Université Toulouse III Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Examen du 20 Octobre 2017, 1h00, tous documents autorisés

Exercice 1

Soit le système $\dot{x} = A(\delta)x$ où le paramètre $\delta \in [-1 \;\; 1]$ est incertain et $A(\delta) = \begin{bmatrix} -4 & \delta^2 \\ 4 & -4-2\delta \end{bmatrix}$.

1.1 Proposer un modèle LFT pour ce système incertain.

1.2 Proposer un modèle polytopique pour ce système incertain.

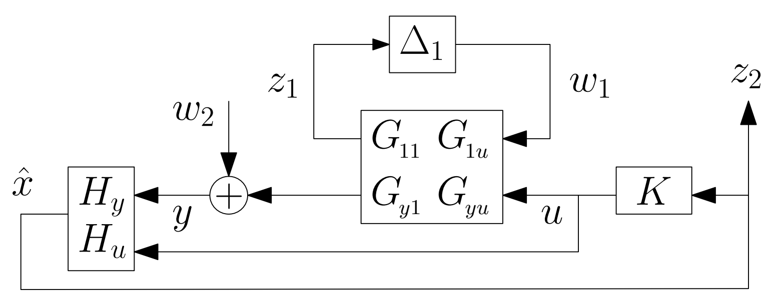
1.3 Le système est-il stable pour $\delta = 1$? Est-il stable pour $\delta = -1$?

1.4 Le système est-il stable pour tout $\delta \in [-1 \;\; 1]$ constant ?

1.5 Peut-on en conclure que le système est stable pour $\delta(t) = \sin(t)$?
Si ce n'est pas le cas, proposer une méthode qui permettrait de le prouver. On suggère de prendre en considération $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercice 2

On considère le système décrit par le schéma bloc ci-dessous



2.1 Donner une interprétation de ce schéma :

- rôle des matrices de transfert $H = \begin{bmatrix} H_y \\ H_u \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{1u} \\ G_{y1} & G_{yu} \end{bmatrix}$, Δ_1 et K ;
- rôles des signaux $\hat{x}$, y, w_2, z_1, w_1, u et z_2.

2.2 On souhaite prouver que la performance H_∞ du système est inférieure à 1 pour tout Δ_1 borné en norme H_∞ par 1 :

$$\|T_{w_2 \to z_2}(\Delta_1)\|_\infty \leq 1 \qquad \forall \; \|\Delta_1\|_\infty \leq 1.$$

Expliquer pourquoi ce problème peut se réécrire comme une problème de stabilité robuste d'une boucle $\Delta \star M$.

2.3 Donner la formule de la matrice de transfert M de cette boucle en fonction de H_u, H_y, G_{11}, G_{1u}, G_{y1}, G_{yu} et K.

Exercice 3

Donner la matrice rationnelle en δ correspondant à $\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{array}\right]$.

Université Paul Sabatier
Cours M2 ISTR / RODECO - module Commande linéaire avancée - Commande Robuste

Examen du 20 Octobre 2017 - Corrigé

Exercice 1

1.1 Commençons par rappeler l'écriture LFT du scalaire $\delta = \delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$. Notons donc que du coup

$$\begin{bmatrix} \delta \\ -2 \end{bmatrix} = \delta \star \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{array}\right], \qquad \begin{bmatrix} 0 & \delta \end{bmatrix} = \delta \star \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ecrivons ensuite

$$\begin{bmatrix} -4 & \delta^2 \\ 4 & -4-2\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \delta \end{bmatrix}$$

ce qui permet de conclure en appliquant les formules du cours

$$\begin{bmatrix} -4 & \delta^2 \\ 4 & -4-2\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right].$$

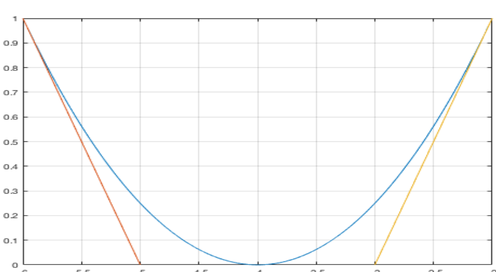
On peut donc écrire le système sous la forme suivante

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_\Delta \end{array} , \qquad w_\Delta = (\delta I_2) z_\Delta.$$

C'était une des façons de répondre à cette question.

