**Université Toulouse III - Paul Sabatier**
**Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste**

# Examen

Février 2015

**Exercice A** Soit le système linéaire décrit par :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & ab \\ 0.9 & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

où $a \in [\,1\ 3\,]$ et $b \in [\,2\ 4\,]$ sont deux paramètres incertain indépendants.

**A1.** En appliquant une analyse par intervalle des coefficients, proposer une représentation parallèlotopique englobant les réalisations de ce système incertain. Commenter.

**A2.a** Proposer une représentation polytopique de ce système incertain.

**A2.b** On souhaite analyser la stabilité robuste du modèle polytopique. Décrire une méthode à base de fonctions de Lyapunov permettant de faire cette analyse.

**A2.c** Appliquer la méthode avec les outils logiciels à votre disposition. Permet-elle de conclure quant à la stabilité robuste du système ? Si non, expliquer quelles peuvent en être les causes.

**A3.a** Donner une représentation LFT du système incertain où le bouclage est vis-à-vis des incertitudes normalisées $\delta_a \in [\,-1\ \ 1\,]$, $\delta_b \in [\,-1\ \ 1\,]$ telles que $a = c_a + r_a\delta_a$ et $b = c_b + r_b\delta_b$.

**A3.b** On souhaite analyser la stabilité robuste du modèle LFT. Expliquer la méthode du petit gain pour ce problème.

**A3.c** Appliquer une méthode d'analyse de la stabilité du modèle LFT avec les outils logiciels à votre disposition. Est-ce qu'ils permettent de conclure quant à la stabilité robuste du système ? Si oui, est-ce que les conclusions sont également valides pour des incertitudes variant dans le temps ?

**A4** Proposer une autre méthode pour analyser la stabilité robuste du système et la commenter.

**Exercice B** Soit le système incertain décrit par le modèle LFT suivant où $\delta_1 \in [\,-1\ \ 1\,]$ et $\delta_2 \in [\,-1\ \ 1\,]$

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} w_\Delta + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} w \\ z_\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_\Delta \\ z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{array} \quad , \quad w_\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} z_\Delta$$

**B1** Calculer la représentation incertaine de la forme $\dot{x} = A(\delta_1, \delta_2)x + B_w w$ de ce système.

**B2** Proposer une méthode utilisant le théorème du petit gain permettant de prouver que la norme $H_\infty$ du transfert est inférieure à 1 pour toutes les réalisations du système. Permet-elle de prouver cette propriété ? Si non, expliquer quelles peuvent en être les causes.

**B3** Appliquer une méthode d'analyse de la norme $H_\infty$ robuste du modèle avec les outils logiciels à votre disposition.

**Université Toulouse III - Paul Sabatier**
**Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste**

# Examen - Corrigé

Février 2015

**A1.** L'analyse par intervalle indique que $ab \in [2 \;\; 12]$. Ceci permet d'écrire les trois coefficients incertains du système sous la forme d'un centre et de variations normées $|\delta_\bullet| \leq 1$ de la forme suivante

$$a = 2 + \delta_a, \quad b = 3 + \delta_b, \quad ab = 7 + 5\delta_{ab}$$

Ce qui donne le modèle parallélotopique représenté par un centre et trois axes

$$\begin{bmatrix} -a & ab \\ 0.9 & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix} + \delta_a \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \delta_b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \delta_{ab} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce modèle englobe le système incertain initial mais comprend plus de réalisations du fait que $\delta_{ab}$ est décorrellé de $\delta_a$ et $\delta_b$. Par exemple si on prend $\delta_a = 1$, $\delta_b = 1$ et $\delta_{ab} = -1$, qui est une réalisation admissible du modèle parallélotopique, on trouve

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0.9 & -4 \end{bmatrix}$$

qui n'est pas une réalisation du système ($2 \neq 3 \cdot 4\,!$).

