Université Paul Sabatier
Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Examen

2h - tous documents autorisés - Matlab autorisé (avec LFR et RoMulOC toolbox)
Février 2012

Exercice 1 - Modélisation LFT et théorème du petit gain
1.1 Donner la forme rationnelle correspondant à la LFT suivante

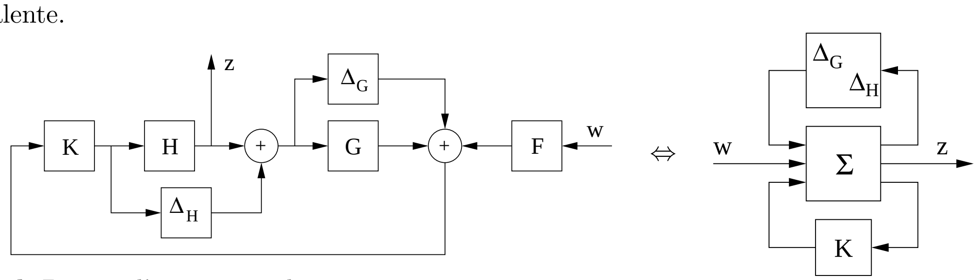
$$\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

1.2 Donner une représentation LFT pour

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\beta} & \frac{\alpha}{1+\beta} \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in [-1\ ,\ 1]$ et $\beta \in [-1\ ,\ 1]$.

1.3.a Soit le schéma-bloc ci-dessous, construire la matrice de transfert Σ de la forme standard équivalente.



1.3.b Donner l'expression de

$$\Sigma \star K = \hat{\Sigma} = \left[\begin{array}{cc|c} \hat{\Sigma}_{11} & \hat{\Sigma}_{12} & \hat{\Sigma}_{13} \\ \hat{\Sigma}_{21} & \hat{\Sigma}_{22} & \hat{\Sigma}_{23} \\ \hline \hat{\Sigma}_{31} & \hat{\Sigma}_{32} & \hat{\Sigma}_{33} \end{array}\right]$$

en fonction de la sensibilité $S = (1 - GHK)^{-1}$.

1.3.c Que peut-on conclure grâce à chacune des conditions suivantes ?

$$\left\| \begin{array}{cc} \hat{\Sigma}_{11} & \hat{\Sigma}_{12} \\ \hat{\Sigma}_{21} & \hat{\Sigma}_{22} \end{array} \right\|_\infty = \gamma_1 \quad , \quad \left\| \hat{\Sigma}_{11} \right\|_\infty = \gamma_2 \quad , \quad \left\| \hat{\Sigma} \right\|_\infty = \gamma_3$$

Exercice 2 - Analyse d'un système polytopique
Soit le système avec deux incertitudes $\delta_1 \in [-1\ ,\ 1]$ et $\delta_2 \in [-1\ ,\ 1]$ décrit par

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|c} -1 + 0.1\delta_1 & 0.2\delta_2 & 1 & 0 \\ -0.2\delta_2 & -1 + 0.1\delta_1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}$$

2.1 Le système est-il robustement stable ?

2.2 Les pôles du systèmes sont-ils de partie réelle inférieure à -0.8 ? Que peut-on en conclure pour le système incertain ?

2.3 Calculer une borne supérieure robuste sur la norme H_∞ de ce système incertain. Que peut-on en conclure ?

Université Paul Sabatier
Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Examen - Corrigé

Février 2012

Exercice 1 - Modélisation LFT

1.1

$$\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$= 1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \left(1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= 1 + \begin{bmatrix} \delta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= 1 + \delta + \frac{\delta}{1-\delta}$$
$$= \frac{1+\delta-\delta^2}{1-\delta}$$

1.2 Pour commencer on peut noter que le problème est mal posé. Pour $\beta = -1$ la fraction rationnelle est indéfinie. Cela n'empêche as de construire la LFT. Sa construction est indépendante des intervalles auxquels appartiennent les paramètres.