1.2 Une rapide analyse par intervalles donne $-4-2\delta \in [-6 \quad -2]$ et $\delta^2 \in [0 \quad 1]$. Un modèle polytopique possible avec 4 sommets est donc défini par

$$A(\delta) \in \text{co}\left\{ \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \right\}.$$



Une alternative est de tracer δ^2 en fonction de $-4-2\delta$, de prendre par exemple les tangentes de la courbe δ^2 aux points extrêmes et sélectionner les points situés à l'intersection des tangentes avec $\delta = 0$. Ca donne alors un polytope un peu plus petit du type

$$A(\delta) \in \text{co}\left\{ \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

C'est le mieux qu'on puisse faire en conservant la symétrie et avec 4 sommets.

1.3 La matrice des dynamiques $A(\delta=1) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, a une trace de -10, négative, et un déterminant de 20, positif. Les pôles sont donc à parties réelles négatives. Le système est stable pour cette valeur des incertitudes.

La matrice des dynamiques $A(\delta=-1) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, a une trace est -6, négative, et un déterminant de 4, positif. Les poles sont donc à parties réelles négatives. Le système est stable pour cette valeur des incertitudes.

1.4 La trace de la matrice $A(\delta)$ est de $-4-2\delta \in [-6 \quad -2]$. Elle est négative pour tout δ. Le déterminant est $16+8\delta-4\delta^2$. Il est négatif, sauf entre ses racines. Comme il est positif pour $\delta=1$ et $\delta=-1$ c'est que l'intervalle $\delta=[-1 \quad 1]$ est entre les racines. Le determinant est donc positif pour les incertitudes admissibles. Les pôles sont donc à partie réelle positive. Le système est stable pour tout $\delta \in [-1 \quad 1]$ constant.

1.5 Cette fois-ci il faut faire appel à la théorie de Lyapunov et par exemple trouver P définie positive qui prouve la stabilité de tous les sommets du polytope. Dans ce cas on prouve la stabilité robuste du polytope pour toute incertitude, même si elle est fonction du temps. Un résultat équivalent ne peut pas être obtenu avec le calcul des pôles. La notion de pôles n'a de sens que pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. Finalement, si le polytope est stable, alors le système original qui est contenu dedans l'est aussi.

On peut tester la matrice P proposée dans l'énoncé. Ce qui donne pour le 2ème sommets du polytope :

$$A^TP+PA = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 16 \\ 16 & -40 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \text{trace} = -32 \\ \det = -64 \end{matrix}$$

La trace est négative, le déterminant également. On en déduit que les valeurs propres de A^TP+PA ne sont pas toutes négatives. L'inégalités de Lyapunov n'est pas satisfaite pour ce choix de P. On ne peut rien conclure. [Désolé aux étudiants pour cette proposition de matrice P qui ne permettait pas de répondre positivement à la question.]

On peut par contre utiliser la matrice $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Elle est bien définie positive (de dimensions 2x2, trace positive et determinant positif). Les inegalités de Lyapunov sur les sommets du polytope donnent :

$$A^TP+PA = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -1 \\ -1 & -20 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \text{trace} = -36 \\ \det = 319 \end{matrix}$$

$$A^TP+PA = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ 1 & -12 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \text{trace} = -28 \\ \det = 191 \end{matrix}$$

$$A^TP+PA = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ 1 & -22 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \text{trace} = -38 \\ \det = 351 \end{matrix}$$

$$A^TP+PA = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \text{trace} = -22 \\ \det = 71 \end{matrix}$$

Dans chaque cas la trace est négative, le déterminant est positif. Ces matrices de dimensions 2x2 sont dont toutes symétriques, définies négatives. Les inégalités de Lyapunov sont satisfaite pour la même matrice P sur tous les sommets du polytope. On en déduit que le polytope est robustement stable. Cette propriété est vraie y compris pour des incertitudes variant dans le temps.