**A2.a** Une représentation polytopique possible se déduit directement du modèle parallélotopique en prenant les $2^3 = 8$ sommets issus des diverses combinaisons de valeurs extrêmes de $\delta_a$, $\delta_b$ et $\delta_{ab}$.

Cependant, il se trouve que pour cet exemple, comme $ab$ est à la fois linéaire en $a$ et en $b$, on peut aussi choisir le polytope défini par les 4 sommets suivants :

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.9 & -2 \end{bmatrix},\; A^{[2]} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0.9 & -4 \end{bmatrix},\; A^{[3]} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0.9 & -2 \end{bmatrix},\; A^{[4]} = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 0.9 & -4 \end{bmatrix}$$

Pour montrer que c'est bien le cas, écrivons $a$ et $b$ comme des paramètres appartenant à deux polytopes à deux sommets chacun :

$$\begin{array}{l} a = \zeta_{a1} + 3\zeta_{a2} \;:\; \zeta_{ai} \geq 0 \;,\; \zeta_{a1} + \zeta_{a2} = 1 \\ b = 2\zeta_{b1} + 4\zeta_{b2} \;:\; \zeta_{bi} \geq 0 \;,\; \zeta_{b1} + \zeta_{b2} = 1 \end{array}$$

On peut alors constater que

$$\begin{bmatrix} -a & ab \\ 0.9 & -b \end{bmatrix} = \zeta_{a1}\zeta_{b1}A^{[1]} + \zeta_{a1}\zeta_{b2}A^{[2]} + \zeta_{a2}\zeta_{b1}A^{[3]} + \zeta_{a2}\zeta_{b2}A^{[4]}$$

où chacun des coefficients $\zeta_{ai}\zeta_{bj} \geq 0$ est positif et leur somme vaut

$$\zeta_{a1}\zeta_{b1} + \zeta_{a1}\zeta_{b2} + \zeta_{a2}\zeta_{b1} + \zeta_{a2}\zeta_{b2} = (\zeta_{a1} + \zeta_{a2})(\zeta_{b1} + \zeta_{b2}) = 1.$$

Cela prouve que le système incertain est bien contenu dans ce polytope à 4 sommets. Ce polytope contient le parallèlotope (les 4 sommets font partie des 8 sommets du parallèlotope). Mais ce polytope à 4 sommets ne représente pour autant pas, lui non plus, exactement le système. Prenons par exemple la combinaison suivante des sommets qui vérifie bien $0.5 + 0 + 0 + 0.5 = 1$ :

$$0.5A^{[1]} + 0A^{[2]} + 0A^{[3]} + 0.5A^{[4]} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix}$$

Le résultat est tel que $2 \cdot 3 = 6 \neq 7$. Cette réalisation fait partie du polytope mais pas du système incertain initial. Une explication est que le polytope à quatre sommets est décrit par 3 paramètres indépendants (quatre paramètres contraints à avoir une somme de 1), alors que le système initial est décrit par seulement deux paramètres indépendants.

**A2.b** Une méthode vue en cours qui permet d'analyse la stabilité du polytope consiste à rechercher une matrice symétrique $P$ solution des LMI suivantes

$$P \succ 0 \ , \quad A^{[v]T}P + PA^{[v]} \prec 0$$

avec $v = 1, 2, 3, 4$. La même matrice $P$ doit satisfaire les contraintes pour tous les sommets. C'est toujours bien de savoir re-démontrer ce résultat et cela peut rapporter des points si on le fait correctement (voir le cours). Tout au moins on peut dire que la preuve implique une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T Px$ définie positive qui garanti la stabilité asymptotique (sa dérivée est définie négative le long des trajectoires) quelles que soient les valeurs des incertitudes (même si elle varient dans le temps).

