Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Toulouse Janvier-Février 2012

Dimitri PEAUCELLE - LAAS-CNRS - Université de Toulouse

- Enseignant : Dimitri Peaucelle, chargé de recherche au LAAS-CNRS
  - Contacts : 05 61 33 63 09 - peaucelle@laas.fr
  - Page web : `homepages.laas.fr/peaucell`
- Organisation du cours
  - Cours magistral avec supports de cours sur planches : 12h
    - 10, 11, 18, 25, 31 janvier et 7 février
  - Exercices avec support MATLAB : 8h
    - 17, 24 janvier et 1, 8 février
  - TP avec support MATLAB : 6h
    - 9, 17 février
  - Examen, tous documents autorisés et avec support MATLAB : 2h
    - x février

Commande robuste

- Automatique / Théorie de la commande
- Commande de systèmes dynamiques
  - Représentés par des équations différentielles (systèmes à temps continu)
  - ou par des équations récurrentes (systèmes à temps discret)
- Modèles non-linéaires dans l'espace d'état

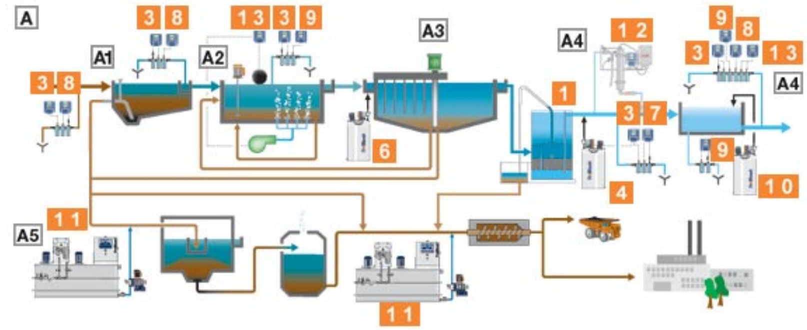
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u,t) \\ y(t) = g(x,u,t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_{k+1} = f(x,u,k) \\ y_k = g(x,u,k) \end{cases}$$

  - x : état du système
  - u : commandes du système (actionneurs)
  - y : mesures du système (capteurs)
- Modèles linéaires dans l'espace d'état et matrices de transfert (MIMO)

$$\Sigma(s) \sim \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \Sigma(z) \sim \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$

Systèmes dynamiques, exemples

ⓒ AIRBUS S.A.S. - H. Goussé

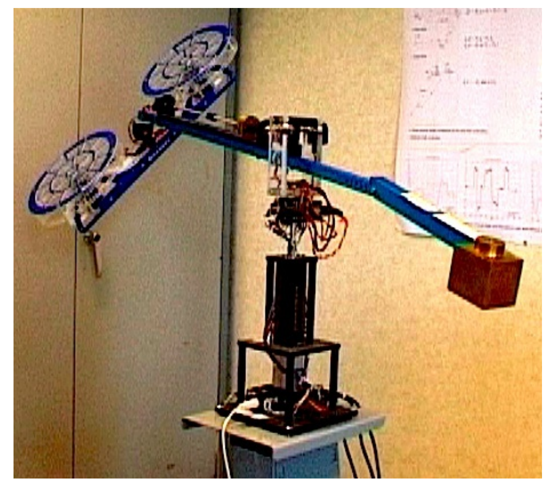


ⓒ ProMinent

ⓒ CNES - ill. D. Ducos

HRP-2 Promet

@ Astrium - Ariane 5



@ Quanser - 3DOF hélico

- Modélisation pour la commande

- Isoler un comportement dynamique
  - Découplage par axes - mouvement longitudinaux/latéraux d'un avion
  - Découplage temporel - incidence/remplissage réservoir d'un lanceur
  - Découplage par modes - rejoindre destination / positionnement précis
  - Découplage fréquentiel - échantillonnage, dynamiques composants

- Définir trajectoire/position de référence
  - Termes non-linéaires négligés, simplifiés ou linéarisés
  - Enoncé de performances à atteindre
  - Enoncé de contraintes à satisfaire

- Tenir compte de méconnaissances
  - Tous les phénomènes physiques n'ont pas de description concise
  - Paramètres varient d'un produit manufacturé à l'autre
  - Identification de paramètres est toujours entachée d'erreur

- Les modèles obtenus

- dépendent de paramètres θ
  - (mode, état d'une dynamique lente, trajectoire de référence...)
  - connus, choisis ou mesurables (avec une certaine précision)
- dépendent d'incertitudes δ
  - (dynamiques négligées, approximations, méconaissances...)
  - inconnus mais bornés, à dynamiques nulles, lentes ou bornées
- sont influencés par des perturbations w
  - (phénomènes, couplages, fréquences négligées... et trajectoire)
  - inconnus, avec caractéristiques fréquentielles, temporelles, énergétiques...
- doivent satisfaire des contraintes sur certaines composantes z
  - (performances, validité des hypothèses de modélisation...)
  - caractéristiques fréquentielles, temporelles, énergétiques...

- Modèles non-linéaires dans l'espace d'état

$$\Sigma(\theta,\delta) : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u,t,w,\theta,\delta) \\ y(t) = g(x,u,t,w,\theta,\delta) \\ z(t) = h(x,u,t,w,\theta,\delta) \end{cases}$$

- Etapes de modélisation permettent simplifications
  - Découplage temporel $f(x,u,t) \longrightarrow f(x,u,\theta)$
  - Linéarisation $f(x,u,\theta) \longrightarrow A(\delta,\theta)x + B(\delta,\theta)u$

    avec δ bornée sous contraintes sur certaines composantes z de l'état
  - ...
- Exemples
  - $\cos(t)x(t) \longrightarrow \theta(t)x(t)$ avec $\theta \in [-1 \;\; 1]$
  - $x_1(t)x_2(t) \longrightarrow \delta(t)x_2(t)$ avec $\delta \in [-1 \;\; 1]$ si $z = x_1 \in [-1 \;\; 1]$

- Typologie de modèles :

- Système physique réel - parfois accessible pour expérimentation
- Modèle physique idéal - pour modélisation mathématique

  (Agrégat de systèmes élémentaires)
- Modèle mathématique idéal - pour simulation sur calculateurs

  (Modèle de connaissance obtenu par application des lois de la physique)
- Modèle mathématique réduit - pour simulations rapides

  (Modèle de comportement obtenu par découplage, linéarisation, réduction...)
- Modèle réduit incertain - pour analyse robuste, pessimiste

  (Modèle mathématique réduit, simplifié, souvent LTI)

  (erreurs contenues dans incertitudes et spécifications de performance)
- Modèle réduit nominal - pour la synthèse de lois de commande

  (Modèle sans incertitudes avec un seul critère de performance)

■ Commande classique : synthèse pour $\theta = \theta_0$ fixé, sans incertitudes $\delta = 0$

$$\Sigma(\theta_0, 0) : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t, w, \theta_0, 0) \\ y(t) = g(x, u, t, w, \theta_0, 0) \\ z(t) = h(x, u, t, w, \theta_0, 0) \end{cases} \qquad \Sigma_c : \begin{cases} \dot{\eta}(t) = f_c(\eta, y, t) \\ u(t) = g_c(\eta, y, t) \end{cases}$$

● Exemple : synthèse LQG - $\min \|z\|_2$ sous w bruit blanc gaussien

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta_0}(t)x(t) + B_{\theta_0}(t)u(t) + w_1(t) \\ y(t) = C_{\theta_0}(t)x(t) + w_2(t) \\ z_1(t) = Q^{1/2}(t)x(t) \\ z_2(t) = R^{1/2}(t)u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = (A_{\theta_0}(t) - L(t)C_{\theta_0}(t) - B_{\theta_0}(t)K(t))\eta(t) + L(t)y(t) \\ u(t) = -K(t)\eta(t) \end{cases}$$

- Commande classique : synthèse pour $\theta = \theta_0$ fixé, sans incertitudes $\delta = 0$
  - Commande en boucle fermée est intrinsèquement robuste, mais ...
    - Stabilité préservée en réponse à des perturbations non-modélisées, faibles
    - Comportement inchangé pour petits écarts de θ et δ
    - Performances fortement dégradées pour écarts moyens
    - Risque d'instabilité pour grands écarts
- Système de commande robuste :

Un système de commande est dit robuste s'il conserve ses propriétés malgré les incertitudes et les perturbations affectant le système

  - Tenir compte des écarts lors de la conception : Synthèse robuste
  - Valider robustesse d'une loi de commande : Analyse robuste

- 10 janvier : Introduction + rappels - cours
- 11 janvier : Modèles incertains - cours
- 17 janvier : Modèles incertains - exercices
- 18 janvier : Stabilité robuste par fonctions de Lyapunov - cours
- 24 janvier : Stabilité robuste - exercices - salle TP
- 25 janvier : Théorème du petit gain - cours
- 31 janvier : μ-analyse - cours
- 1 février : μ-analyse - exercices - salle TP
- 7 février : Synthèse robuste - cours
- 8 février : Synthèse robuste - exercices - salle TP
  - 9 février : Modélisation d'un problème de performance robuste - TP
  - 17 février : Synthèse robuste et analyse robuste de la boucle fermée - TP

Références

[Apkarian(2012)] P. Apkarian. Elements de la théorie de la commande robuste, 2012. URL pierre.apkarian.free.fr/COURS/polysae.pdf.

[Arzelier()] D. Arzelier. Commande robuste. URL http://homepages.laas.fr/arzelier/cours.html.

[Barmish(1985)] B. Barmish. Necessary and sufficient conditiond for quadratic stabilizability of an uncertain system. *J. Optimization Theory and Applications*, 46(4), Aug. 1985.

[Chesi(2010)] G. Chesi. LMI techniques for optimization over polynomials in control : a survey. *IEEE Trans. Aut. Control*, 55(11) :2500–2510, 2010.

[Duc and Font(1999)] G. Duc and S. Font. *Commande H_∞ et μ-analyse : des outils pour la robustesse*. Hermes Science, Paris, 1999.

[Laroche()] E. Laroche. Commande robuste. URL http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student/#MIRIV.

[McFarlane and K.(1990)] D. McFarlane and G. K. *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, 1990.

[Peaucelle et al.(2000)Peaucelle, Arzelier, Bachelier, and Bernussou] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1) :21–30, May 2000.

