Université Toulouse III - Paul Sabatier
Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Examen

2h - tous documents autorisés - Matlab autorisé (avec Robust et RoMulOC toolbox)
Février 2013

Exercice 1 - Système polytopique

Soit le système avec trois incertitudes $\delta_1 \in [-1\ ,\ 1]$, $\delta_2 \in [-1\ ,\ 1]$ et $\delta_3 \in [-1\ ,\ 1]$ décrit par

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1+0.5\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+0.5\delta_2 & 0.1\delta_3 \\ -1+0.1\delta_1 & 1+0.1\delta_2 & -1+0.5\delta_3 & 1+0.5\delta_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \tag{1}$$

1.1 Le système est-il stable ?

1.2 Montrer que la condition suivante implique que les valeurs propres de A sont à partie réelle inférieure à $+1$

$$\exists P > 0 \quad : \quad A^T P + PA < 2P$$

1.3 Donner une condition LMI qui prouve que les pôles d'un système polytopique

$$\dot{x} = A(\xi)x \quad , \quad A(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i A^{[i]} \quad : \quad \xi_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1$$

sont tous à partie réelle inférieure à $+1$.

1.4 Que permet de prouver la condition LMI suivante ?

$$\forall i = 1 \ldots N \quad , \quad \exists P_i > 0 \quad , \quad A^{[i]T} P_i + P_i A^{[i]} < 2P_i$$

1.5 Construire le modèle (1) dans le formalisme de la boîte à outils RoMulOC. En donner deux représentations, l'une parallélotopique, l'autre polytopique.

1.6 Résoudre un problème LMI permettant de montrer que les pôles du système incertain (1) sont à partie réelle inférieure à $+1$.

1.7 Résoudre un problème LMI permettant de montrer que les pôles du système incertain (1) sont à partie réelle inférieure à $+0.8$. Caractériser ce problème LMI.

1.8 Donner une condition LMI pour la synthèse d'un retour d'état qui localise les pôles de la boucle fermée de façon à ce que leur partie réelle soit inférieure à -0.01.

1.9 Calculer un correcteur $u = -Ky$ tel que les pôles de la boucle fermée sont à partie réelle inférieure à -0.01.

Exercice 2 - Synthèse H_∞
Soit le système $G(s)$ défini par les équations suivantes

$$\begin{array}{l} z_1 = G_{11}(s)w_1 + G_{12}u_1 \\ y = G_{21}(s)w_1 + G_{22}u_1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ll} G_{11}(s) = 0.1 & G_{12}(s) = \dfrac{0.1}{s+1} \\ G_{21}(s) = 2 & G_{22}(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s-0.1)} \end{array} \tag{2}$$

Il est en interaction avec un autre système, inconnu, mais stable de gain borné

$$w_1 = \Delta_1 z_1 \quad , \quad \|\Delta_1\|_\infty \leq 1.$$

On souhaite calculer un correcteur $u = K(s)y$ stabilisant le couple de systèmes interconnectés $\Delta_1 \star G$ et qui garantisse le gain suivant :

$$\frac{\|z_2\|_2}{\|w_2\|_2} \leq 1$$

où le signal z_2 caractérise la composante basse fréquence de la sortie du système $z_2 = \dfrac{1}{0.1s+1}y$ et où w_2 est une entrée de perturbation sur l'entrée du système $u_1 = u + 0.1w_2$.

2.1 Proposer une méthode pour résoudre ce problème de synthèse.

2.2 Construire la matrice de transfert du modèle de synthèse.

2.3 En déduire une représentation d'état minimale du modèle de synthèse et calculer un correcteur. Quel est l'ordre du correcteur ? Répond-il au problème ?

Exercice 3 - μ-analyse

Soit le système suivant $z = H(s)w \quad , \quad H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+2} \\ \dfrac{s-1}{s+2} & \dfrac{2}{s+1} \end{bmatrix}$

Ce système est bouclé avec une incertitude $w = \Delta z$. On s'intéresse au bien posé de cette boucle pour la fréquence $s = j\omega$ avec $\omega = 1$rad/s.