**A2.c** On fait dans Matlab avec la boîte à outils Romuloc les opérations suivantes

```
>> sv=ssmodel;
>> sv(1).a=[-1 2;0.9 -2];
>> sv(2).a=[-1 4;0.9 -4];
>> sv(3).a=[-3 6;0.9 -2];
>> sv(4).a=[-3 12;0.9 -4];
>> sv.bu=[0;1];
>> sv.cy=[1 0];
>> sp=upoly(sv);
>> quiz=ctrpb('a','pilf')+stability(sp);
>> solvesdp(quiz);
...
Infeasible problem

>> quiz=ctrpb('a','pdlf')+stability(sp);
>> solvesdp(quiz);
...
Infeasible problem
```

Le premier test correspond aux LMI présentées à la question **A2.b**. Il est non faisable ce qui peut s'interpréter par le fait que rechercher une seule fonction de Lyapunov pour toutes les incertitudes (variant dans le temps ou non) est une exigence trop forte pour le système.

Le second test correspond à des LMI faisant appel à une certaine classe de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. Il ne permet pas plus de conclure. Ceci peut s'interpréter soit par le fait que cette classe de fonction de Lyapunov dépendant des paramètres n'est pas la bonne pour prouver la stabilité robuste du système, ou bien que le polytope n'est effectivement pas stable pour toutes les valeurs des incertitudes. Si on regarde par exemple la réalisation obtenue ci-dessus (que l'on sait être dans le polytope mais pas parmi les réalisations du système initial) on a

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix} = -0.4 < 0$$

Les poles sont de signes opposés. L'un d'entre eux est donc positif. Cette réalisation du polytope est instable. Aucun test ne pourra prouver la stabilité du polytope.

**A3.a** En prenant $a = 2 + \delta_a,\ b = 3 + \delta_b$ on trouve

$$\begin{bmatrix} -a & ab \\ 0.9 & -b \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix} x + \delta_a \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \delta_a\delta_b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \delta_b \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

qu'il est possible de factoriser comme suit

$$\begin{bmatrix} -a & ab \\ 0.9 & -b \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix} x + \delta_a \left( \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \delta_b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \right) + \delta_b \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} -a & ab \\ 0.9 & -b \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_a \left( \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} x + \delta_b \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \delta_b \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Si on pose $w_b = \delta_b z_b$ avec $z_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$ on trouve

$$\begin{bmatrix} -a & ab \\ 0.9 & -b \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_a \left( \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} x + w_b \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} w_b$$

et si on pose $w_a = \delta_a z_a$ avec $z_a = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} x + w_b$ on a

$$\begin{bmatrix} -a & ab \\ 0.9 & -b \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_a + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} w_b$$

On en déduit donc la LFT suivante

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.9 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_\Delta \end{array} \quad , \quad w_\Delta = \begin{bmatrix} \delta_a & 0 \\ 0 & \delta_b \end{bmatrix} z_\Delta$$

Ce n'est pas la seule forme LFT possible mais celle-ci est minimale.

**A3.b** Le théorème du petit gain énonce que si un système stable admet une norme $H_\infty$ calculée sur des signaux entrées sorties $w/z$ inférieure strictement à $\gamma$ alors tout bouclage avec des incertitudes sur ces même signaux, $w = \Delta z$, ne déstabilise pas le système dès lors que la norme de $\Delta$ est inférieure à l'inverse de $\gamma$ : $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$. C'est une condition nécessaire et suffisante quand $\Delta$ est causale non-structurée. Uniquement suffisante si $\Delta$ est structurée comme c'est le cas dans l'exemple.

Par construction nous avons

$$\left\| \begin{bmatrix} \delta_a & 0 \\ 0 & \delta_b \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\{\|\delta_a\|,\ \|\delta_b\|\} = 1$$

donc si la norme $H_\infty$ du transfert $w_\Delta \to z_\Delta$ du modèle est inférieure à 1 strictement, le système est stable. Pour le tester dans Matlab/Romuloc on fait les commandes suivantes

```
>> s=ssmodel;
>> s.a=[-2 6;0.9 -3];
>> s.bw=[1 2;0 -1];
>> s.cz=[-1 3;0 1];
>> s.dzw=[0 1; 0 0];
>> norm(s,Inf)
System is stable
ans =
    1.6126
>> 1/ans
ans =
    0.6201
```

