Université Toulouse III Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Rattrapage du 26 Juin 2018, 1h00, tous documents autorisés

Soit la LFT suivante

$$(s^{-1}I_2) \star \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \star (\delta I_2) \tag{1}$$

où $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice identité, s est la variable de Laplace et $\delta \in [-\bar{\delta} \quad \bar{\delta}]$ est un paramètre constant incertain réel borné en valeur absolue par $\bar{\delta}$.

1) Pour quelles valeurs de $\bar{\delta}$ cette LFT est-elle bien posée ?

2) Montrer que cette LFT correspond au système dynamique décrit dans l'espace d'état par

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix} x.$$

3) Le système est-il stable pour $\delta = 0$? Est-il stable pour $\delta = \frac{1}{4}$? Est-il stable pour $\delta = \frac{1}{2}$?

4) Proposer un modèle polytopique englobant ce système incertain.

5) Le système est-il robustement stable pour $\bar{\delta} = \frac{1}{4}$?

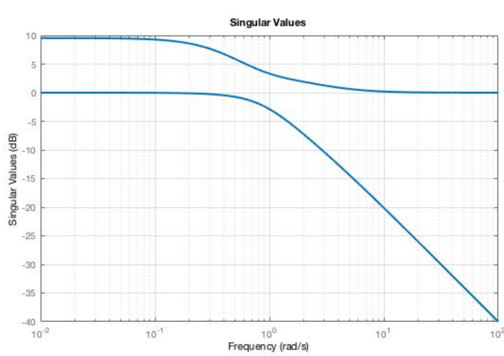
6) Peut-on en conclure que le système est robustement stable dans le cas d'une incertitude variant dans le temps $\delta(t) \in [-\bar{\delta} \quad \bar{\delta}]$? Si ce n'est pas le cas, proposer une méthode qui permettrait de le prouver. On suggère de prendre en considération $P = I_2$.

7) Montrer que la LFT de l'équation (1) se réécrit également $H(s) \star (\delta I_2)$ avec

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+4s+2}{s^2+3s+1} & \frac{1}{s^2+3s+1} \\ \frac{1}{s^2+3s+1} & \frac{s+2}{s^2+3s+1} \end{bmatrix}$$

8) Proposer une méthode pour analyser la stabilité robuste du système décrit par $H(s) \star (\delta I_2)$.

9) Les valeurs singulières de $H(j\omega)$ sont tracées sur la figure ci-dessous. Tenant compte de cette information, proposer et calculer une borne $\bar{\delta}$ sur les incertitudes qui ne déstabilisent pas le système.



Quelques formules qui pourraient être utiles :

valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sont toutes a partie réelle négative $\Leftrightarrow \quad Tr(A) < 0, \quad det(A) > 0$

$$\left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] \star \Delta = M_{11} + M_{12}\Delta(I - \Delta M_{22})^{-1}M_{21}$$

$$\Delta \star \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] = M_{22} + M_{21}\Delta(I - \Delta M_{11})^{-1}M_{12}$$

$$\|G\|_\infty^2 = \max_\omega \overline{\sigma}^2(G(j\omega))$$

$$\overline{\sigma}^2(M) = \text{plus grande valeur propre de } M^T M$$

$$\frac{\delta}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta} - 1$$

$$\text{racines de} \quad \{\delta^2 - 5\delta + 3 = 0\} \quad : \quad 4.3028, \quad 0.6972$$

$$\left[\begin{array}{cc} s+1 & -1 \\ -1 & s+2 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)-1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)-1} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)-1} & \frac{s+1}{(s+1)(s+2)-1} \end{array}\right]$$

$$\text{valeurs propres de} \left[\begin{array}{cc} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{array}\right] : \quad 1, \quad 9$$

Université Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - module Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Examen du 26 Juin 2018 - Corrigé

1) La LFT $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \star \Delta = M_{11} + M_{12}\Delta(I - \Delta M_{22})^{-1}M_{21}$ est bien posée si la matrice $I - \Delta M_{22}$ est inversible. Dans l'exemple on s'intéresse à la matrice $I_2 - \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Elle est inversible si et seulement si $\delta \neq 1$. La LFT est donc bien posée si $\delta \in [-\bar{\delta} \quad \bar{\delta}]$ avec $\bar{\delta} < 1$.

2) En appliquant la formule du cours on trouve

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \star (\delta I_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\delta I_2) \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -2+\frac{\delta}{1-\delta} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix}$$

Le système est donc décrit par la LFT impliquant un double intégrateur $(s^{-1}I_2) \star \begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix}$ dont on a vu en cours que cela correspond à une représentation d'état comme donné dans l'énoncé.

3) Pour $\delta = 0$ on trouve

$$\begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathrm{trace} = -3 < 0 \\ \det = 1 > 0 \end{array}$$

On en déduit que les valeurs propres de cette matrice sont toutes à partie réelles négatives. Le système est stable.

Pour $\delta = \frac{1}{4}$ on trouve

$$\begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathrm{trace} = -3 < 0 \\ \det = 1 > 0 \end{array}$$

On en déduit que les valeurs propres de cette matrice sont toutes à partie réelles négatives. Le système est stable.