Solution 1 : utiliser la LFR toolbox

```
alf=lfr('alpha','ltisr',1,[-1 1],'minmax');
bet=lfr('beta','ltisr',1,[-1 1],'minmax');
>> [1/(1+bet) alf^2/(1+bet);0 alf]

a =
     0     1     0     0     0
     0     0     0     0    -1
     0     0     0     0     0
     0     0     0    -1     0
     0     0     0     0    -1

b =
     0     0
     0     1
     0     1
     1     0
     0     1

c =
     1     0     0    -1     0
     0     0     1     0     0

d =
     1     0
     0     0

LFR-object with 2 output(s), 2 input(s) and 0 state(s).
Uncertainty blocks (globally (5 x 5)):
 Name  Dims  Type   Real/Cplx   Full/Scal   Bounds
 alpha 3x3   LTI       r           s        [-1,1]
 beta  2x2   LTI       r           s        [-1,1]
```

c'est à dire

$$\begin{bmatrix} \alpha & & & & \\ & \alpha & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \beta & \\ & & & & \beta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Solution 2 : Le faire à la main. On développe la matrice pour faire simple

$$\begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{1+\beta} u_1 + \frac{\alpha^2}{1+\beta} u_2 \\ y_2 = \alpha u_2 \end{array}$$

sous forme descripteur c'est aussi

$$\begin{array}{l} y_1 + \beta y_1 = u_1 + \alpha^2 u_2 \\ y_2 = \alpha u_2 \end{array}$$

On pose les bouclages suivants

$$\begin{array}{c} w_1 = \alpha u_2 = \alpha z_1 \quad , \quad z_1 = u_2 \\ w_2 = \alpha^2 u_2 = \alpha w_1 = \alpha z_2 \quad , \quad z_2 = w_1 \\ w_3 = \beta y = \beta z_3 \quad , \quad z_3 = y_1 \end{array}$$

on en déduit les équations

$$\begin{array}{l} z_1 = u_2 \\ z_2 = w_1 \\ z_3 = y_1 = w_2 - w_3 + u_1 \\ y_1 = w_2 - w_3 + u_1 \\ y_2 = w_1 \end{array}$$

c'est à dire la forme LFT (minimale)

$$\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1.3 On pose u et y les sorties/entrées du correcteur :

$$u = Ky$$

ainsi que w_H, z_H, w_G et z_G les entrées sorties des incertitudes :

$$w_H = \Delta_H z_H \quad , \quad w_G = \Delta_G z_G.$$

La matrice de transfert Σ est telle que

$$\begin{pmatrix} z_G \\ z_H \\ z \\ y \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} w_G \\ w_H \\ w \\ u \end{pmatrix}$$

et à la lecture du schéma on trouve

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & H \\ \hline 1 & G & F & GH \end{array}\right].$$

Et on en déduit

$$\Sigma \star K = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} H \\ 1 \\ \hline H \end{array}\right] K(1-GHK)^{-1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & G & F \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{cc|c} HKS & 1+HKSG & HKSF \\ KS & KSG & KSF \\ \hline HKS & HKSG & HKSF \end{array}\right]$$

où $S = (1-GHK)^{-1}$ est la fonction de sensibilité.

La norme H_∞ de la matrice de transfert entre les signaux des incertitudes est inférieur à γ_1 donc d'après le théorème du petit gain le système est stable pour toute incertitude

$$\left\| \begin{array}{cc} \Delta_G & \\ & \Delta_H \end{array} \right\|_\infty < \frac{1}{\gamma_1}$$

Donc pour toutes incertitudes $\|\Delta_G\|_\infty < \frac{1}{\gamma_1}$, $\|\Delta_H\|_\infty < \frac{1}{\gamma_1}$. Comme c'est une condition uniquement suffisante, il est possible que le système soit quand même stable pour des incertitudes plus grandes.

La condition de norme H_∞ sur le premier bloc de $\hat{\Sigma}$ indique que pour des incertitudes Δ_H nulles le système est stable pour tout $\|\Delta_G\|_\infty < \frac{1}{\gamma_2}$. Les incertitudes $\Delta_H = 0$ faisant partie de $\|\Delta_H\|_\infty < \frac{1}{\gamma_1}$ on peut en déduire que $\frac{1}{\gamma_1} \leq \frac{1}{\gamma_2}$.