[Scherer()] C. Scherer. Theory of robust control. URL `http://www.ist.uni-stuttgart.de/education/courses/robust/overview.shtml`.

[Skogestad and Postlethwaite(2005)] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. Wiley, 2nd ed. edition, 2005.

[Tempo et al.(2005)Tempo, Calafiore, and Dabbene] R. Tempo, G. Calafiore, and F. Dabbene. *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems*. Springer-Verlag, 2005.

[Tits and Fan(1995)] A. Tits and M. Fan. On the small μ theorem. *Automatica*, 31 :1199–1201, 1995.

[Zhou et al.(1996)Zhou, Doyle, and Glover] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and Opimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Annexe - Normes des systèmes

■ Les normes spatiales et temporelles

● Motivation : afin d'évaluer à l'aide d'un nombre unique une mesure globale de la "taille" d'un vecteur, d'une matrice, d'un signal ou d'un système

● Définition

Une norme est une fonction $||.||$ *définie sur un espace vectoriel* E*,* $||e|| \; : \; E \rightarrow \; \mathbb{R}^+$ *vérifiant les propriétés axiomatiques :*

1- $\forall \, e \in E \;\; : \;\; ||e|| \geq 0$

2- $||e|| = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; e = 0$

3- $\forall \, \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall \, e \in E, \; ||\alpha e|| = |\alpha|.||e||$

4- $\forall \, e_1, \; e_2 \in E, \;\; ||e_1 + e_2|| \leq ||e_1|| + ||e_2||$

▲ Nota : E espace de vecteurs, matrices, signaux temporels, systèmes linéaires

- Normes des vecteurs : $E = \mathbb{C}^n$

$$||e||_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i|^p \right)^{1/p} & \text{pour } 1 \leq p < \infty \\ \\ \max_{1 \leq i \leq n} |e_i| \text{ pour } p = \infty \end{cases}$$

Exemple : $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}'$

$$||e||_1 = 4 \text{ (taxi cab norm)}$$
$$||e||_2 = \sqrt{10} \text{ (norme Euclidienne)}$$
$$||e||_\infty = 3$$

$$>> \mathbf{norm(e, p)}$$

Normes des matrices : $E = \mathbb{C}^{n \times m}$

Condition de consistence

$||A||$ *est une norme matricielle si elle vérifie en plus des propriétés élémentaires la propriété de sous-multiplicativité :*

$$||AB|| \leq ||A||.||B||$$

Exemples norme matricielles : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$||A||_{\text{sum}} = \sum_{i,j} |a_{ij}| = 9 \ , \ \ ||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^* A)} = \sqrt{41}$$

Exemple norme généralisée : $||A||_{\text{max}} = \max_{i,j} |a_{ij}| = 6$

$$B = C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ \ \|BC\|_{\text{max}} = 2 > \|B\|_{\text{max}}.\|C\|_{\text{max}} = 1$$

■ Normes induites de matrices : $E = \mathbb{C}^{n\times m}$

$$||A||_{ip} = \max_{e\neq 0} \frac{||Ae||_p}{||e||_p} = \max_{||e||_p\leq 1} ||Ae||_p = \max_{||e||_p=1} ||Ae||_p$$

▲ Exemples : $>> \ \mathbf{A = [1 \ -2; 0\ 6]; norm(A, p)}$

$$||A||_{i1} = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}|\right) = 8$$

$$||A||_{i\infty} = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}|\right) = 6$$

$$||A||_{i2} = \overline{\sigma}(A) = \sqrt{\max_i |\lambda_i(A^*A)|} = 6.3326$$ val. singulière max. ou norme spectrale

▲ Nota : $\sup\limits_{e\neq 0} \dfrac{\|Ae\|_p}{\|e\|_p} = \max\limits_{e\neq 0} \dfrac{\|Ae\|_p}{\|e\|_p}$ car $\{x \ : \ \|x\|_p \leq 1\}$ est *compact* et $\| \bullet \|_p$ *continue*.

▲ Nota : De plus $\max\limits_{e\neq 0} \dfrac{\|Ae\|_p}{\|e\|_p} = \max\limits_{\|f\|_p=1, \lambda\neq 0} \dfrac{\|A\lambda f\|_p}{\|\lambda f\|_p} = \max\limits_{\|f\|_p=1} \|Af\|_p$.

- Les valeurs singulières d'une matrice

$A \in \mathbb{C}^{l\times m}$ peut être factorisée à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières :

$$A = U\Sigma V^* \qquad U \in \mathbb{C}^{l\times l} \quad U^* = U^{-1} \quad V \in \mathbb{C}^{m\times m} \quad V^* = V^{-1}$$

Σ est formée par une matrice diagonale des valeurs singulières σ_i dans l'ordre décroissant

- $l \geq m$:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c} \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_q) \\ \hline 0_{l-m\times m} \end{array}\right] \qquad \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$$

- $l \leq m$:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_q) & 0_{l\times m-l} \end{array}\right]$$

avec $\overline{\sigma} = \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_q = \underline{\sigma} > 0$ et $\min(l, m) \geq \mathrm{rang}(A) = q$,

- Valeurs singulières : exemple

```
>>A=[-1 0 2;1 0 -2;0 1 -1;0 0 1];[U,S,V] = SVD(A)
U =
   -0.6485    0.2324   -0.1594    0.7071
    0.6485   -0.2324    0.1594    0.7071
    0.2941    0.9398    0.1739         0
   -0.2690   -0.0932    0.9586    0.0000
S =
    3.4259         0         0
         0    1.0536         0
         0         0    0.3918
         0         0         0
V =
    0.3786   -0.4412    0.8137
    0.0858    0.8920    0.4437
   -0.9216   -0.0982    0.3756
```

- Propriétés des valeurs singulières

- $\overline{\sigma}(A^{-1}) = 1/\underline{\sigma}(A)$
- $\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \overline{\sigma}(A)$
- $\overline{\sigma}(AB) \leq \overline{\sigma}(A)\overline{\sigma}(B)$
- $\underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(AB)$
- $\sigma_i(A) - \overline{\sigma}(A) \leq \overline{\sigma}(A+B) \leq \sigma_i(A) + \overline{\sigma}(B)$
- $\underline{\sigma}(A) - 1 \leq \underline{\sigma}(A + \mathbf{1}) \leq \underline{\sigma}(A) + 1$
- $AA^* \leq \overline{\sigma}(A)^2\mathbf{1}$ et $A^*A \leq \overline{\sigma}(A)^2\mathbf{1}$ (inégalités matricielles)

▲ Rayon spectral : $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$

- $\rho(A) \leq \overline{\sigma}(A)$

- Propriétés entre les normes de matrices $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$

- $\overline{\sigma}(A) \leq ||A||_F \leq \sqrt{min(n,m)}\overline{\sigma}(A)$
- $\overline{\sigma}(A) \leq \sqrt{||A||_{i1}||A||_{i\infty}}$
- $\frac{1}{\sqrt{m}}||A||_{i\infty} \leq \overline{\sigma}(A) \leq \sqrt{n}||A||_{i\infty}$
- $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_{i1} \leq \overline{\sigma}(A) \leq \sqrt{m}||A||_{i1}$
- $max\{\overline{\sigma}(A)\ ,\ ||A||_F, ||A||_{i1}, ||A||_{i\infty}\} \leq ||A||_{sum}$

Normes des signaux

Un signal $f(t)$ est une fonction du temps, continue par morceaux, $f \ : \ [0\ ,\ +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$

1- Norme 1 ($\mathcal{L}_1[0\ ,\ +\infty)$) : $||f||_1 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} |f_i(t)| dt = \sum_{i=1}^{n} ||f_i||_1 = \int_0^\infty \|f(t)\|_1 dt$

Interprétation : représente la consommation d'une ressource

2- Norme 2 ($\mathcal{L}_2[0\ ,\ +\infty)$) : $||f||_2^2 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} f_i(t)^2 dt = \sum_{i=1}^{n} ||f_i||_2^2 = \int_0^\infty \|f_i(t)\|_2^2 dt$

Interprétation : son carré représente l'énergie du signal

3- Norme ∞ ($\mathcal{L}_\infty[0\ ,\ +\infty)$) : $||f||_\infty = \sup_t \left[\max_{1\leq i \leq n} |f_i(t)| \right] = \max_{1\leq i\leq n} ||f_i||_\infty = \sup_t \|f(t)\|_\infty$

Interprétation : pire des cas

$$f(t) = 1 - e^{-t} \quad , \quad ||f||_\infty = 1$$

Norme des signaux : exemple

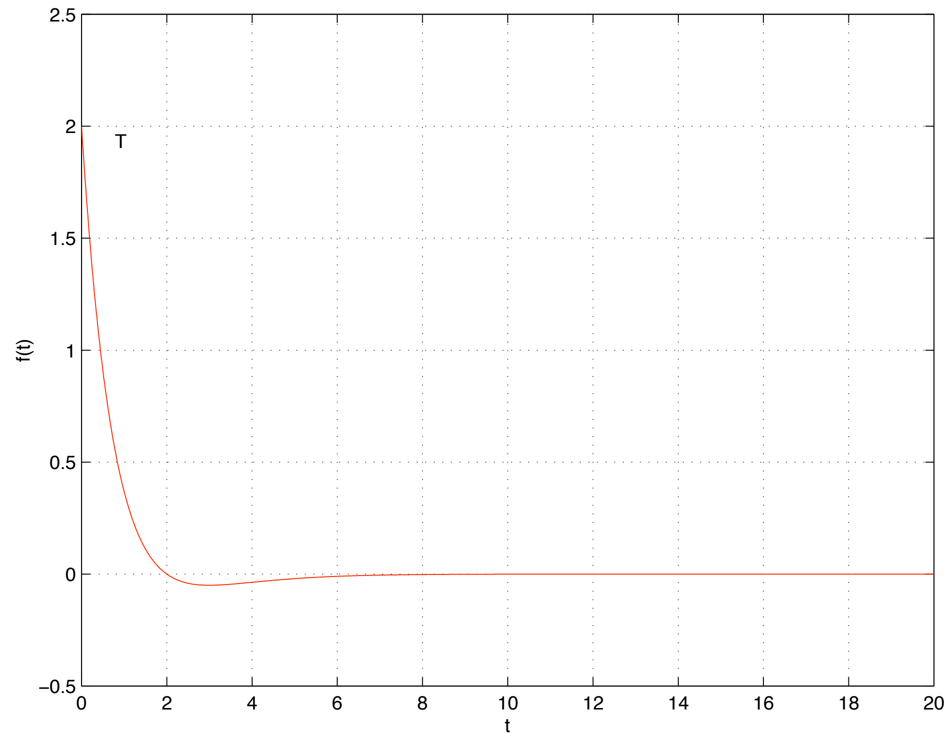
Soit le signal $f(t) = (T - t)e^{-t}$,

$T > \text{Lambert } W(1/e)$

La fonction de Lambert :