3.1 Calculer la matrice $H(j)$, ses valeurs singulières, ses valeurs propres et le module des ses valeurs propres.

3.2 En supposant $\Delta \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ non structurée, que doit vérifier γ pour que la boucle $\Delta \star H(j)$ soit bien posée pour tout Δ de norme bornée $\|\Delta\|_2 \leq \gamma$?

3.3 En supposant $\Delta = \delta \mathbf{1}_2$ avec $\delta \in \mathbb{C}$ répétée deux fois, que doit vérifier γ pour que la boucle $\Delta \star H(j)$ soit bien posée pour tout δ de module borné $|\delta| \leq \gamma$?

3.4 En supposant $\Delta = \delta \mathbf{1}_2$ avec $\delta \in \mathbb{R}$ répétée deux fois, que doit vérifier γ pour que la boucle $\Delta \star H(j)$ soit bien posée pour tout δ de valeur absolue bornée $|\delta| \leq \gamma$?

3.5 En supposant $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$ avec $\delta_1 \in \mathbb{C}$ et $\delta_2 \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de γ pouvez vous assurer que la boucle $\Delta \star H(j)$ est bien posée pour toutes incertitudes bornées par $|\delta_1| \leq \gamma$ et $|\delta_2| \leq \gamma$?

3.6 Même question mais avec $\delta_1 \in \mathbb{R}$ et $\delta_2 \in \mathbb{C}$.

3.7 Même question mais avec $\delta_1 \in \mathbb{C}$ et $\delta_2 \in \mathbb{R}$.

3.8 Même question mais avec $\delta_1 \in \mathbb{R}$ et $\delta_2 \in \mathbb{R}$.

Université Toulouse III - Paul Sabatier
Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Examen - Corrigé

Février 2013

Exercice 1 - Système polytopique

1.1 Le système est-il stable ?

Non. Prenons une incertitude au hasard. Par exemple $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. La matrice des dynamiques s'écrit alors

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On reconnaît là une forme compagne de commande. Les coefficient du polynôme caractéristique sont sur la dernière ligne. Ils ne sont pas tous de même signe. Les racines ne peuvent donc pas être toutes à partie réelle négative. Le système est instable.

Avec Matlab on trouve plus précisément :

```
eig( [0 1 0;0 0 1;-1 1 -1] )
ans =
  -1.8393
   0.4196 + 0.6063i
   0.4196 - 0.6063i
```

Une paire de pôles complexes conjugués est à partie réelle positive. Le système est instable.

1.2 Montrer que la condition suivante implique que les valeurs propres de A sont à partie réelle inférieure à $+1$

$$\exists P > 0 \quad : \quad A^T P + PA < 2P$$

Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de A et λ la valeur propre associée : $Ax = \lambda x$ et $x^* A^T = \lambda^* x^*$. Par congruence l'inégalité $A^T P + PA < 2P$ implique :

$$x^*(A^T P + PA)x = (\lambda^* + \lambda)x^* Px = 2\mathrm{Re}(\lambda)x^* Px < 2x^* Px$$

Comme $P > 0$ on a $x^* Px > 0$ et on en conclut que la partie réelle du pôle λ est inférieure à $+1$. C'est vrai pour tous les pôles (condition indépendante du choix du pôle).

1.3 Donner une condition LMI qui prouve que les pôles d'un système polytopique

$$\dot{x} = A(\xi)x \quad , \quad A(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i A^{[i]} \quad : \quad \xi_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1$$

sont tous à partie réelle inférieure à $+1$.

