begin{bmatrix} -0.3656 & -0.4691 & -0.4302 \end{bmatrix}$$

Les modules des multiplieurs caractéristiques du système bouclé sont: $|\tilde{\lambda}_i| = \begin{cases} 0.1185 \\ 0.1185 \\ 0.1014 \end{cases}$

<u>Méthode basée sur le Théorème 4 :</u>

$$K = \begin{bmatrix} 0.0669 & -0.4054 & -0.3166 \end{bmatrix}$$

Les modules des multiplieurs caractéristiques du système bouclé sont: $|\tilde{\lambda}_i| = \begin{cases} 0.3421 \\ 0.3421 \\ 0.0219 \end{cases}$

5.2 Etude Statistique

Le tableau suivant présente les pourcentages de succès des différentes méthodes de synthèse d'un correcteur non périodique stabilisant, pour des systèmes d'ordre 3 ($n = 3$) comportant 2 entrées ($m = 2$), en fonction de la période N.

Les méthodes, numérotées de 2 à 4, correspondent aux théorèmes 2 à 4 respectivement.

	$N = 3$	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$
Méthode 2	85%	37%	1%	0%
Méthode 3	100%	98%	98%	5%
Méthode 4	94%	88%	67%	0%

Pour le cas de la synthèse d'un correcteur non périodique, la méthode avec introduction de variables additionnelles (Méthode 3) est effectivement moins restrictive que la méthode utilisant une matrice de Lyapunov unique (Méthode 2). De plus cette méthode est la mieux adaptée aux systèmes dont la période N est grande. Ceci est d'autant plus intéressant que lorsque le système discret est issu d'un échantillonnage, cette méthode devrait permettre d'utiliser un échantillonnage plus fin.

Des résultats similaires sont obtenus en faisant varier la dimension de l'état n, à savoir que la méthode 3 est plus adaptée à des systèmes de grande dimension que la méthode 4.

D'autre part, la remarque 4 sur l'impossibilité de conclure sur la restrictivité de la méthode 4 était bien justifiée. En effet, en pratique, différents cas de figure ont été rencontrés. En particulier, il existe des exemples pour lesquels la méthode 4 permet de calculer un correcteur et pas la méthode 3. Ces exemples sont peu nombreux, mais il est possible qu'une initialisation différente de la suite de matrices $\{A_k^0\}$ permette d'améliorer ces résultats. D'autre part, il existe également des exemples pour lesquels la méthode 2 et la méthode 3 fonctionnent mais pas la méthode 4.

6 CONCLUSION

Cet article étudie la stabilisation par retour d'état pour les systèmes discrets périodiques.

Nous nous sommes plus particulièrement intéréssés à la synthèse de correcteurs non-périodiques pour de tels systèmes car leur mise en oeuvre est plus simple.

Diverses méthodes ont été proposées. Une approche *classique* consiste à choisir une matrice de Lyapunov unique et conduit à une condition simplement suffisante de stabilité. Nous avons proposé une nouvelle méthode basée sur l'introduction de variables additionnelles qui reste simplement suffisante, mais qui s'est révélée moins restrictive. Et les différents exemples aléatoires testés confirment bien ce résultat.

Comme perspectives de ce travail, le cas de la stabilisation par retour de sortie dynamique, périodique et non périodique, est en cours d'étude. Par ailleurs, seul le cas des systèmes certains est abordé ici. Mais l'extension de ces résultats pour la prise en compte d'incertitudes sur le modèle est également envisagée.

Références

[1] S. Bittanti and P. Colaneri. Invariant representations of discrete-time periodic systems. *Automatica*, 36:1777–1793, 2000.

[2] P. Bolzern and P. Colaneri, editors. *The periodic Lyapunov equation*. Journal on Matrix Analysis and Applications. SIAM, 1988.

[3] P. Colaneri. Periodic control systems: theoretical aspects. In *IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, pages 25–36, Yokohama, Japan, 2004.

[4] M.C. De Oliveira, J.C. Geromel, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and its Applications*, 296:27–38, 1999.

[5] C.E. De Souza and A. Trofino. An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems. *Int. J. Control*, 73:696–709, 2000.

[6] D.S. Flamm. A new shift-invariant representation for periodic linear systems. *Systems & Control Letters*, 17:9–14, 1991.

[7] G. Gaiani, M. Lovera, P. Colaneri, and R. Celi. Discrete-time analysis of HHC schemes for helicopter vibration attenuation. In *IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, pages 69–74, Yokohama, Japan, 2004.

[8] J.C. Geromel, M.C. De Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and its Applications*, 285:69–80, 1998.

[9] J. Löfberg. Yalmip: Yet another LMI parser, August 2001. URL: `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php`.

[10] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, 2000.

[11] A. Schubert. Linear optimal periodic position control for elliptical orbits. In *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, Santa Barbara, California, February 2001. Paper AAS 01-237, 2001.

[12] R.E. Skelton, T. Iwazaki, and K. Grigoriadis. *A Unified Algebric Approach to Linear Control Design*. Taylor and Francis series in Systems and Control, 1998.

[13] J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625–653, 1999. URL: `fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html`.