$W = h^{-1}$

$h \ : \ x \rightarrow xe^{x}$ sur $[-1/e \ , \ +\infty[$



- $||f(t)||_1 = 2e^{-T} + T - 1$
- $||f(t)||_2 = \dfrac{T^2}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{T}{2}$
- $||f(t)||_\infty = T$

Espaces de fonctions - Espaces de Hardy

- $\mathcal{H}_2$: espace des fonctions $s \in \mathbb{C} \mapsto \hat{f}(s) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ telles que

$$||\hat{f}||_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{trace}\left[\hat{f}^*(j\omega)\hat{f}(j\omega) \right] d\omega \right)^{1/2} < \infty$$

- Théorème de Paley-Wiener sur la transformée de Laplace

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{L}_2[0\ ,\ +\infty) & \rightarrow & \mathcal{H}_2 \\ f & \mapsto & \hat{f}(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \end{array}$$

- Théorème de Parseval : $||f||_2 = ||\hat{f}||_2$

- $\mathcal{RH}_2$: sous-ensemble des fonctions rationnelles strictement propres et stables

  - Exemples :

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \in \mathcal{RH}_2 \quad \frac{s+1}{(s+2)(s-3)} \notin \mathcal{RH}_2 \quad \frac{(s-1)}{(s+1)} \notin \mathcal{RH}_2$$

Espaces de fonctions - Espaces de Hardy

- $\mathcal{H}_\infty$: espace des fonctions $s \in \mathbb{C} \mapsto \hat{f}(s) \in \mathbb{C}^{n\times m}$

$$||\hat{f}||_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \overline{\sigma}(\hat{f}(j\omega)) < \infty$$

- Nota : $\mathcal{H}_\infty$ est un espace de Banach et n'est pas un espace de Hilbert.
  (On ne peut pas définir de notion de produit scalaire)

- $\mathcal{RH}_\infty$: sous-ensemble des fonctions rationnelles propres et stables

$$||\hat{f}||_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \overline{\sigma}(\hat{f}(j\omega)) = \sup_{Re(s)>0} \overline{\sigma}(\hat{f}(s))$$

- Exemples :

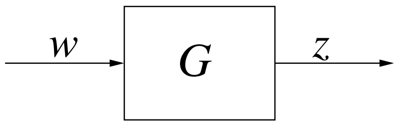
$$\frac{s+1}{(s+2)(s-3)} \notin \mathcal{RH}_\infty \qquad \frac{(s-1)}{(s+1)} \in \mathcal{RH}_\infty$$

$$\begin{bmatrix} s/(s+3) \\ 1/(s-1) \end{bmatrix} \notin \mathcal{RH}_\infty \qquad \begin{bmatrix} 1 & (s-1)/(s+1) & 1/(s+2) \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty$$

■ Motivation : Afin d'évaluer la performance d'un système, étant donnée l'information sur les signaux d'entrée w, quelle grandeur peut prendre le vecteur de sortie z ?

Quels sont les signaux d'entrée w considérés ? et qu'entend-on par taille ?

Quelques ensembles de signaux :



- w est constitué d'impulsions $\delta(t - \tau_i)$
- $w(t) = \sin(\omega t)$ pour ω fixée
- w est d'énergie finie $||w||_2 \leq 1$
- w est borné en amplitude $||w||_\infty \leq 1$
- w est un bruit blanc de moyenne nulle

La taille d'un signal (système) est précisée par l'utilisation de normes des signaux (systèmes)

Norme $\mathcal{H}_2$ des systèmes :

Soit $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$ fonction de transfert stable, strictement propre, causale

Monovariable :

$$||G||_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = ||g||_2$$

Multivariable :

$$||G||_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{trace}\left[G^*(j\omega)G(j\omega)\right] d\omega = \sum_i ||g_i||_2^2$$

Interprétations :

- L'énergie du signal de sortie en réponse à un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance 1
- La norme $\mathcal{L}_2$ de la réponse impulsionnelle du système à une entrée impulsionnelle sur chaque entrée

Calcul de la norme $\mathcal{H}_2$

La norme $\mathcal{H}_2$ d'un système stable est finie ssi il est strictement propre et n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire

$$G(s) \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \quad \text{Equations de Lyapunov :} \quad \begin{array}{l} AW_c + W_cA' + BB' = 0 \\ A'W_o + W_oA + C'C = 0 \end{array}$$

$$W_c = \int_0^\infty e^{At}BB'e^{A't}dt \quad \text{grammien de commandabilité}$$

$$W_o = \int_0^\infty e^{A't}C'Ce^{At}dt \quad \text{grammien d'observabilité}$$

$$||G||_2^2 = \text{trace}\,[CW_cC'] = \text{trace}\,[B'W_oB]$$

- Exemple de calcul de la norme $\mathcal{H}_2$

```
>> A=[-1 2 0;0 -2 1;0 0 -3];B=[0 1;1 0; 1 1];C=[1 0 -1];D=[0 0
>> sys=ss(A,B,C,D);
>> h2=norm(sys,2)
h2 =
     0.9129
```

```
>> A=[-1 2 0;0 -2 1;0 0 -3];B=[0 1;1 0; 1 1];C=[1 0 -1];
>> Wc=lyap(A,B*B')
Wc =
     1.2667    0.3833    0.3833
     0.3833    0.3833    0.2667
     0.3833    0.2667    0.3333
>> h2=sqrt(trace(C*Wc*C'))
h2 =
     0.9129
```

■ Norme $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes :

Soit $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$ fonction de transfert stable, propre, causale

▲ Monovariable :

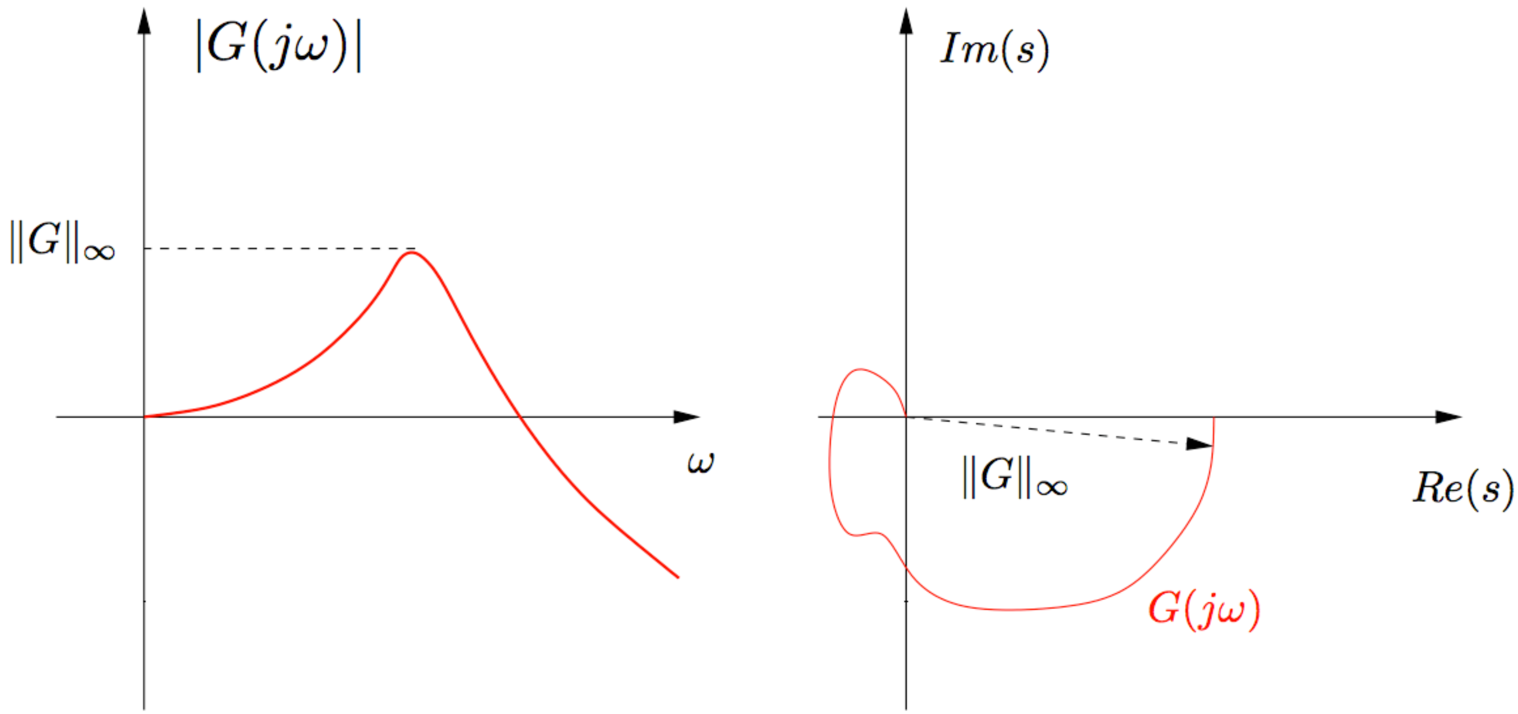
$$||G||_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| = \sup_{w \neq 0, w \in \mathcal{L}_2} \frac{||Gw||_2}{||w||_2}$$

▲ Multivariable :

$$||G||_\infty = \sup_{\omega} \overline{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{w \neq 0, w \in \mathcal{L}_2} \frac{||Gw||_2}{||w||_2}$$

● Interprétations :

- La valeur maximale de l'amplitude dans Bode ou la distance de l'origine au point le plus éloigné du lieu de transfert dans Nyquist (monovariable)
- La norme induite $\mathcal{L}_2$


$|G(j\omega)|$
$\|G\|_\infty$
ω
$Im(s)$
$\|G\|_\infty$
$Re(s)$
$G(j\omega)$

Calcul de la norme H_∞

Soit $G(s) \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$, $R(\gamma) = D'D - \gamma^2 1$