Un exemple de condition qui prouve cela est la suivante :

$$\exists P > 0 \quad : \quad \forall i = \ldots N \quad , \quad A^{[i]T} P + PA^{[i]} < 2P. \qquad (3)$$

C'est une condition suffisante, pas nécessaire. La preuve, qui n'était pas demandée, est comme suit. La LMI est satisfaite pour tous les sommets du polytope. Par convexité des contraintes LMI elle est également vraie pour toute combinaison linéaire convexe, donc pour tous les éléments du polytope :

$$\forall \xi_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1 \quad , \quad A^T(\xi)P + PA(\xi) < 2P$$

La suite est semblable à ce qui est fait pour la question **1.2**. On trouve que $\mathrm{Re}(\lambda(\xi)) < 1$ pour toute valeur propre $\lambda(\xi)$ de $A(\xi)$ et pour tout ξ dans le simplexe. On remarque que c'est la même matrice P qui est utilisée pour tout le polytope.

1.4 Que permet de prouver la condition LMI suivante ?

$$\forall i = 1 \ldots N \quad , \quad \exists P_i > 0 \quad , \quad A^{[i]T} P_i + P_i A^{[i]} < 2P_i$$

Elle prouve que les matrices $A^{[i]}$ sont à valeurs propres de parties réelles inférieures à $+1$ (une matrice P_i prouve cette propriété pour chaque sommet du polytope). Cette condition ne dit rien de la stabilité robuste du système incertain.

1.5 Construire le modèle (1) dans le formalisme de la boîte à outils RoMulOC. En donner deux représentations, l'une parallélotopique, l'autre polytopique.

On construit le modèle parallélotopique par exemple comme suit. En premier le modèle central.

```
sysc=ssmodel;
sysc.A=[0 1 0;0 0 1;-1 1 -1];
sysc.Bu=[0; 0; 1];
sysc.Cy=eye(3);
```

Puis les axes suivant chacune des incertitudes.

```
sysa=ssmodel(0,sysc);
sysa(1).A=[0 0.5 0;0 0 0;0.1 0 0];
sysa(2).A=[0 0 0;0 0 0.5;0 0.1 0];
sysa(3).A=[0 0 0;0 0 0; 0 0 0.5];
sysa(3).Bu=[0;0.1;0.5];
```

On obtient alors le modèle parallélotopique avec la commande suivante

```
usysp=uparal(sysc,sysa);
```

On en déduit le modèle polytopique avec la commande suivante

```
usys=upoly(usysp)

Uncertain model : polytope 8 vertices
-------- WITH --------
            n=3    mu=1
 n=3 dx  =   A*x +  Bu*u
py=3  y  =  Cy*x
continuous time ( dx : derivative operator )
```

1.6 Résoudre un problème LMI permettant de montrer que les pôles du système incertain (1) sont à partie réelle inférieure à $+1$.

La condition (3) est précodée dans RoMulOC. Pour construire le problème LMI il convient de définir la région dans laquelle on souhaite placer les pôles :

```
r = region('plane', 1)
Half-plane such that: Re(z)<1
```

Puis de déclarer le problème d'analyse avec matrice de Lyapunov P unique pour tout le polytope :

```
quiz = ctrpb('a','unique') + dstability( usys, r );
control problem: ANALYSIS
Lyapunov function: UNIQUE (quadratic stability)
Specified performances / systems:
# D-stability / no name
```

On résout le problème avec la commande suivante :

```
solvesdp(quiz)
Robustly D-stable for region:
Half-plane such that: Re(z)<1
```

Les pôles du système incertain sont prouvés d'être à parties réelles inférieures à $+1$ pour toutes les réalisations des incertitudes.

1.7 Résoudre un problème LMI permettant de montrer que les pôles du système incertain (1) sont à parties réelles inférieures à $+0.8$. Caractériser ce problème LMI.

Si on fait la même démarche pour la nouvelle région on trouve :

```
r2 = region('plane', 0.8);
quiz2 = ctrpb('a','unique') + dstability( usys, r2 );
solvesdp(quiz2)
Infeasible problem
```

Ce qui ne permet pas de conclure. Les LMI ne sont pas faisables ce qui ne signifie pas qu'il existe un pôle à partie réelle supérieure à 0.8. On peut d'ailleurs faire appel à d'autres conditions LMI pour lesquelles la matrice P dépend des incertitudes. Sans rappeler cette condition voici le résultat numériquement :

```
quiz3 = ctrpb('a','poly') + dstability( usys, r2 );
solvesdp(quiz3)
Robustly D-stable for region:
Half-plane such that: Re(z)<0.8
```

1.8 Donner une condition LMI pour la synthèse d'un retour d'état qui localise les pôles de la boucle fermée de façon à ce que leur partie réelle soit inférieure à -0.01.

