Université Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Rattrapage

Juin 2017

Exercice 1

Pour chacune des conditions suivantes dire ce que l'on peut conclure quand elles sont vraies ?

Proposez des preuves de ces résultats.

1.1 Il existe $P > 0$ telle que $A^T P + PA < 0$

1.2 Il existe $P > 0$ telle que $A^T P + PA < -2\alpha P$

1.3 Il existe $P > 0$ telle que pour tout $\delta \in \Delta$ on a $A^T(\delta)P + PA(\delta) < 0$

1.4 Il existe $P > 0$ telle que pour tout $v = 1, 2, \dots \bar{v}$ on a $A^{[v]T} P + PA^{[v]} < 0$

1.5 Pour tout $v = 1, 2, \dots \bar{v}$, il existe $P^{[v]} > 0$ telle que $A^{[v]T} P^{[v]} + P^{[v]} A^{[v]} < 0$

Exercice 2

Soit le système suivant $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \theta & -1-\theta \end{bmatrix} x$.

On s'intéresse à la stabilité de ce système pour les trois hypothèses ci-dessous sur le paramètre θ. Décrivez des méthodes pour répondre à ces questions et concluez quand vous pouvez le faire.

2.1 Le système est-il stable pour $\theta = 0.5$? est-il stable pour $\theta = -0.5$?

2.2 Le système est-il stable pour tout $\theta \in [-0.5 \;\; 0.5]$ constant ?

2.3 Le système est-il stable pour $\theta(t) = 0.5\cos(t)$?

Exercice 3

Soit le système stable suivant $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ dont on donne la norme H_∞ : $\|G\|_\infty = 0.9$.

3.1 Quel résultat vu en cours permet d'analyser la robustesse de la boucle fermée $\Delta \star G$?

Appliquez ce résultat pour caractériser la stabilité robuste de $\Delta \star G$.

3.2 Le système bouclé avec $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1.02 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est-il stable ?

3.3 Le système bouclé avec $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est-il stable ?

Université Paul Sabatier
Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Rattrapage - Corrigé

Juin 2017

Exercice 1

1.1 Cette condition prouve que le point d'équilibre $x = 0$ du système linéaire $\dot{x} = Ax$ est asymptotiquement stable (voir le cours). Pour faire court on dit que le système est stable. Cette simplification de langage n'a de sens que pour les système ayant un seul point d'équilibre.

1.2 Cette condition prouve que les pôles de $\dot{x} = Ax$ sont tous à partie réelle inférieure à α (voir le cours). Pour *alpha* positif la condition prouve que le système $\dot{x} = Ax$ est exponentiellement stable. Les modes du système convergent alors tous avec des constantes de temps inférieures à $1/\alpha$.

1.3 Cette condition prouve que le système $\dot{x} = A(\delta)x$ est robustement stable pour tout $\delta \in \Delta$. Comme la preuve est faite avec une fonction de Lyapunov unique pour toutes les valeurs de δ, la stabilité est garantie même pour la cas d'incertitudes variant dans le temps.

1.4 Cette condition prouve que le système $\dot{x} = A(\delta)x$ est robustement stable vis à vis du polytope $A(\delta) \in co\left\{A^{[1]}, \dots A^{[\bar{v}]}\right\} = \{A(\delta) = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \delta_v A^{[v]} \ : \ \delta_v \geq 0\ ,\ \sum_{v=1}^{\bar{v}} \delta_v = 1\}$. Comme la preuve est faite avec une fonction de Lyapunov unique pour toutes les valeurs de δ, la stabilité est garantie même pour la cas d'incertitudes variant dans le temps.

1.5 Cette condition prouve que chacun des $\bar{v}$ systèmes $\dot{x} = A^{[v]}x$ sont stables.

Exercice 2

2.1 Pour une valeur de θ fixée, il suffit de vérifier que les valeurs propres de la matrice sont à partie réelle négative. Comme il s'agit d'une matrice de dimension 2x2 ceci est vrai dès lors que la trace est négative et le déterminant est positif. Pour $\theta = 0.5$ on trouve une trace de -2.5 et un déterminant de 0.5. Le système est stable. Pour $\theta = -0.5$ on trouve une trace de -1.5 et un déterminant de 1.5. Le système est stable.

2.2 Pour une valeur incertaine constante, if suffit de prouver que pour toutes ces valeurs les valeurs propres de la matrice sont à partie réelle négative. Comme il s'agit d'une matrice de dimension 2x2 ceci est vrai dès lors que la trace est négative et le déterminant est positif. La trace vaut $-2 - \theta$ qui est dans l'intervalle $[-2.5\ \ -1.5]$ quand $\theta \in [-0.5\ 0.5]$. Le determinant vaut $1 + \theta - 2\theta = 1 - \theta$ et est dans l'intervalle $[0.5\ 1.5]$. Le système est donc robustement stable pour tout $\theta \in [-0.5\ 0.5]$ constant.

2.3 Pour étudier la stabilité vis à vis d'un paramètre (connu ou incertain) variant dans le temps on peut cherche une fonction de Lyapunov quadratique qui prouve la stabilité pour toutes les valeurs admissibles du paramètre. Ce qui revient à chercher P définie positive telle que

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \theta & -1-\theta \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \theta & -1-\theta \end{bmatrix} \prec 0$$

pour tout $\theta \in [-0.5\ 0.5]$. Comme cette condition est affine en θ il est nécessaire et suffisant que la tester aux valeurs extrêmes. Il suffit donc de trouver une matrice définie positive P telle que les deux contraintes suivantes soient vraies

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \prec 0$$

On essaye par exemple la matrice identité P. Dans ce cas

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2.5 \\ 2.5 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{trace} = -5 < 0 \\ \text{determinant} = -0.25 < 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1.5 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{trace} = -3 < 0 \\ \text{determinant} = -0.25 < 0 \end{array}$$

Pour ce choix de P les inégalités de Lyapunov ne sont pas satisfaites, on ne peut pas conclure.
Si on essaye maintenant $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ alors on trouve

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7.5 \\ 7.5 & -20 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{trace} = -25 < 0 \\ \text{determinant} = 43.75 > 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0.5 \\ 0.5 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{trace} = -11 < 0 \\ \text{determinant} = 27.75 > 0 \end{array}$$

ce qui prouve la stabilité robuste pour tout $\theta \in [-0.5\ 0.5]$ même s'il est variant dans le temps comme c'est le cas quand $\theta = 0.5\cos(t)$.

Exercice 3

3.1 Le théorème du petit gain formule l'équivalence entre les conditions suivantes :
(i) G est stable et sa norme H_∞ est $\|G\|_\infty < \gamma$
(ii) La boucle fermée $\Delta \star G$ est stable pour toute incertitude LTI causale telle que $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$
On peut donc conclure que la boucle fermée $\Delta \star G$ est stable pour toute incertitude telle que $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{0.9} = 1.1111$

3.2 $\begin{bmatrix} -1.02 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \star G$ est stable car $\left\| \begin{bmatrix} -1.02 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 1.02 \leq 1.1111.$

3.3 Le théorème du petit gain ne permet pas de conclure dans ce cas car

$$\left\| \begin{bmatrix} 1.4 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 1.4 > 1.1111.$$

N'ayant pas d'autre information sur G, on ne peut rien conclure.