Lemme : La norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système stable est finie ssi il n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire

Matrice Hamiltonienne :

$$H_\gamma = \left[\begin{array}{cc} A - BR^{-1}(\gamma)D'C & -BR^{-1}(\gamma)B' \\ -C'(\mathbf{1} - DR^{-1}(\gamma)D')C & -A' + C'DR^{-1}(\gamma)B' \end{array}\right]$$

Thm : *Pour* $\gamma > \overline{\sigma}(D)$*,* $||G||_\infty < \gamma$ *ssi* H_γ *n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire*

$$\boxed{\Lambda(H_\gamma) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset}$$

- Calcul de la norme H_∞

  - γ-itérations :

- On choisit $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$ tel que

$$\gamma_{min} > \overline{\sigma}(D)$$

- Pour $\gamma = 1/2(\gamma_{min} + \gamma_{max})$, on forme H_γ et on calcule ses valeurs propres.
  - Si les valeurs propres ne sont pas sur l'axe imaginaire :

    On diminue γ en choisissant un nouvel intervalle $[\gamma_{min}, \gamma]$
  - Si les valeurs propres sont sur l'axe imaginaire :

    On augmente γ en choisissant un nouvel intervalle $[\gamma, \gamma_{max}]$
- On répète ce processus jusqu'à obtenir une approximation de

$$\gamma_\infty = ||G||_\infty$$

▲ Exemple de calcul de la norme H_2

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \qquad a > 0$$

Une réalisation minimale d'état est donnée par :

$$\dot{x} = -ax + u$$
$$y = x$$

Les équations de Lyapunov sont :

$$-2aW_c + 1 = 0 \quad -2aW_o + 1 = 0$$

d'où les grammiens et la norme $\mathcal{H}_2$:

$$W_c = W_o = \frac{1}{2a} \qquad \boxed{||G||_2 = \frac{1}{\sqrt{2a}}}$$

▲ Exemple de calcul de la norme H_∞ de $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$

La matrice Hamiltonnienne :

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} -a & \gamma^{-2} \\ -1 & a \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de H_γ :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (1/\gamma^2 - a^2)$$

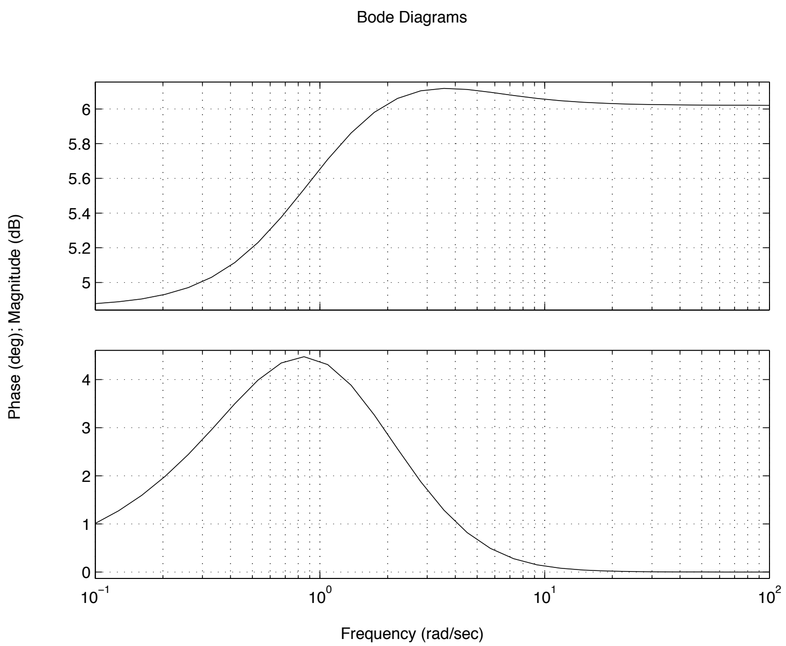
Les valeurs propres de H_γ :

$$\gamma > \frac{1}{a} \quad \lambda = \pm\sqrt{1/\gamma^2 - a^2} \quad \gamma < \frac{1}{a} \quad \lambda = \pm j\sqrt{1/a^2 - \gamma^2}$$

La norme $\mathcal{H}_\infty$:

$$\boxed{||G||_\infty = \frac{1}{a}}$$

```
>> A=[-1 0 -2;0 -1 1;0 0 -4];B=[0;0;1];C=[1 1 0];D=2;
>> sys=ss(A,B,C,D);
>> [hinf,fpeak]=norm(sys,inf,1e-4)
hinf =
    2.0225
fpeak =
    3.9441
```



Soit le modèle entrée-sortie multivariable $y = G(s)d$ où $y \in \mathbb{R}^r$ et $d \in \mathbb{R}^m$.

- On applique une sinusoïde $d_j(t) = d_{j0}\sin(\omega t + \alpha_j)$ sur l'entrée j alors $y_i(t) = y_{i0}\sin(\omega t + \beta_i)$

$$\boxed{\frac{y_{i0}}{d_{j0}} = |g_{ij}(j\omega)| \quad \beta_i - \alpha_j = \arg\left[g_{ij}(j\omega)\right]}$$

- On applique simultanément sur chaque entrée des signaux sinusoïdaux de même fréquence ω + principe de superposition

$$y_i(\omega) = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(j\omega)d_j(\omega) \quad y(\omega) = G(j\omega)d(\omega)$$

Nota : $d_j(\omega) = d_{0j}e^{j\alpha_j}$

- Gain des systèmes SISO :

$$\frac{|y(\omega)|}{|d(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)d(\omega)|}{|d(\omega)|} = f(\omega) = |G(j\omega)|$$

- Gain des systèmes MIMO :

$$\frac{||y(\omega)||_2}{||d(\omega)||_2} = \frac{||G(j\omega)d(\omega)||_2}{||d(\omega)||_2} = f(\omega, d)$$

Nota :

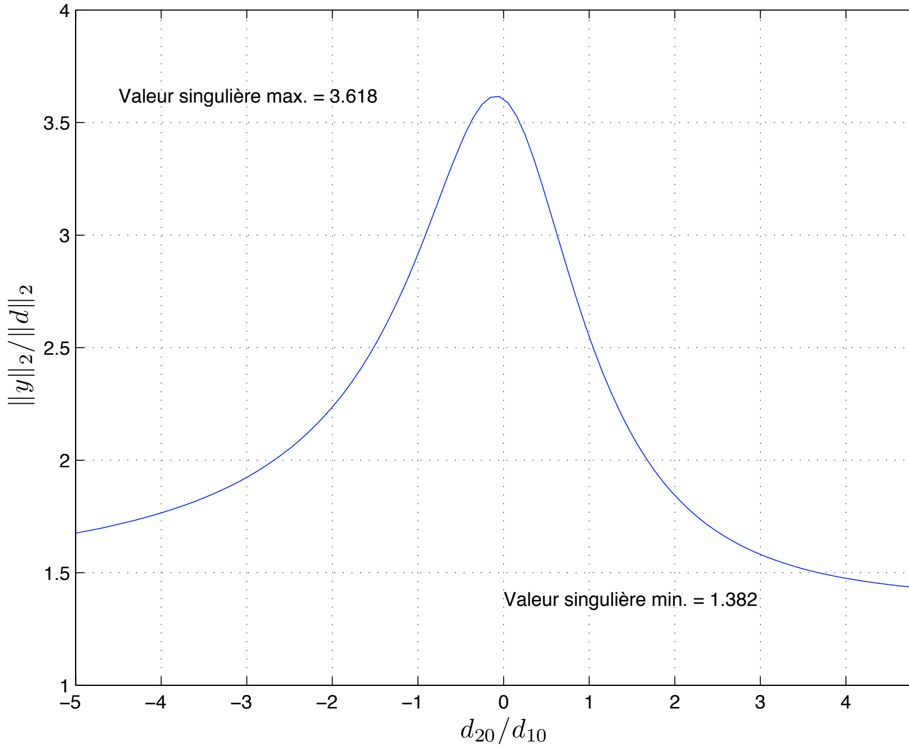
- $f(\omega)$ est indépendante de $||d(\omega)||$ mais dépend de la direction d'entrée d
- La notion de phase pour les systèmes multivariables est complexe à définir et ne sera pas abordée dans ce cours

Exemple : $G = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ||y_1||_2 = \sqrt{10}$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ||y_2||_2 = \sqrt{5}$$

$$d_3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{bmatrix} \qquad ||y_3||_2 = 2.9150$$



Definition 1 *:*

- *La valeur maximale du gain quand l'entrée varie est la valeur singulière maximale de G :*

$$\max_{d \neq 0} \frac{||Gd||_2}{||d||_2} = \max_{||d||_2=1} ||Gd||_2 = \overline{\sigma}(G)$$

- *La valeur minimale du gain quand l'entrée varie est la valeur singulière minimale de G :*

$$\min_{d \neq 0} \frac{||Gd||_2}{||d||_2} = \min_{||d||_2=1} ||Gd||_2 = \underline{\sigma}(G)$$

Nota : le gain est indépendant de l'amplitude d'entrée

Soit $G(j\omega) \in \mathbb{C}^{r \times m}$ une matrice de réponse fréquentielle telle que sa SVD pour ω fixée est

$$G(j\omega) = U(\omega)\Sigma(\omega)V^*(\omega) \quad \Sigma(\omega) = \begin{bmatrix} \overline{\sigma}(\omega) & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \underline{\sigma}(\omega) & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