En appliquant la méthodologie décrite dans le cours on abouti à la condition suivante

$$\exists Q > 0, \exists S \quad : \quad \forall i = 1 \dots N \quad A^{[i]}Q + B_u^{[i]}S + QA^{[i]T} + S^T B_u^{[i]^T} < -0.02Q$$

La solution (Q, S) de ces contraintes LMI est telle que $K = SQ^{-1}$ localise les pôles de façon à ce que leur partie réelle soit inférieure à -0.01. Pour s'en assurer écrivons que $S = KQ$ ce qui donne

$$\forall i = 1 \dots N \quad (A^{[i]} + B_u^{[i]}K)Q + Q(A^{[i]} + B_u^{[i]}K)^T < -0.02Q$$

Ce qui, pour les mêmes raisons que dans la question **1.3** prouve que les valeurs propres des matrices $(A(\xi)+B(\xi)K)^T$ sont à partie réelle inférieur à -0.01 et ce pour tout ξ dans le simplexe. Comme les valeurs propres de $(A(\xi)+B(\xi)K)^T$ sont les mêmes que celles de $(A(\xi)+B(\xi)K)$, le résultat est prouvé.

1.9 Calculer un correcteur $u = -Ky$ tel que les pôles de la boucle fermée sont à partie réelle inférieure à -0.01.

On fait le calcul à l'aide des fonctionnalités de RoMulOC

```
r3 = region('plane', -0.01);
```

```
quiz3 = ctrpb('sf','unique') + dstability( usys, r3 );
K = solvesdp(quiz3)
System  is robustly D-stabilized for region:
Half-plane such that: Re(z)<-0.01
K =
   62.8713  366.0391  110.1389
```

Exercice 2 - Synthèse H_∞

2.1 Proposer une méthode pour résoudre ce problème de synthèse.

Nous avons vu en cours une méthode qui permet la synthèse d'un correcteur dynamique qui minimise la norme H_∞ d'un transfert. Or dans le problème énoncé nous devons :

- Assurer la stabilité robuste vis-à-vis de Δ_1 telle que $\|\Delta_1\| \leq 1$. D'après le théorème du petit gain c'est équivalent à garantir que le transfert $w_1 \to z_1$ est de norme H_∞ strictement inférieure à 1.
- Garantir que la norme induite L_2 du transfert $w_2 \to z_2$ est inférieure à 1. Comme nous sommes en présence de système linéaires c'est équivalent à garantir que la norme H_∞ de ce même transfert est inférieure à 1.

Ces deux spécifications seront remplies simultanément si la norme H_∞ du transfert $w \to z$ est inférieure à 1 en prenant

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad , \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Une méthode de synthèse de correcteur possible est donc de chercher le correcteur $u = K(s)y$ qui minimise la norme H_∞ du transfert $w \to z$. Si la norme obtenue est inférieure à 1 le problème sera résolu. Si elle ne l'est pas, le problème sera peut-être résolu malgré tout mais nous ne pourront nous en assurer qu'en faisant une analyse de la norme de chaque canal $w_1 \to z_1$ et $w_2 \to z_2$ séparément.

2.2 Construire la matrice de transfert du modèle de synthèse.

On construit la matrice qui transforme les "entrées" w, u en les "sorties" z, y :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \hline z \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0.1 & \frac{0.01}{s+1} & \frac{0.1}{s+1} \\ \frac{2}{0.1s+1} & \frac{0.1}{(0.1s+1)(s+1)(s-0.1)} & \frac{1}{(0.1s+1)(s+1)(s-0.1)} \\ 2 & \frac{0.1}{(s+1)(s-0.1)} & \frac{1}{(s+1)(s-0.1)} \end{array} \right] \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \hline u \end{pmatrix}$$

2.3 En déduire une représentation d'état minimale du modèle de synthèse et calculer un correcteur. Quel est l'ordre du correcteur ? Répond-il au problème ?