La condition de norme H_∞ sur $\hat{\Sigma}$ au complet indique que même si l'on boucle le système avec une troisième incertitude $w = \Delta z$, le système est robustement stable pour toutes incertitudes vérifiant $\|\Delta_G\|_\infty < \frac{1}{\gamma_3}$, $\|\Delta_H\|_\infty < \frac{1}{\gamma_3}$, $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_3}$. Les incertitudes $\Delta = 0$ faisant partie de $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_3}$ on peut en déduire que $\frac{1}{\gamma_3} \leq \frac{1}{\gamma_1}$.

Exercice 2 - Analyse d'un système polytopique

On définit le système polytopique dans Matlab/RoMulOC par exemple de la manière suivante :

```
>> cntr=ssmodel;
>> cntr.A=[-1 0;0 -1];
>> cntr.bw=[1 ;0];
>> cntr.bu=[0 ;1];
>> cntr.Cz=[0 1];
>> cntr.Cy=eye(2);
>> ax=ssmodel(0,cntr);
>> ax(1).A=[0.1 0;0 0.1];
>> ax(2).A=[0 0.2;-0.2 0];
>> spar=uparal(cntr,ax);
>> spol=upoly(spar);
```

2.1 Pour faire l'analyse de stabilité robuste on peut construire à la main les LMI correspondant aux conditions de Lyapunov avec une fonction de Lyapunov unique pour tous les sommets, ou bien utiliser RoMulOC qui le fait tout seul :

```
>> quiz = ctrpb('a','unique')+stability(spol);
>> solvesdp(quiz)
SeDuMi 1.3 by AdvOL, 2005-2008 and Jos F. Sturm, 1998-2003.
Alg = 2: xz-corrector, theta = 0.250, beta = 0.500
eqs m = 3, order n = 11, dim = 21, blocks = 6
nnz(A) = 31 + 0, nnz(ADA) = 9, nnz(L) = 6
 it :     b*y       gap    delta  rate   t/tP*  t/tD*   feas cg cg  prec
  0 :            2.87E+01 0.000
  1 :   0.00E+00 1.59E+00 0.000 0.0556 0.9900 0.9900   0.66  1  1  1.4E+00
```

```
  2 :   0.00E+00 1.02E-03 0.000 0.0006 0.9999 0.9999   0.97  1  1  9.2E-04
  3 :   0.00E+00 1.02E-10 0.000 0.0000 1.0000 1.0000   1.00  1  1  9.2E-11

iter seconds digits       c*x               b*y
  3      0.3   0.8 -1.4269274380e-11  0.0000000000e+00
|Ax-b| =   5.7e-11, [Ay-c]_+ =   0.0E+00, |x|=  1.5e-11, |y|=  1.6e+00

Detailed timing (sec)
   Pre          IPM          Post
5.394E-01    4.876E-01    8.052E-02
Max-norms: ||b||=0, ||c|| = 3.333333e-01,
Cholesky |add|=0, |skip| = 0, ||L.L|| = 1.

Robustly stable
```

2.2 Là encore le plus simple est de faire appel à RoMulOC :

```
>> quiz = ctrpb('a','unique')+dstability(spol, region('plane',-0.8));
>> solvesdp(quiz)
SeDuMi 1.3 by AdvOL, 2005-2008 and Jos F. Sturm, 1998-2003.
Alg = 2: xz-corrector, theta = 0.250, beta = 0.500
eqs m = 20, order n = 19, dim = 69, blocks = 6
nnz(A) = 127 + 0, nnz(ADA) = 292, nnz(L) = 156
 it :     b*y       gap    delta  rate   t/tP*  t/tD*   feas cg cg  prec
  0 :            1.67E+01 0.000
  1 :   0.00E+00 4.23E+00 0.000 0.2537 0.9000 0.9000   0.59  1  1  5.9E+00
  2 :   0.00E+00 4.06E-01 0.000 0.0958 0.9900 0.9900   0.73  1  1  6.5E-01
  3 :   0.00E+00 2.97E-04 0.000 0.0007 0.9999 0.9999   0.97  1  1  4.8E-04
  4 :   0.00E+00 2.99E-11 0.000 0.0000 1.0000 1.0000   1.00  1  1  4.8E-11

iter seconds digits       c*x               b*y
  4      0.1   1.4 -2.8572481250e-12  0.0000000000e+00
|Ax-b| =   4.4e-11, [Ay-c]_+ =   0.0E+00, |x|=  1.9e-11, |y|=  1.6e+01

Detailed timing (sec)
   Pre          IPM          Post
5.421E-03    4.773E-02    3.269E-03
Max-norms: ||b||=0, ||c|| = 5.000000e-02,
Cholesky |add|=0, |skip| = 0, ||L.L|| = 1.15982.

Robustly D-stable for region:
Half-plane such that: Re(z)<-0.8
```