Le système nominal de la LFT est bien stable, mais sa norme $H_\infty$ n'est pas inférieure à 1. Nous ne pouvons pas conclure avec le théorème du petit gain quant à la stabilité robuste pour toute incertitude $\delta_a \in [\,-1 \;\; 1\,]$, $\delta_b \in [\,-1 \;\; 1\,]$. Le mieux que l'on puisse dire c'est que le système est robustement stable pour toute incertitude telle que $\delta_a \in [\,-0.62 \;\; 0.62\,]$, $\delta_b \in [\,-0.62 \;\; 0.62\,]$.

**A3.c** Il existe d'autres méthodes que le théorème du petit gain pour analyser la stabilité d'un système sous forme LFT, méthodes qui tiennent compte de la structure de l'incertitudedes. Nous ne les avons pas vues en cours mais on a vu comment les tester dans Romuloc :

```
>> sn=ssmodel;
>> sn.a=[-2 6;0.9 -3];
>> sn.bd=[1 2;0 -1];
>> sn.cd=[-1 3;0 1];
>> sn.ddd=[0 1; 0 0];
>> da=uinter(-1,1);
>> db=uinter(-1,1);
>> slft=ussmodel(sn,diag(da,db));
>> quiz=ctrpb('a','pilf')+stability(slft);
>> solvesdp(quiz);
...
Infeasible problem
>> quiz=ctrpb('a','pdlf')+stability(slft);
>> solvesdp(quiz);
...
Stability assessed
```

Le premier des deux tests est avec une fonction de Lyapunov commune à toutes les incertitudes et ne permet pas de conclure. Le second test est avec une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres et permet de prouver la stabilité robuste du système. Les tests avec une fonction de Lyapunov unique pour toutes les incertitudes, s'ils sont faisables, impliquent la stabilité robuste même pour des incertitudes variant dans le temps. Ce n'est pas le cas des tests avec des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. Ici, il est impossible de conclure si les incertitudes varient dans le temps (ou si ce sont des non-linéarités bornées représentées par des incertitudes).

**A4** Remarquons la chose suivante : la trace de la matrice $A$ est $-a-b<0$ et son déterminant est $ab-0.9ab=0.1ab>0$. Ainsi les valeurs propres sont de même signe (déterminant positif) et leur somme est négative (trace négative). Le système est stable pour toutes valeurs positives de $a$ et $b$, constantes. Il est robustement stable pour tout $a$ et $b$ dans les intervalles proposé, si ces paramètres ne varient pas dans le temps. S'il est aisé de faire cette analyse à la main pour ce système, ce n'est plus le cas si le système est d'ordre plus grand et/ou s'il dépend de façon plus complexe d'incertitudes. D'où les méthodes que nous allons tester en suivant.

**B1** On peut constater que le modèle LFT proposé est exactement celui de l'exercice précédent (hormis un coefficient qui ne dépend pas de l'incertitude). Le résultat est donc connu. Faisons quand même le calcul en appliquant la formule :

$$\begin{aligned}
A(\delta_1,\delta_2) &= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \left( I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 & 2\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 & 2\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \delta_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 & 2\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3+\delta_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta_1 & \delta_1(3+\delta_2)+2\delta_2 \\ 0 & -\delta_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -(2+\delta_1) & (2+\delta_1)(3+\delta_2) \\ 0.5 & -(3+\delta_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**B2** La question précédente indique que le système s'écrit de façon équivalente comme

$$\begin{array}{l} \dot{x} = A(\delta_1,\delta_2)x + B_w w \\ z = C_z x \end{array} \quad : \quad B_w = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix},\ C_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après le théorème du petit gain la norme $H_\infty$ de ce système est inférieure strictement à 1 si et seulement si le système bouclé par une incertitude $w = \hat{\Delta} z$ est stable pour toute incertitude bornée $\|\hat{\Delta}\|_\infty \leq 1$. Ainsi si on reprend la forme LFT du système, prouver que la norme $H_\infty$ est inférieure à 1 est équivalent à prouver la stabilité robuste du système suivant

$$\begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix} x + \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \hat{w}_\Delta \\ \hat{z}_\Delta = \left[\begin{array}{cc} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] w_\Delta \end{array} \quad , \quad \hat{w}_\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Delta} \end{bmatrix} \hat{z}_\Delta$$