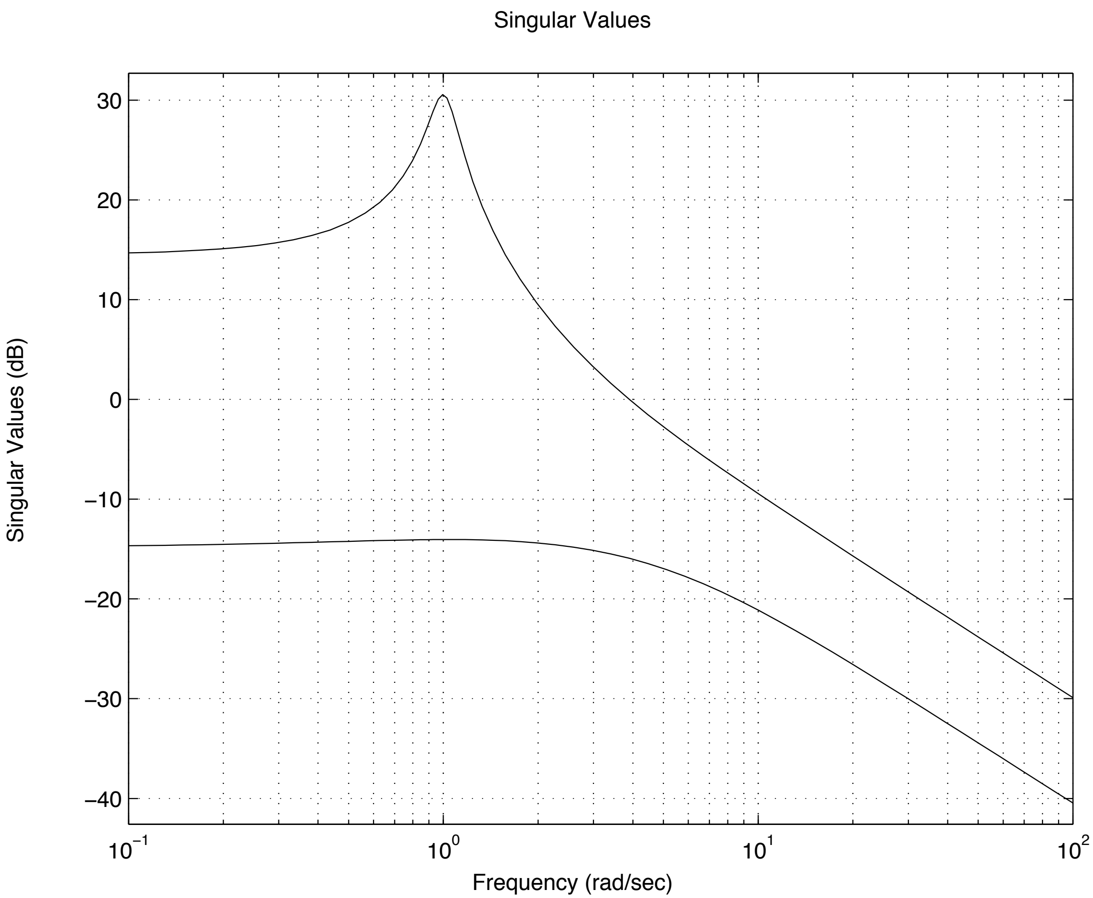
Definition 2 *:*

Les valeurs singulières sont appelées valeurs principales ou gains principaux. De plus, on définit les directions d'entrée v_j et de sortie u_i :

$$V = [v_j]_{j=1,\cdots,m} \quad U = [u_i]_{i=1,\cdots r} \quad G(j\omega)V = U\Sigma(\omega) \quad Gv_i = \sigma_i u_i \quad \sigma_i = ||Gv_j||_2$$

Nota : la ième valeur singulière donne le gain dans la direction i.

Exemple : modèle deux entrées - deux sorties



≫ A=[-0.1+j 1 -1 ;0 -0.1-j 2 ;0 0 -6] ;

≫ B=[0 1 ; 1 0 ; 1 1] ;

≫ C=[3 1 0 ;-1 0 1] ;

≫ D=[0 0 ;0 0] ;

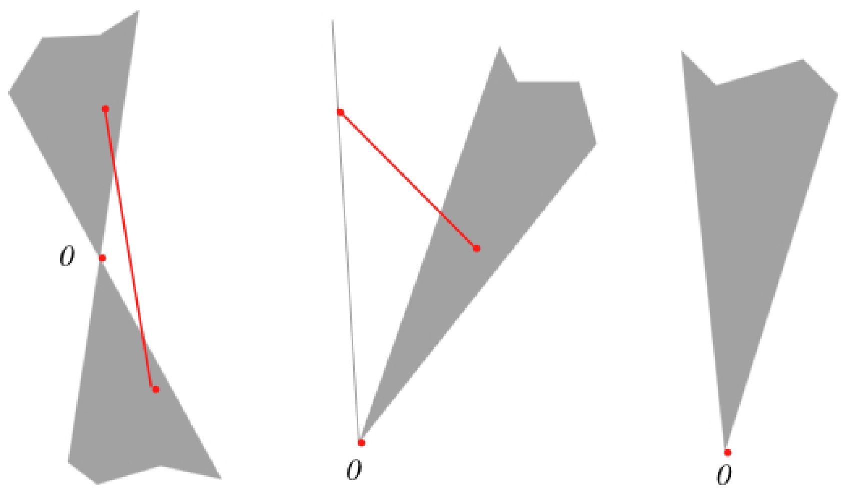
≫ sys=ss(A,B,C,D) ;

≫ sigma(sys,0.1,100)

Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

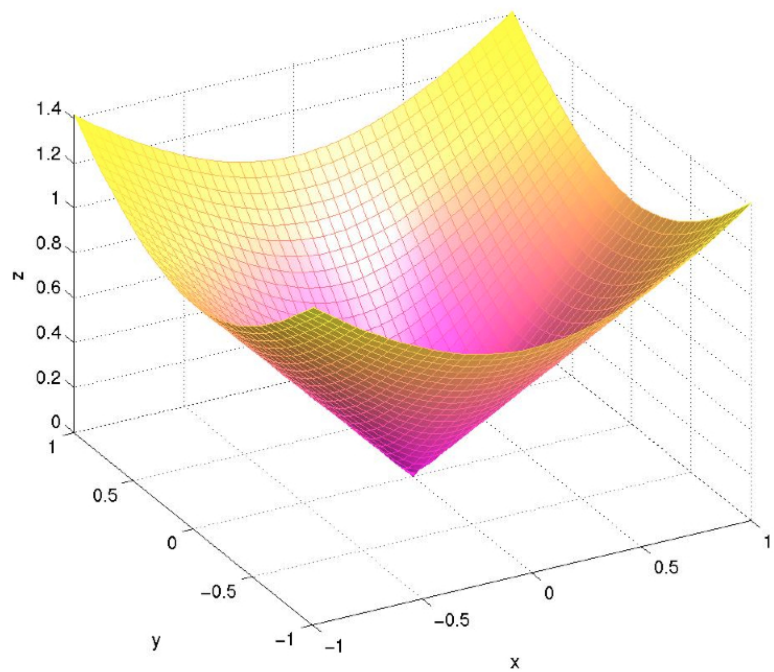
Annexe - LMI et Outils d'optimisation

- Convex cones
- A set $\mathcal{K}$ is a cone if for every $x \in \mathcal{K}$ and $\lambda \geq 0$ we have $\lambda x \in \mathcal{K}$.
- A set is a convex cone if it is convex and a cone.



- Convex cones
  - Convex cone of positive reals : $x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_+$
  - Second order (Lorentz) cone : $\mathcal{K}^n_{soc} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \ , \ x_1^2 + \dots x_{n-1}^2 \leq x_n^2 \right\}$

$\mathcal{K}^3_{soc}$:

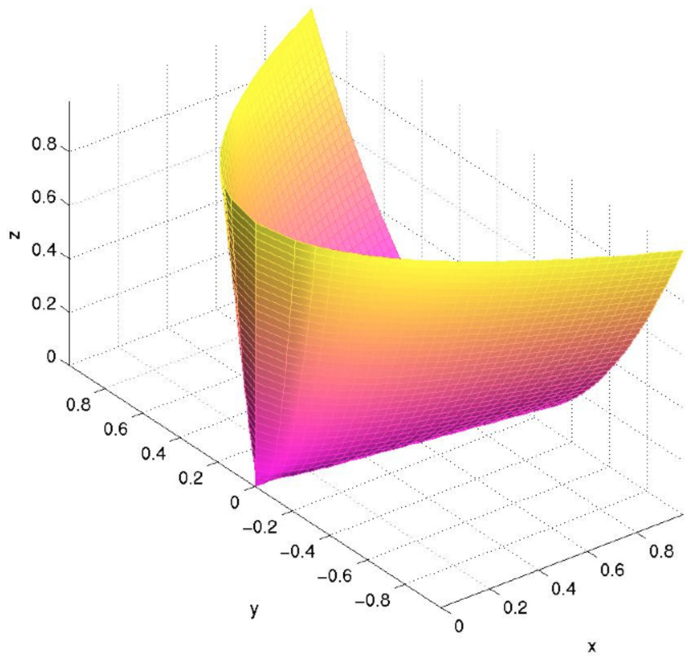


Convex cones

- Convex cone of positive reals : $x \in \mathbb{R}_+$
- Second order (Lorentz) cone : $\mathcal{K}^n_{soc} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \ , \ x_1^2 + \ldots x_{n-1}^2 \leq x_n^2 \right\}$
- Positive semi-definite matrices :

$$\mathcal{K}^n_{psd} = \left\{ \begin{array}{c} x = \\ \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n^2} \end{pmatrix} \end{array} , \begin{array}{c} \text{mat}(x) \\ = \text{mat}(x)^T \end{array} = \begin{bmatrix} x_1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n(n-1)+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & x_{2n} & \cdots & x_{n^2} \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$$

$\mathcal{K}^2_{psd}$:



$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

- Convex cones
  - Convex cone of positive reals : $x \in \mathbb{R}_+$
  - Second order (Lorentz) cone : $\mathcal{K}^n_{soc} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \;,\; x_1^2 + \dots x_{n-1}^2 \leq x_n^2 \right\}$
  - Positive semi-definite matrices : $\mathcal{K}^n_{psd} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{n^2} \end{pmatrix} \;,\; \mathrm{mat}(x) \geq 0 \right\}$
  - Unions of such : $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_1}_{soc} \times \dots \times \mathcal{K}^{n_q}_{psd} \times \cdots$

- Optimization over convex cones

$$p^\star = \min\ cx \quad : \quad Ax = b \quad , \quad x \in \mathcal{K}$$

  - Linear programming : $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+ \times \cdots \mathbb{R}_+$.
  - Semi-definite programming : $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{psd}^{n_1} \times \cdots \mathcal{K}_{psd}^{n_q}$

- Dual problem

$$d^\star = \max\ b^T y \quad : \quad A^T y - c^T = z \quad , \quad z \in \mathcal{K}$$

  - Primal feasible $\longrightarrow$ Dual infeasible
  - Dual feasible $\longrightarrow$ Primal infeasible
  - If primal and dual strictly feasible $p^\star = d^\star$

- Polynomial-time algorithms ($\mathcal{O}(n^{6.5}\log(1/\epsilon))$)

- Optimization over convex cones

$$p^\star = \min\ cx \quad : \quad Ax = b \quad , \quad x \in \mathcal{K}$$

- Dual problem

$$d^\star = \max\ b^T y \quad : \quad A^T y - c^T = z \quad , \quad z \in \mathcal{K}$$

- Possibility to perform convex optimization, primal/dual, interior-point methods, etc.
  - Interior-point methods [Nesterov, Nemirovski 1988] - Matlab Control Toolbox [Gahinet et al.]
  - Primal-dual path-following predictor-corrector algorithms :

SeDuMi (Sturm), SDPT3 (Toh, Tütüncü, Todd), CSDP (Borchers), SDPA (Kojima et al.)