Exercice 2

2.1 D'après les notations on déduit assez simplement que le transfert H est un observateur qui à la connaissance des signaux d'entrée (u) et sortie (y) du système construit en temps réel une estimée de l'état $\hat{x}$. G est le système à commander il est supposé être mal connu et les incertitudes Δ_1 sont représentées sous la forme d'une boucle LFT. A la connaissance de l'estimée $\hat{x}$ le transfert K est un retour d'état qui donne une commande sur le système. $\hat{x}$ est une estimée de l'état de G, y une sortie mesurée, entachée d'un bruit additif w_2. z_1 et w_1 sont des signaux exogènes utilisés pour représenter le système incertain sous la forme LFT $\Delta_1 \star G$. u est la commande appliquée sur le système. z_2 est un signal de performance qui peut permettre de mesurer la qualité de l'observateur $z_2 = \hat{x}$.

2.2 D'après le théorème du petit gain la propriété $\|T_{w_2\to z_2}(\Delta_1)\|_\infty < 1$ est équivalente à la stabilité robuste de la LFT suivante pour toute incertitude Δ_2 bornée en norme par 1 :

$$\Delta_2 \star (T_{w_2\to z_2}(\Delta_1)) \qquad \text{rob. stab.} \qquad \forall\ \|\Delta_2\|_\infty \le 1.$$

On souhaite que la propriété soit vraie pour toutes les incertitudes Δ_1 ce qui revient à prouver

$$\Delta_2 \star (T_{w_2\to z_2}(\Delta_1)) \qquad \text{rob. stab.} \qquad \forall \begin{array}{c} \|\Delta_1\|_\infty \le 1 \\ \|\Delta_2\|_\infty \le 1 \end{array}. \tag{1}$$

Les propriétés des LFT font que le système $\Delta_2 \star (T_{w_2\to z_2}(\Delta_1))$ peut se réécrite sous une forme $\Delta \star M$ avec

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}.$$

Les propriétés de la norme H_∞ font que si $\|\Delta_1\|_\infty \le 1$ et $\|\Delta_2\|_\infty \le 1$ alors $\|\Delta\|_\infty \le 1$. C'est pourquoi une condition suffisante pour (1) est

$$\Delta \star M \qquad \text{rob. stab.} \qquad \forall\ \|\Delta\|_\infty \le 1$$

qui, du fait du théorème du petit gain, est vraie si $\|M\|_\infty < 1$.

2.3 M est la matrice de transfert entre les entrées w_1, w_2 et les sorties z_1, z_2. Pour la calculer on va d'abord construire la matrice de la boucle ouverte N entre les entrées w_1, w_2, u et les sorties z_1, z_2, $\hat{x}$. On aura alors $M = N\star K$.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \hline \hat{x} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \hline u \end{pmatrix} \qquad , \qquad N = \left[\begin{array}{cc|c} G_{11} & 0 & G_{1u} \\ H_y G_{y1} & H_y & H_y G_{yu} + H_u \\ \hline H_y G_{y1} & H_y & H_y G_{yu} + H_u \end{array}\right]$$

et donc

$$M = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ H_y G_{y1} & H_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{1u} \\ H_y G_{yu} + H_u \end{bmatrix} K(I - K(H_y G_{yu} + H_u))^{-1} \begin{bmatrix} H_y G_{y1} & H_y \end{bmatrix}.$$

Exercice 3

On applique la formule du cours

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{array}\right]. &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} (\delta I_2) \left(I_2 - (\delta I_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & \delta^2 \\ 0 & 2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \delta^2 \\ 0 & 2\delta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & \delta^2 \\ 4 & -4 + 2\delta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$