Sachant que la nouvelle incertitude est bornée en norme par 1 :

$$\left\| \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Delta} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\{\|\delta_1\|, \|\delta_2\|, \|\hat{\Delta}\|_\infty\} = 1$$

le théorème du petit gain garanti la stabilité robuste pour toutes les incertitudes si la norme du transfert $\hat{w}_\Delta \to \hat{z}_\Delta$ est inférieure à 1. Si c'est le cas nous aurons prouvé le problème initialement posé à savoir que la norme $H_\infty$ du système initial est inférieure à 1 pour toute incertitude $\delta_1$ et $\delta_2$ dans les intervalles.

Faisons le test dans Matlab

```
>> sb=ssmodel;
>> sb.a=[-2 6;0.5 -3];
>> sb.bw=[1 2 0.2;0 -1 0];
>> sb.cz=[-1 3;0 1; 1 1];
>> sb.dzw=[0 1 0; 0 0 0;0 0 0];
```

```
>> norm(sb,Inf)
System is stable
ans =
    1.3535
>> 1/ans
ans =
    0.7388
```

Le résultat ne permet de pas de prouver la propriété attendue. Au mieux on peut conclure que la norme $H_\infty$ du transfert $w \to z$ est inférieure à 1.36 pour toutes incertitudes telles que $\delta_1 \in [\,-0.73\ \ 0.73\,]$ et $\delta_2 \in [\,-0.73\ \ 0.73\,]$. La raison pour laquelle on ne peut pas dire mieux est que le théorème du petit gain est nécessaire et suffisant uniquement pour des incertitudes non-structurées. Dans notre cas l'incertitudes est structurée (3 blocs sur la diagonale), le résultat est donc pessimiste.

**B3** Comme pour l'analyse de la stabilité robuste, Romuloc contient des méthodes pour l'analyse robuste de la norme $H_\infty$. Voici quelques lignes de code pour ce problème

```
>> sn=ssmodel;
>> sn.a=[-2 6;0.5 -3];
>> sn.bd=[1 2;0 -1];
>> sn.bw=[0.2;0]
>> sn.cd=[-1 3;0 1];
>> sn.ddd=[0 1; 0 0];
>> sn.cz=[1 1];
>> d1=uinter(-1,1);
>> d2=uinter(-1,1);
>> slft=ussmodel(sn,diag(da,db));
>> quiz=ctrpb('a','pilf')+hinfty(slft);
>> solvesdp(quiz);
...
Hinfty norm < 0.501065 assessed

>> quiz=ctrpb('a','pdlf')+hinfty(slft);
>> solvesdp(quiz);
...
Hinfty norm < 0.5 assessed
```

Le premier des deux tests garanti une norme $H_\infty$ du transfert $w \to z$ robustement inférieure à 0.5011 (pour toutes incertitudes $\delta_1 \in [\,-1\ \ 1\,]$ et $\delta_2 \in [\,-1\ \ 1\,]$, même variant dans le temps, car c'est une méthode avec une fonction de Lyapunov indépendant des paramètres). La seconde méthode qui utilise des fonctions de Lypunov dépendant des paramètres permet de conclure que la norme $H_\infty$ du transfert $w \to z$ robustement inférieure à 0.5 (pour toutes incertitudes $\delta_1 \in [\,-1\ \ 1\,]$ et $\delta_2 \in [\,-1\ \ 1\,]$ constantes).