On fait la suite des calculs dans Matlab

```
G=[0.1, 0.1*tf(1,[1 1]);...
  2, zpk([],[0.1 -1],1)];
F=[1 0;0 tf(1,[0.1 1]);0 1]*G*[1 0 0;0 0.1 1];
ssF=minreal(ss(F))
7 states removed.
ssF =
  a =
             x1        x2        x3
   x1     -1.07   -0.6429     0.467
   x2    0.1621   -0.3684     -2.24
   x3    0.2818    -2.267    -9.462
```

```
  b =
             u1        u2        u3
   x1   -0.1382  -0.03911   -0.3911
   x2    0.9076   -0.1055    -1.055
   x3     3.893   0.02544    0.2544
  c =
             x1        x2        x3
   y1  -0.09287  -0.05791    0.0102
   y2    0.6986    0.9332     4.944
   y3    0.7783   -0.2669   0.08986
  d =
        u1   u2   u3
   y1  0.1    0    0
   y2    0    0    0
   y3    2    0    0
Continuous-time state-space model.
```

Le modèle de synthèse est d'ordre 3. Le correcteur synthétisé sera du même ordre. La synthèse se fait comme suit :

```
[K,CL,GAM,INFO] = hinfsyn(ssF,1,1)
K =
  a =
               x1          x2          x3
   x1   1.533e+05   4.014e+04   4.041e+05
   x2   4.135e+05   1.082e+05    1.09e+06
   x3  -9.972e+04   -2.61e+04  -2.628e+05
  b =
             u1
   x1  0.002904
   x2  0.004997
   x3    0.0551
  c =
               x1          x2          x3
   y1  -1.404e+07  -3.676e+06  -3.701e+07
  d =
       u1
   y1   0
Continuous-time state-space model.

GAM =
    1.2305
```

La norme H_∞ du transfert $w \to z$ est 1.2305 ce qui est supérieur à 1. Nous ne pouvons pas conclure quant aux spécifications. On peut cependant calculer les norme des deux transfert $w_1 \to z_1$ et $w_2 \to z_2$ de la boucle fermée :

```
norm(CL(1,1),inf)
ans =
    1.1745
norm(CL(2,2),inf)
ans =
    0.5476
```

On en déduit que la seconde spécification est en effet satisfaite. La première ne l'est pas. La robustesse à Δ_1 n'est garantie que pour $\|\Delta_1\|_\infty \leq \frac{1}{1.1745} = 0.8514$.

Exercice 3 - μ-analyse

Soit le système suivant $z = H(s)w \quad , \quad H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+2} \\ \dfrac{s-1}{s+2} & \dfrac{2}{s+1} \end{bmatrix}$

Ce système est bouclé avec une incertitude $w = \Delta z$. On s'intéresse au bien posé de cette boucle pour la fréquence $s = j\omega$ avec $\omega = 1$rad/s.

3.1 Calculer la matrice $H(j)$, ses valeurs singulières, ses valeurs propres et le module des ses valeurs propres.

```
H=[tf(1,[1 1]) , tf([1 -1],[1 2]) ; tf([1 1],[1 2]) tf(2,[1 1])];

H1=evalfr(H,j)
H1 =
   0.5000 - 0.5000i  -0.2000 + 0.6000i
   0.6000 + 0.2000i   1.0000 - 1.0000i

s = svd(H1)
s =
    1.6157
    0.8304

e = eig(H1)
e =
   0.9361 - 0.2260i
   0.5639 - 1.2740i

abs(e)
ans =
    0.9629
    1.3933
```

3.2 En supposant $\Delta \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ non structurée, que doit vérifier γ pour que la boucle $\Delta \star H(j)$ soit bien posée pour tout Δ de norme bornée $\|\Delta\|_2 \leq \gamma$?