  - Primal-dual potential reduction : MAXDET (Wu, Vandenberghe, Boyd)
  - Dual-scaling path-following algorithms : DSDP (Benson, Ye, Zhang)
  - Barrier method and augmented Lagrangian : PENSDP (Kocvara, Stingl)
  - Cutting plane algorithms ...

Semi-Definite Programming and LMIs

- SDP formulation $\begin{cases} p^\star = \min\ cx & : \quad Ax = b \quad , \quad x \in \mathcal{K} \\ d^\star = \max\ b^T y & : \quad A^T y - c^T = z \quad , \quad z \in \mathcal{K} \end{cases}$

- LMI formalism $\begin{cases} d^\star = \min \sum g_i y_i & : \quad F_0 + \sum F_i y_i \geq 0 \\ p^\star = \max \mathrm{Tr}(F_0 X) & : \quad \mathrm{Tr}(F_i X) + g_i = 0 \quad , \quad X \geq 0 \end{cases}$

- In control problems : variables are matrices
  - The H_∞ norm computation example for $G(s) \sim (A, B, C, D)$:

$$\|G(s)\|_\infty^2 \quad = \quad \min\ \gamma \quad : \quad P > 0 \quad , \quad \underbrace{\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & BP + C^T D \\ PB^T + D^T C & -\gamma 1 + D^T D \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix}^T - \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T + p_{11} \dots} < 0$$

Need for a nice parser

- Parsers : LMIlab, tklmitool, sdpsol, SeDuMiInterface...

- YALMIP

  - Convert LMIs to SDP solver format (all available solvers !)
  - Simple to use

```
>> P = sdpvar( 3, 3, 'symmetric');
>> lmiprob = lmi ( A'*P+P*A<0 ) + lmi ( P>0 );
>> solvesdp( lmiprob );
```

  - Works in Matlab - free !

```
http ://users.isy.liu.se/johanl/yalmip
```

  - Extends to other non-SDP optimization problems (BMI...)
  - SDP dedicated version in Scilab [S. Solovyev]

```
http ://www.laas.fr/OLOCEP/SciYalmip
```

SDP-LMI issues and prospectives

- Any SDP representable problem is ”solved” (numerical problems due to size and structure)
  - Find ”SDP-ables” problems

(linear systems, performances, robustness, LPV, saturations, delays, singular systems...)

  - Equivalent SDP formulations $\Rrightarrow$ distinguish which are numerically efficient
  - New SDP solvers : faster, precise, robust (need for benchmark examples)

SDP-LMI issues and prospectives

- Any SDP representable problem is ”solved” (numerical problems due to size and structure)
  - Find ”SDP-ables” problems

(linear systems, performances, robustness, LPV, saturations, delays, singular systems...)

  - Equivalent SDP formulations $\Rrightarrow$ distinguish which are numerically efficient
  - New SDP solvers : faster, precise, robust (need for benchmark examples)

- Any ”SDP-able” problem has a dual interpretation
  - New theoretical results (worst case)
  - New proofs (Lyapunov functions = Lagrange multipliers ; related to SOS)
  - SDP formulas numerically stable (KYP-lemma)

SDP-LMI issues and prospectives

- Any SDP representable problem is ”solved” (numerical problems due to size and structure)
  - Find ”SDP-ables” problems

(linear systems, performances, robustness, LPV, saturations, delays, singular systems...)

  - Equivalent SDP formulations $\Rrightarrow$ distinguish which are numerically efficient
  - New SDP solvers : faster, precise, robust (need for benchmark examples)

- Any ”SDP-able” problem has a dual interpretation
  - New theoretical results (worst case)
  - New proofs (Lyapunov functions = Lagrange multipliers ; related to SOS)
  - SDP formulas numerically stable (KYP-lemma)

- Non ”SDP-able” : Robustness & Multi-objective & Relaxation of NP-hard problems
  - Optimistic / Pessimistic (conservative) results
  - Reduce the gap (upper/lower bounds) while handling numerical complexity growth.

SDP-LMI issues and prospectives

- Any SDP representable problem is ”solved” (numerical problems due to size and structure)
  - Find ”SDP-ables” problems

(linear systems, performances, robustness, LPV, saturations, delays, singular systems...)

  - Equivalent SDP formulations $\Rrightarrow$ distinguish which are numerically efficient
  - New SDP solvers : faster, precise, robust (need for benchmark examples)

- Any ”SDP-able” problem has a dual interpretation
  - New theoretical results (worst case)
  - New proofs (Lyapunov functions = Lagrange multipliers ; related to SOS)
  - SDP formulas numerically stable (KYP-lemma)

- Non ”SDP-able” : Robustesse & Multi-objective & Relaxation of NP-hard problems
  - Optimistic / Pessimistic (conservative) results
  - Reduce the gap (upper/lower bounds) while handling numerical complexity growth.

- Develop software for ”industrial” application / adapted to the application field

$\Rrightarrow$ RoMulOC toolbox

Congruence

- $A > 0 \Leftrightarrow$ for any non zero vector x : $x^T A x > 0.$
- $A > 0 \Rightarrow$ for any full column rank matrix B : $B^T A B > 0.$
- $A > 0 \Rightarrow$ for any matrix B : $B^T A B \geq 0.$
- $A > 0 \Leftrightarrow$ exists a square non-singular matrix B : $B^T A B > 0.$

Most LMI results are formulated as (sufficiency)

If $\exists P \ldots \;:\; \mathcal{L}(P \ldots) > 0$ *then the system* $\dot{x} = f(x, w \ldots)$ *is such that...*

To prove these results : perform congruence with vectors $x, w \ldots$

Example (Lyapunov) :

If $\exists P \;:\; P > 0 \;,\; A^T P + P A < 0$ *then the system* $\dot{x} = Ax$ *is stable.*

Proof : $V(x) = x^T P x > 0, \;\; \dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x = 2\dot{x}^T P x < 0$ for all $x \neq 0.$

- Examples of nominal performance analysis : ($P > 0$)

  - Stability (discrete-time) $$A^T P A - P < 0$$

  - Regional pole placement $$\begin{bmatrix} 1 & A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} P & r_{12} P \\ r_{12}^* P & r_{22} P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A \end{bmatrix} < 0$$

  - H_∞ norm $$\begin{bmatrix} A^T P + P A + C_z^T C_z & P B_w + C_z^T D_{zw} \\ B_w^T P + D_{zw}^T C_z & -\gamma^2 1 + D_{zw}^T D_{zw} \end{bmatrix} < 0$$

  - H_2 norm $$A^T P + P A + C_z^T C_z < 0$$ $$\text{trace}(B_w^T P B_w) < \gamma^2$$

  - Impulse-to-peak $$A^T P + P A < 0 \quad B_w^T P B_w < \gamma^2 1$$ $$C_z^T C_z < P \quad D_{zw}^T D_{zw} < \gamma^2 1$$

- Tools to ‘build’ LMI results
- Schur complement

$$\begin{cases} A > BC^{-1}B^T \\ C > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0$$

- Example :

$$\begin{cases} (AX + BS)X^{-1}(XA^T + S^TB^T) - X < 0 \\ X > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -X & AX + BS \\ XA^T + S^TB^T & -X \end{bmatrix} < 0$$

■ Tools to 'build' LMI results

● Finsler lemma - Elimination lemma - Creation lemma

$$
\begin{aligned}
x^T A x < 0 \;\; \forall x \; : \; Bx = 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; \exists \tau \in \mathbb{R} \;\; : \;\; A < \tau B^T B \\
&\Leftrightarrow \;\; \exists X = X^T \;\; : \;\; A < B^T X B \\
&\Leftrightarrow \;\; \exists G \;\; : \;\; A < B^T G^T + G B \\
&\Leftrightarrow \;\; B^{\perp T} A B^{\perp} < 0
\end{aligned}
$$

▲ where $B^{\perp}$ columns generate the null space of B :

$$
B \in \mathbb{R}^{p \times m} \;\; , \;\; \mathrm{rank}(B) = r < m \;\; , \;\; B B^{\perp} = 0 \;\; , \;\; B^{\perp} \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)} \;\; , \;\; B^{\perp T} B^{\perp} > 0
$$

▲ G is a 'Slack variable' (Lagrange multiplier)

- Tools to 'build' LMI results
- Finsler lemma - Elimination lemma - Creation lemma

$$
\begin{aligned}
x^T A x < 0 \ \ \forall x \ : \ Bx = 0 \ &\Leftrightarrow \ \exists \tau \in \mathbb{R} \ : \ A < \tau B^T B \\
&\Leftrightarrow \ \exists X = X^T \ : \ A < B^T X B \\
&\Leftrightarrow \ \exists G \ : \ A < B^T G^T + G B \\
&\Leftrightarrow \ B^{\perp T} A B^{\perp} < 0
\end{aligned}
$$

- Example :

$$
\dot{V}(x) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} < 0 \ , \ \forall \ \begin{bmatrix} 1 & -A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = 0
$$

$$
\Leftrightarrow \exists G \ : \ \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ A^T \end{bmatrix} G^T + G \begin{bmatrix} -1 & A \end{bmatrix} < 0
$$

■ Tools to 'build' LMI results

● Finsler lemma - Elimination lemma - Creation lemma

$$\left\{ \begin{array}{l} C^{\perp T} A C^{\perp} < 0 \\ B^{\perp T} A B^{\perp} < 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \exists H \quad : \quad A < B^T H^T C + C^T H B$$