On en déduit que les modes du système sont tous exponentiellement stable, de convergence plus rapide que $e^{-0.8t}$ c'est à dire avec une constante de temps plus rapide que $1/0.8 = 1.25s$.

2.3 Encore une fois faisons appel à RoMulOC :

```
>> quiz=ctrpb('a','poly')+hinfty(spol);
>> solvesdp(quiz)
SeDuMi 1.3 by AdvOL, 2005-2008 and Jos F. Sturm, 1998-2003.
Alg = 2: xz-corrector, theta = 0.250, beta = 0.500
eqs m = 23, order n = 23, dim = 105, blocks = 6
nnz(A) = 163 + 0, nnz(ADA) = 421, nnz(L) = 222
 it :     b*y       gap    delta  rate   t/tP*  t/tD*   feas cg cg  prec
```

```
  0 :            3.92E+00 0.000
  1 :  -6.29E-01 1.40E+00 0.000 0.3569 0.9000 0.9000   2.24  1  1  3.6E+00
  2 :  -1.00E-01 4.08E-01 0.000 0.2916 0.9000 0.9000   2.63  1  1  5.7E-01
  3 :  -5.13E-02 1.03E-01 0.000 0.2534 0.9000 0.9000   1.37  1  1  1.3E-01
  4 :  -5.31E-02 2.82E-02 0.000 0.2725 0.9000 0.9000   0.88  1  1  3.9E-02
  5 :  -5.41E-02 5.71E-03 0.000 0.2026 0.9000 0.9000   0.79  1  1  8.8E-03
  6 :  -5.53E-02 1.66E-04 0.000 0.0290 0.9900 0.9900   0.92  1  1  2.7E-04
  7 :  -5.54E-02 1.75E-05 0.028 0.1057 0.9450 0.9450   1.01  1  1  2.8E-05
  8 :  -5.54E-02 3.98E-06 0.000 0.2275 0.9000 0.9000   1.01  1  2  6.4E-06
  9 :  -5.54E-02 1.47E-07 0.129 0.0368 0.9900 0.9900   1.01  1  2  2.3E-07
 10 :  -5.54E-02 1.23E-08 0.000 0.0836 0.9900 0.9900   1.00  2  3  1.9E-08
 11 :  -5.54E-02 6.56E-10 0.000 0.0534 0.9900 0.9900   1.00  4  7  1.0E-09
 12 :  -5.54E-02 1.14E-10 0.000 0.1738 0.9000 0.9000   1.00 11 10  1.8E-10

iter seconds digits       c*x               b*y
 12      0.3   9.0 -5.5363321837e-02 -5.5363321786e-02
|Ax-b| =   3.5e-10, [Ay-c]_+ =   1.4E-11, |x|=  1.5e+00, |y|=  2.8e+00

Detailed timing (sec)
   Pre          IPM          Post
4.979E-03    2.032E-01    1.539E-03
Max-norms: ||b||=1, ||c|| = 1,
Cholesky |add|=1, |skip| = 1, ||L.L|| = 1.73539e+07.

Feasibility is not strictly determined
Worst constraint residual is -1.35259e-11 < 0
0.235294 (=sqrt(double(CTRPB.vars{2}))) may be a guaranteed Hinfty norm
```

On en déduit par le théorème du petit gain que l'on peut réaliser un bouclage $w = \Delta z$ sur ce système. Le système ainsi bouclé sera stable robustement pour toute incertitude $\delta_1 \in [-1\ ,\ 1]$, $\delta_2 \in [-1\ ,\ 1]$ et $\|\Delta\|_\infty \leq 1/0.2353 = 4.25$.