Université Toulouse III - Paul Sabatier
Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Examen

Septembre 2014

Soit le système linéaire décrit par :

$$(1 + 0.1\delta_1)\ddot{y} + \dot{y} + (2 + \delta_2)y = u$$

1. Donner une représentation d'état de ce système.

Les paramètres δ_1 et δ_2 sont incertains et contenus dans les intervalles suivants

$$\delta_1 \in [\,-1\ 1\,]\ ,\quad \delta_2 \in [\,-1\ 1\,]$$

2. Donner une modélisation affine polytopique qui inclut toutes les réalisations possibles de ce système incertain.

3. Donner une modélisation LFT de ce système incertain.

4. Proposer des méthodes pour analyser la stabilité de ce système incertain. Préciser pour chacune quelles sont les hypothèses à faire sur les systèmes, les outils de calcul nécessaires, leur pessimisme relatif.

5. Le système est-il robustement stable ?

Université Toulouse III - Paul Sabatier
Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Examen - Corrigé

Septembre 2014

1. En choisissant comme vecteur d'état $x^T = \begin{pmatrix} y & \dot{y} \end{pmatrix}$ on trouve la représentation d'état suivante

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} u$$

avec $\alpha_1 = \frac{2+\delta_2}{1+0.1\delta_1}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{1+0.1\delta_1}$.

2. Une analyse par intervalle donne

$$\alpha_1 \in \left[\frac{1}{1.1} \, , \, \frac{3}{0.9} \right] \quad , \quad \alpha_2 \in \left[\frac{1}{1.1} \, , \, \frac{1}{0.9} \right]$$

On en déduit que les réalisations du système incertain sont contenues dans le polytope défini par les 4 sommets suivants

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{1.1} & -\frac{1}{1.1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1.1} \end{bmatrix} u \, , \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{0.9} & -\frac{1}{1.1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1.1} \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{1.1} & -\frac{1}{0.9} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{0.9} \end{bmatrix} u \, , \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{0.9} & -\frac{1}{0.9} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{0.9} \end{bmatrix} u$$

3. Si on note $w_1 = \delta_1 z_1$, $z_1 = \ddot{y}$, $w_2 = \delta_2 z_2$ et $z_2 = y$ le système décrit sous la forme suivante

$$\begin{array}{l} \ddot{y} + 0.1 w_1 + \dot{y} + 2y + w_2 = u \\ z_1 = \ddot{y} \\ z_2 = y \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} w_1 = \delta_1 z_1 \\ w_2 = \delta_1 z_2 \end{array}$$

ce qui s'écrit aussi en reprenant $x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & \dot{y} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - 0.1 w_1 - w_2 + u \\ z_1 = \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - 0.1 w_1 - w_2 + u \\ z_2 = x_1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} w_1 = \delta_1 z_1 \\ w_2 = \delta_1 z_2 \end{array}$$

ce qui correspond à la LFT suivante

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & -1 \end{bmatrix} w_\Delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z_\Delta = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_\Delta + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ w_\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} z_\Delta . \end{array}$$

4.1. Tableau de Routh. Le système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont toutes à partie réelle négative ce qui peut être testé en utilisant le tableau de Routh. Dans le cas de système du second ordre cela revient à tester si tous les coefficients du polynôme caractéristique sont de même signe. La stabilité du système est ainsi garantie si

$$1 + 0.1\delta_1 > 0 \ , \quad 1 > 0 \ , \quad 2 + \delta_2 > 0$$

La stabilité est robuste aux incertitudes paramétriques (ne variant pas dans le temps) si ces conditions sont vraies pour toutes les valeurs des incertitudes. Ce test est simple si l'expression des coefficients du tableau de Routh en fonction des incertitudes est linéaire ou quadratique. C'est le cas ici, mais faux en général.

4.2. Théorème de Kharitonov. Le polynôme caractéristique du système s'écrit

$$s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1$$

dont les coefficients sont dans les intervalles définis dans la réponse à la question **2.** D'après le Théorème de Kharitonov le système est stable si les quatre polynômes suivants sont stables

$$\begin{array}{cc} s^2 + \frac{1}{1.1}s + \frac{1}{1.1} \ , & s^2 + \frac{1}{1.1}s + \frac{1}{0.9}, \\ s^2 + \frac{3}{0.9}s + \frac{1}{1.1} \ , & s^2 + \frac{3}{0.9}s + \frac{1}{0.9}. \end{array}$$

Pour tout système, le Théorème de Kharitonov suppose de calculer les racines de quatre polynômes uniquement (ou de vérifier qu'ils sont de partie réelle négative par la méthode du tableau de Routh). Le résultat fait l'hypothèse que les coefficients sont indépendants les uns des autres. C'est une approximation pessimiste si les coefficients sont couplés (comme c'est la cas dans l'exemple). Le résultat ne s'applique que pour des incertitudes paramétriques (ne variant pas dans le temps).

4.3. Stabilité quadratique, conditions LMI. Le système incertain décrit par la représentation polytopique suivante

$$\dot{x} = \left(\sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v A^{[v]} \right) x \ , \quad \sum_{v=1}^{\bar{v}} \zeta_v = 1 \ , \quad \zeta_v \geq 0$$

est stable si le problème LMI suivant a une solution

$$\exists P \succ 0 \ , \quad A^{[v]T} P + P A^{[v]} \prec 0 \ , \quad \forall v = 1 \dots \bar{v}.$$

C'est une condition nécessaire et suffisante dans le cas où les incertitudes varient dans le temps. Si les incertitudes sont paramétriques c'est une condition uniquement suffisante. Le test LMI se résout numériquement à l'aide d'outils de programmation semi-définie. C'est un problème d'optimisation convexe qui se résout en temps polynomial. Dans le cas de l'exemple, comme la représentation polynomiale est une approximation englobante du système incertain, le test LMI est pessimiste.

4.4. Théorème du petit gain. L'incertitude $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$ est de norme inférieure à 1. Ainsi, d'après le théorème du petit gain, le système est stable si la norme H_∞ du système suivant est inférieure à 1 strictement

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & -1 \end{bmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_\Delta. \end{array}$$

Le calcul de bornes supérieures de la norme H_∞ est un problème d'optimisation convexe. On peut le résoudre aussi précisément que souhaité. Si la norme H_∞ est strictement inférieure à 1 la stabilité est prouvée pour toute incertitude Δ qui peut être structurée ou non, variant dans le temps ou non. Ce test est pessimiste dans le cas du système étudié pour lequel Δ est diagonale.

4.5. Valeur singulière structurée. Le calcul de la valeur singulière structurée μ du système ci-dessus permet de tenir compte de la structure de l'incertitude. Ce résultat s'applique pour des incertitudes réelles (incertitudes paramétriques) ou complexes (les incertitudes sont des systèmes LTI de norme H_∞ bornée). Le calcul est pessimiste en général et suppose de faire un quadrillage sur les fréquences.

5. Le système est robustement stable d'après la méthode du tableau de Routh.