Pour $\delta = \frac{1}{2}$ on trouve

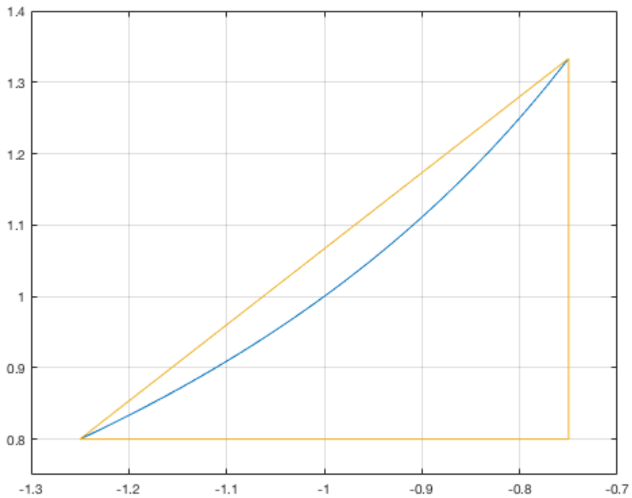
$$\begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathrm{trace} = -\frac{3}{2} < 0 \\ \det = -\frac{1}{2} < 0 \end{array}$$

On en déduit que les valeurs propres de cette matrice ne sont pas toutes à partie réelles négatives. Le système est instable.

3) Une rapide analyse par intervalles donne $-1+\delta \in [-1-\bar{\delta} \quad -1+\bar{\delta}]$ et $\frac{1}{1-\delta} \in [\frac{1}{1+\bar{\delta}} \quad \frac{1}{1-\bar{\delta}}]$, en utilisant le fait que $0 < \bar{\delta} < 1$. Un modèle polytopique possible avec 4 sommets est donc défini par les quatre sommets suivants

$$\begin{bmatrix} -1+\bar{\delta} & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\bar{\delta}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1+\bar{\delta} & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1+\bar{\delta}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1-\bar{\delta} & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\bar{\delta}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1-\bar{\delta} & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1+\bar{\delta}} \end{bmatrix}$$

Un polytope alternatif pout être obtenu en traçant $\frac{1}{1-\delta}$ en fonction de $-1+\delta$.



Cela conduit à proposer le polytope à trois sommets qui sont les suivants

$$\begin{bmatrix} -1+\bar{\delta} & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\bar{\delta}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1+\bar{\delta} & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1+\bar{\delta}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1-\bar{\delta} & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\bar{\delta}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1-\bar{\delta} & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1+\bar{\delta}} \end{bmatrix}$$

5) La trace de la matrice est $-1+\delta-3+\frac{1}{1-\delta} = -4+\delta+\frac{1}{1-\delta} < -4+0.25+\frac{1}{1+0.25} < 0$ quand $\bar{\delta} = 0.25$. Le determinant est $(1-\delta)(3-\frac{1}{1-\delta})-1 = 1-3\delta > 1-0.75 > 0$ quand $\bar{\delta} = 0.25$. La trace est négatif et le déterminant est positif, donc les pôles sont à partie réelle négative. Le système est robustement stable pour $\bar{\delta} = 0.25$ et des incertitudes constantes.

6) La notion de pôle ne s'applique pas si les incertitudes varient dans le temps. Le résultat ci-dessus ne s'applique donc pas. On peut rechercher une fonction deLyapunov quadratique commune à toutes les incertitudes. On prend par exemple la matrice de Lyapunov $P = I$ égale à l'identité. Dans ce cas

$$\begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1+\delta & 1 \\ 1 & -3+\frac{1}{1-\delta} \end{bmatrix}$$

C'est une matrice définie négative comme nous l'avons vu à la question précédente. Le système est donc stable robustement même avec une incertitude variant dans le temps.

7) La matrice de transfert H se calcule comme suit

$$\begin{aligned}
H(s) &= (s^{-1}I_2) \star \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (s^{-1}I_2) \left(I_2 - (s^{-1}I_2) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(sI_2 - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)-1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)-1} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)-1} & \frac{s+1}{(s+1)(s+2)-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+\frac{s+1}{s^2+3s+1} & \frac{1}{s^2+3s+1} \\ \frac{1}{s^2+3s+1} & \frac{s+2}{s^2+3s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2+4s+2}{s^2+3s+1} & \frac{1}{s^2+3s+1} \\ \frac{1}{s^2+3s+1} & \frac{s+2}{s^2+3s+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

8) D'après le théorème du petit gain un système sous la forme $H \star \Delta$ est stable pour tout $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ si et seulement si $\|H\|_\infty < \gamma$. Sachant que $\|\delta I_2\|_\infty = |\delta|$ on déduit que le système est robustement stable si $\|H\|_\infty < 1/\bar{\delta}$. Ce résultat est pessimiste car nous n'avons pas exploité le fait que δI_2 est une matrice structurée. Dans le cours on peut trouver également que pour le cas d'une incertitude scalaire réelle répétée (ce qui est le cas ici), la stabilité robuste est garantie si $\max_{\omega\in\mathbb{R}} \rho_R(H(j\omega)) < 1/\bar{\delta}$, où $\rho_R(H(j\omega))$ est le module de la plus grande valeur propre réelle.

9 La norme $\|H\|_\infty$ est égale au max de la la valeur singulière maximale de $H(j\omega)$ sur toutes les fréquences. D'après le diagramme fourni, cette valeur singulière est maximale aux basses fréquences, c'est à dire pour $\omega = 0$. Ainsi on a

$$\|H\|_\infty = \bar{\sigma}(H(0)) = \bar{\sigma}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \sqrt{\bar{\lambda}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \sqrt{\bar{\lambda}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \sqrt{9} = 3.$$

Le système est robustement stable pour $\bar{\delta} < \frac{1}{3}$.