Cette question suppose de calculer la valeur singulière structurée de $H(j)$ en imposant que l'incertitude est bloc pleine :

$$\mu_{\nabla_1}(H(j)) \quad , \quad \nabla_1 = \{\Delta \in \mathbb{C}^{2\times 2}\}$$

Nous avons vu dans le cours que le calcul est dans ce cas exact et que la valeur singulière structurée est exactement égale à la plus grande des valeurs singulières

$$\mu_{\nabla_1}(H(j)) = \bar{\sigma}(H(j)) = 1.6157$$

On en déduit que la boucle $\Delta \star H(j)$ est dans ce cas bien posée pour tout $\|\Delta\|_2 \leq \frac{1}{1.6157} = 0.6189$.

3.3 En supposant $\Delta = \delta 1_2$ avec $\delta \in \mathbb{C}$ répétée deux fois, que doit vérifier γ pour que la boucle $\Delta \star H(j)$ soit bien posée pour tout δ de module borné $|\delta| \leq \gamma$?

Nous avons vu dans le cours que le calcul est dans ce cas exact et que la valeur singulière structurée est exactement égale au plus grand module des valeurs propres

$$\nabla_2 = \{\delta 1_2 \quad : \quad \delta \in \mathbb{C}\} \quad , \quad \mu_{\nabla_2}(H(j)) = \rho(H(j)) = 1.3933$$

On en déduit que la boucle $\Delta \star H(j)$ est dans ce cas bien posée pour tout $|\delta| \leq \frac{1}{1.3933} = 0.7177$. Cette borne est plus grande que la précédente car $\nabla_2 \subset \nabla_1$.

3.4 En supposant $\Delta = \delta 1_2$ avec $\delta \in \mathbb{R}$ répétée deux fois, que doit vérifier γ pour que la boucle $\Delta \star H(j)$ soit bien posée pour tout δ de valeur absolue bornée $|\delta| \leq \gamma$?

Nous avons vu dans le cours que le calcul est dans ce cas exact et que la valeur singulière structurée est exactement égale à la plus grande valeur absolue des valeurs propres réelles

$$\nabla_3 = \{\delta 1_2 \quad : \quad \delta \in \mathbb{R}\} \quad , \quad \mu_{\nabla_3}(H(j)) = \rho_R(H(j)) = 0$$

Comme les valeurs propres sont complexes toutes les deux, la valeur singulière structurée est nulle. On en déduit que la boucle $\Delta \star H(j)$ est dans ce cas bien posée pour tout $\delta \in \mathbb{R}$, ou encore $|\delta| \leq \infty$. Cette borne est plus grande que la précédente car $\nabla_3 \subset \nabla_2$.

3.5 En supposant $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$ avec $\delta_1 \in \mathbb{C}$ et $\delta_2 \in \mathbb{C}$, pour quelles valeurs de γ pouvez vous assurer que la boucle $\Delta \star H(j)$ est bien posée pour toutes incertitudes bornées par $|\delta_1| \leq \gamma$ et $|\delta_2| \leq \gamma$?

Il s'agit ici de calculer la valeur singulière structurée pour

$$\nabla_4 = \{\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad : \quad \begin{array}{c} \delta_1 \in \mathbb{C} \\ \delta_2 \in \mathbb{C} \end{array} \} \quad , \quad \mu_{\nabla_4}(H(j))$$

Comme $\nabla_2 \subset \nabla_4 \subset \nabla_1$ on sait que $1.3933 \leq \mu_{\nabla_4}(H(j)) \leq 1.6157$. On peut également faire un calcul de bornes supérieures et inférieures à l'aide de la Robust Control Toolbox de Matlab :

```
d1c=ucomplex('d1c',0);
d2c=ucomplex('d2c',0);
[M,DELTA,BLKSTRUCT] = lftdata(diag([d1c,d2c]));
mussv(H1,BLKSTRUCT)
ans =
    1.6157    1.6157
```

Le calcul est ici exact à nouveau car `mussv` renvoie des bornes supérieure et inférieure égales. La boucle $\Delta \star H(j)$ est dans ce cas bien posée pour tout $|\delta_i| \leq 0.6189$ comme dans le premier cas.