▲ Example

$$\left\{ \begin{array}{l} -P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \\ A^T P A - P = \begin{bmatrix} A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists H \quad : \quad \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} -1 \\ A^T \end{bmatrix} H^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} -1 & A \end{bmatrix}$$

- Tools to 'build' LMI results
- S-procedure [Yakubovich]

$$x^T M x < 0 \ \ \forall x \ : \ x^T N x \leq 0 \ \Leftrightarrow \ \exists \tau > 0 \ \ : \ \ M < \tau N$$

- Example :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \Delta \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \Delta^T \Delta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{pmatrix} < 0, \ \ \forall \begin{pmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ \exists \tau > 0 \ \ : \ \ M < \tau \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tools to 'build' LMI results
- S-procedure [Yakubovich]

$$x^T M x < 0 \;\; \forall x \; : \; x^T N x \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \exists \tau > 0 \;:\; M < \tau N$$

- Example :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1-D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1-D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \Delta^T\Delta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \end{pmatrix} < 0, \;\; \forall \begin{pmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{pmatrix} \leq 0$$

$$z_\Delta = Cx + Dw_\Delta$$

$$\Leftrightarrow \;\; \exists \tau > 0 \;:\; M < \tau \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Special case :

$$X + C^T\Delta^T B^T + B\Delta C < 0, \;\; \forall \Delta^T\Delta \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \exists \tau > 0 \;:\; X + \tau C^T C + \tau^{-1} B B^T < 0$$

- Tools to 'build' LMI results
  - D and DG-scalling

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1-D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1-D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \Delta = \delta 1 \ : \ \delta \in \mathsf{C}\,, \quad |\delta| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists Q > 0 \ : \ M < \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1-D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1-D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \Delta = \delta 1 \ : \ \delta \in \mathbb{R}\,, \quad |\delta| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists Q > 0, \ T = -T^T \ : \ M < \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q & T \\ T^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ Tools to 'build' LMI results

- Kalman-Yakubovich-Popov KYP lemma

$$\begin{bmatrix} 1 \\ (j\omega 1 - A)^{-1}B \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} 1 \\ (j\omega 1 - A)^{-1}B \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists Q \ : \ M < \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- And so on... Full-Block S-procedure [Scherer], Quadratic Separation [Iwasaki]

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1 - D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1 - D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

$$\Leftrightarrow \quad M < \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{\Theta} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta \end{bmatrix}^* \mathbf{\Theta} \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

▲ Difficulty : build the 'separator' $\mathbf{\Theta}$, losslessly...

■ Tools to 'build' LMI results

● S-procedure [Yakubovich]

$$x^T M x < 0 \ \ \forall x \ : \ x^T N x \leq 0 \ \Leftrightarrow \ \exists \tau > 0 \ : \ M < \tau N$$

$$x^T M x < 0 \ \ \forall x \ : \left\{ \begin{array}{l} x^T N_1 x \leq 0 \\ \vdots \\ x^T N_p x \leq 0 \end{array} \right. \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \exists \tau_1 > 0, \ldots \tau_p > 0 \ : \\ M < \tau_1 N_1 + \cdots \tau_p N_p \end{array}$$

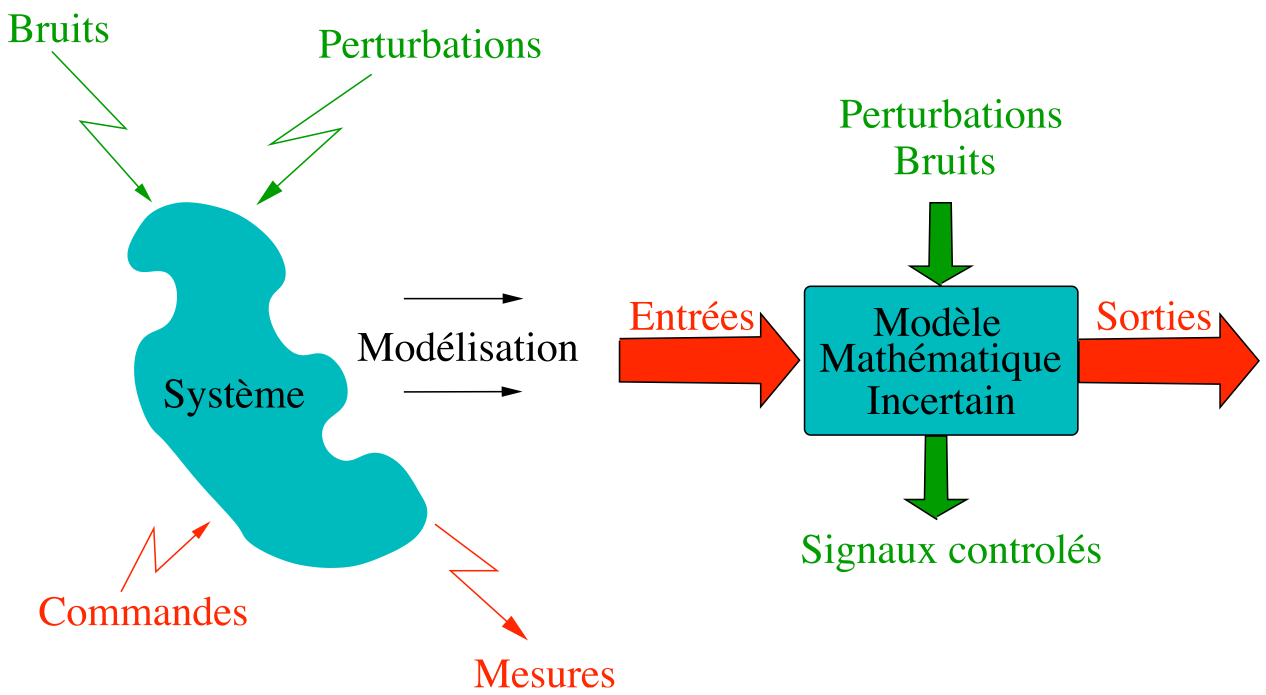
▲ Not lossless except in few special cases : Δ composed of

- m_r scalar real repeated,
- m_c scalar complex repeated,
- m_F full complex non-repeated blocks

[Meinsma et al.] DG-scalling lossless if $2(m_r + m_c) + m_F \leq 3$!

Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Cours 1 - Modèles linéaires incertains



- Le cours se limite aux systèmes linéaires
- Modèles par fonctions et matrices de transfert incertaines
- Modèles dans l'espace d'état

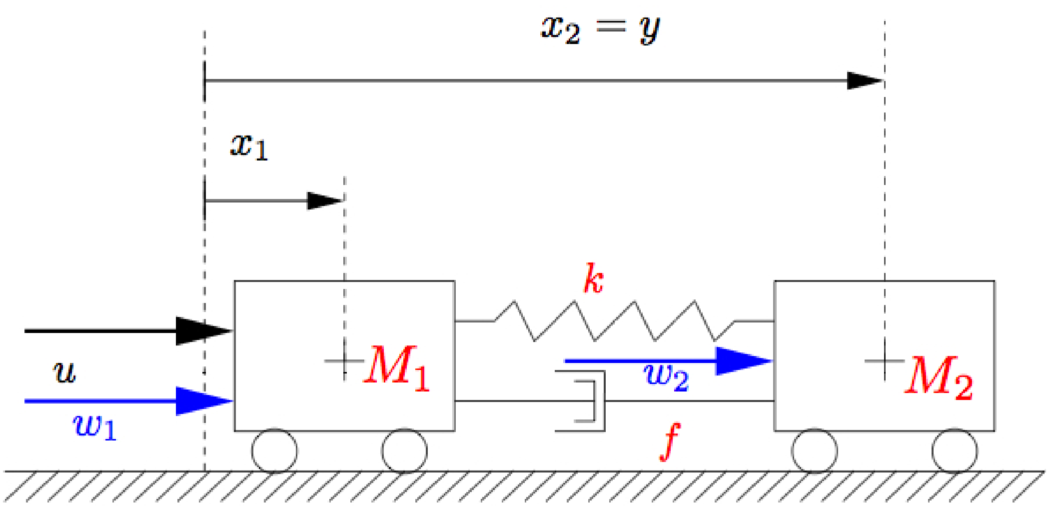
Exemple de modélisation incertaine

- **Système physique réel :**

Lanceur constitué de deux étages reliés par une liaison visco-élastique et soumis à des perturbations dues au vent et à la poussée du moteur

- **Modèle physique idéal :**

Deux masses couplées par un amortisseur et un ressort et soumises à des forces



- Modèle mathématique idéal : Modèle variant dans le temps et non linéaire

$$M_1(t)\ddot{x}_1 + f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = u + w_1$$
$$M_2\ddot{x}_2 + f(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = w_2$$

où $M_1(t)$: fonction du temps et f et k fonctions non linéaires

$M_1(t)$, M_2, f, k connues de façon approchée (car système idéalisé)

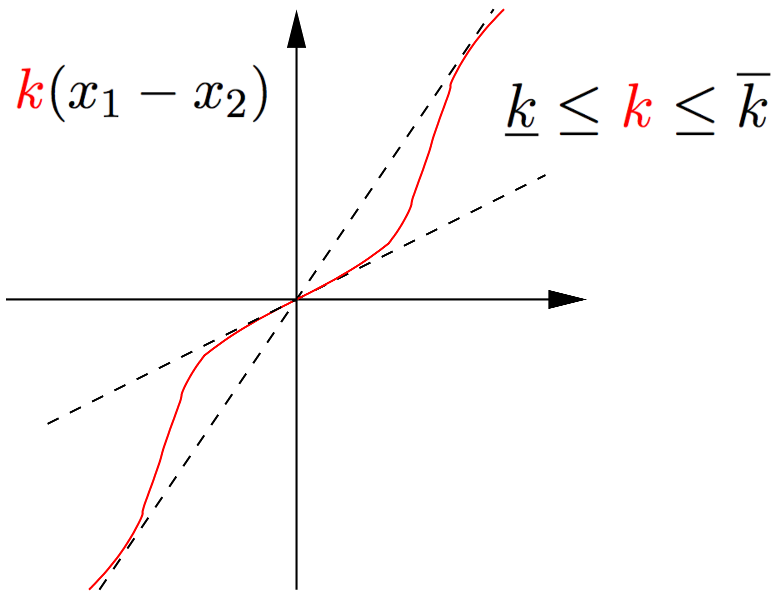
- Modèle mathématique réduit : linéarisé autour de zéro