3.6 Même question mais avec $\delta_1 \in \mathbb{R}$ et $\delta_2 \in \mathbb{C}$.

Il s'agit ici de calculer la valeur singulière structurée pour

$$\nabla_5 = \{\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad : \quad \begin{array}{c} \delta_1 \in \mathbb{R} \\ \delta_2 \in \mathbb{C} \end{array} \} \quad , \quad \mu_{\nabla_5}(H(j))$$

Comme $\nabla_3 \subset \nabla_5 \subset \nabla_1$ on sait que $0 \leq \mu_{\nabla_5}(H(j)) \leq 1.6157$. On peut également faire un calcul de bornes supérieures et inférieures à l'aide de la Robust Control Toolbox de Matlab :

```
d1r=ureal('d1r',0);
[M,DELTA,BLKSTRUCT] = lftdata(diag([d1r,d2c]));
mussv(H1,BLKSTRUCT)
ans =
    1.5989    1.5989
```

Le calcul est ici exact à nouveau car `mussv` renvoie des bornes supérieure et inférieure égales. La boucle $\Delta \star H(j)$ est dans ce cas bien posée pour tout $|\delta_i| \leq \frac{1}{1.5989} = 0.6254$.

3.7 Même question mais avec $\delta_1 \in \mathbb{C}$ et $\delta_2 \in \mathbb{R}$.
Il s'agit ici de calculer la valeur singulière structurée pour

$$\nabla_6 = \{ \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad : \quad \begin{matrix} \delta_1 \in \mathbb{C} \\ \delta_2 \in \mathbb{R} \end{matrix} \} \quad , \quad \mu_{\nabla_6}(H(j))$$

Comme $\nabla_3 \subset \nabla_6 \subset \nabla_1$ on sait que $0 \leq \mu_{\nabla_6}(H(j)) \leq 1.6157$. On peut également faire un calcul de bornes supérieures et inférieures à l'aide de la Robust Control Toolbox de Matlab :

```
d2r=ureal('d2r',0);
[M,DELTA,BLKSTRUCT] = lftdata(diag([d1c,d2r]));
mussv(H1,BLKSTRUCT)
ans =
    0.8926    0.8598
```

Le calcul donne des valeurs de bornes inférieures supérieurs différentes. On ne peut pas dire s'il est exact ou pas. La boucle $\Delta \star H(j)$ est en tout cas garantie d'être bien posée pour tout $|\delta_i| \leq \frac{1}{0.8926} = 1.1203$.

3.8 Même question mais avec $\delta_1 \in \mathbb{R}$ et $\delta_2 \in \mathbb{R}$.
Il s'agit ici de calculer la valeur singulière structurée pour

$$\nabla_7 = \{ \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad : \quad \begin{matrix} \delta_1 \in \mathbb{R} \\ \delta_2 \in \mathbb{R} \end{matrix} \} \quad , \quad \mu_{\nabla_7}(H(j))$$

Comme $\nabla_3 \subset \nabla_4 \subset \nabla_6$ on sait que $0 \leq \mu_{\nabla_7}(H(j)) \leq 0.8926$. On peut également faire un calcul de bornes supérieure et inférieures à l'aide de la Robust Control Toolbox de Matlab :

```
[M,DELTA,BLKSTRUCT] = lftdata(diag([d1r,d2r]));
mussv(H1,BLKSTRUCT)
ans =
    0.6332         0
```

Le calcul donne des valeurs de bornes supérieurs et inférieures différentes. On ne peut pas dire s'il est exact ou pas. La boucle $\Delta \star H(j)$ est en tout cas garantie d'être bien posée pour tout $|\delta_i| \leq \frac{1}{0.6332} = 1.5793$.