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M_1(t)} & \frac{k}{M_1(t)} & -\frac{f}{M_1(t)} & \frac{f}{M_1(t)} \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & \frac{f}{M_2} & -\frac{f}{M_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1(t)} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

- Modèle incertain :
  - Incertitude paramétrique : $\underline{M}_2 \leq M_2 \leq \overline{M}_2$
  - Incertitude temps variant : $\underline{M}_1 \leq M_1(t) \leq \overline{M}_1 \quad \forall t \in [0 \;\; \bar{t}]$

    (avec éventuellement bornes sur dérivées, tq $\dot{M}_1(t) \leq 0$)
  - non-linéarités de gain borné : $\underline{k} \leq k \leq \overline{k}$, $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$



- Modèle incertain affine :

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_{k1} & \alpha_{k1} & -\alpha_{f1} & \alpha_{f1} \\ \alpha_{k2} & -\alpha_{k2} & \alpha_{f2} & -\alpha_{f2} \end{bmatrix}}_{A(\alpha)} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha_{M1} & 0 \\ 0 & \alpha_{M1} \end{bmatrix}}_{B_w(\alpha)} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{M1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_u(\alpha)} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

- Incertitudes découplées

$$\frac{\underline{k}}{\overline{M}_i} \leq \alpha_{ki} \leq \frac{\overline{k}}{\underline{M}_i}, \quad \frac{\underline{f}}{\overline{M}_i} \leq \alpha_{fi} \leq \frac{\overline{f}}{\underline{M}_i}, \quad \frac{1}{\overline{M}_i} \leq \alpha_{Mi} \leq \frac{1}{\underline{M}_i}$$

- Représentation englobante avec 6 paramètres incertains au lieu de 4
- Les réalisations du premier modèle incertain sont incluses dans celui-ci

Modèle incertain affine parallélotopique :

- Incertitudes normalisées : $\alpha_j = c_j + r_j \delta_j \;\;,\;\; \delta_j \in [-1 \;\; 1]$

$$c_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{k}}{\overline{M}_i} + \frac{\overline{k}}{\underline{M}_i}\right), \quad c_{fi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{f}}{\overline{M}_i} + \frac{\overline{f}}{\underline{M}_i}\right), \quad c_{Mi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{M}_i} + \frac{1}{\underline{M}_i}\right)$$
$$r_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{k}}{\underline{M}_i} - \frac{\underline{k}}{\overline{M}_i}\right), \quad r_{fi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{f}}{\underline{M}_i} - \frac{\underline{f}}{\overline{M}_i}\right), \quad r_{Mi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\underline{M}_i} - \frac{1}{\overline{M}_i}\right)$$

- Modèle affine parallélotopique

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{ccc} A(\alpha) & B_w(\alpha) & B_u(\alpha) \end{array}\right] = & \left[\begin{array}{ccc} A(c) & B_w(c) & B_u(c) \end{array}\right] \\ & + \sum_{j=1}^{6} \delta_j \left[\begin{array}{ccc} A(\hat{r}_j) & B_w(\hat{r}_j) & B_u(\hat{r}_j) \end{array}\right]\end{aligned}$$

- Modèle nominal (central) : $\left[\begin{array}{ccc} A(c) & B_w(c) & B_u(c) \end{array}\right]$
- Déviations selon les ”axes” $\left[\begin{array}{ccc} A(\hat{r}_j) & B_w(\hat{r}_j) & B_u(\hat{r}_j) \end{array}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc} A(\hat{r}_{k1}) & B_w(\hat{r}_{k1}) & B_u(\hat{r}_{k1}) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_{k1} & r_{k1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

● Modèle incertain affine polytopique :

$$\begin{array}{l}\left[\begin{array}{ccc} A(c) & B_w(c) & B_u(c) \end{array}\right] \\ +\sum_{j=1}^{6} \delta_j \left[\begin{array}{ccc} A(\hat{r}_j) & B_w(\hat{r}_j) & B_u(\hat{r}_j) \end{array}\right]\end{array} = \sum_{v=1}^{2^6} \zeta_v \left[\begin{array}{ccc} A^{[v]} & B_w^{[v]} & B_u^{[v]} \end{array}\right]$$

▲ ζ appartient au simplex

$$\sum \zeta_v = 1 \ , \ \ \zeta_v \geq 0$$

▲ $\left[\begin{array}{ccc} A^{[v]} & B_w^{[v]} & B_u^{[v]} \end{array}\right]$ sont les sommets du polytope calculés en prenant les 2^6 combinaisons extrêmes des $\delta_j \in [-1 \ \ 1]$.

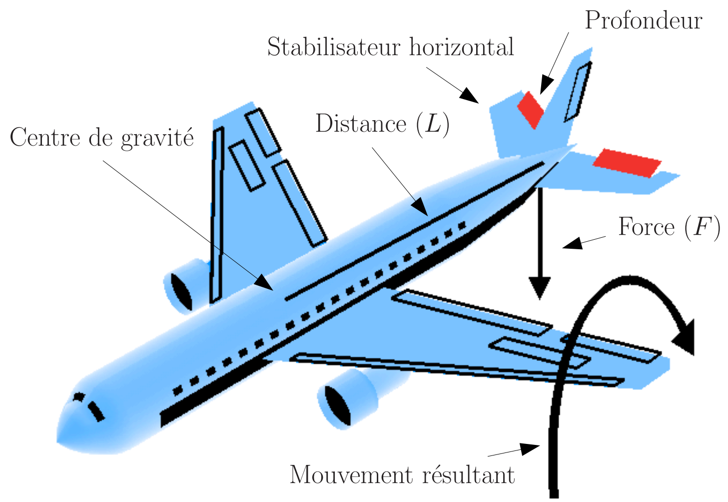
▲ Le modèle incertain = combinaison convexe des sommets

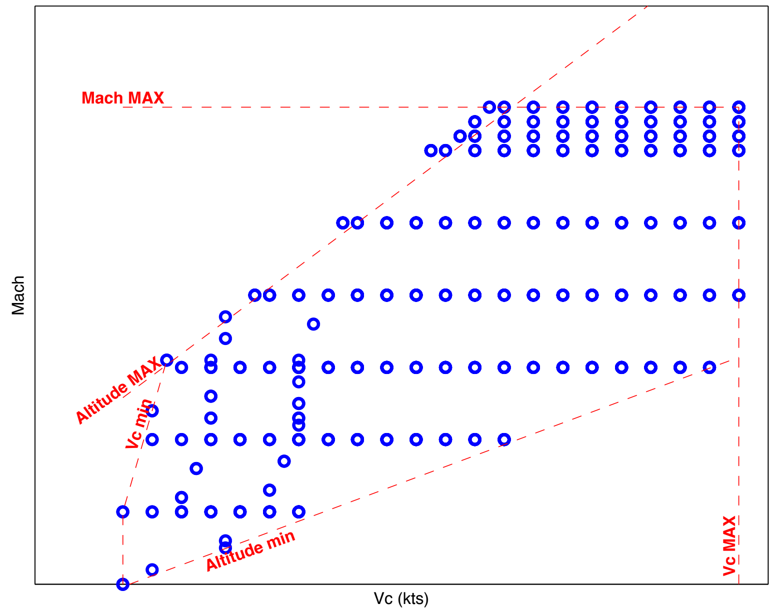
$$\left[\begin{array}{ccc} A(\alpha) & B_w(\alpha) & B_u(\alpha) \end{array}\right] \in \mathbf{co} \left\{ \left[\begin{array}{ccc} A^{[v]} & B_w^{[v]} & B_u^{[v]} \end{array}\right] \ , \ v = 1 \ldots \overline{v} = 2^6 \right\}$$

▲ Complexité combinatoire v.s. nombre de paramètres incertains

Modèle incertain affine polytopique :

- Peuvent être construits à la données de familles de modèles identifiés
- Example : Modélisation des dynamiques longitudinales d'un avion civil.





Modèles non-linéaires sur un point de vol i, approximés par modèles linéaires incertains définis comme l'enveloppe convexe des modèles voisins dans l'espace des paramètres :

$$M_{\theta_i}(\zeta) = \text{CO}\left\{ M_{\theta_j} \ : \ ||\theta_j - \theta_i|| \leq \alpha \right\}$$

- Modèle LFT :

$$M_1\ddot{x}_1 + f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = u + w_1$$
$$M_2\ddot{x}_2 + f(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = w_2$$

  - Réécriture avec incertitudes normalisées

$$(c_1 + r_1\delta_1)\ddot{x}_1 + (c_f + r_f\delta_f)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (c_k + r_k\delta_k)(x_1 - x_2) = u + w_1$$
$$(c_2 + r_2\delta_2)\ddot{x}_2 + (c_f + r_f\delta_f)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (c_k + r_k\delta_k)(x_2 - x_1) = w_2$$

  - On remplace tous les termes ”non-linéaires” par des signaux exogènes

$$c_1\ddot{x}_1 + r_1 w_{\Delta 1} + c_f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + r_f w_{\Delta f} + c_k(x_1 - x_2) + r_k w_{\Delta k} = u + w_1$$
$$c_2\ddot{x}_2 + r_2 w_{\Delta 2} + c_f(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - r_f w_{\Delta f} + c_k(x_2 - x_1) - r_k w_{\Delta k} = w_2$$

  - Signaux exogènes exprimés en fct des incertitudes et de combinaisons linéaires des états

$$w_{\Delta 1} = \delta_1 z_{\Delta 1} \ , \ w_{\Delta 2} = \delta_2 z_{\Delta 2} \ , \ w_{\Delta f} = \delta_f z_{\Delta f} \ , \ w_{\Delta k} = \delta_k z_{\Delta k}$$
$$z_{\Delta 1} = \ddot{x}_1 \ , \ z_{\Delta 2} = \ddot{x}_2 \ , \ z_{\Delta f} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ , \ z_{\Delta k} = x_1 - x_2$$

- Modèle LFT : forme descripteur

$$
\overbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc}
c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]}^{\mathcal{E}}
\left(\begin{array}{c}
\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \hline z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 2} \\ z_{\Delta f} \\ z_{\Delta k}
\end{array}\right)
$$

$$
= \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc|cc|c}
-c_f & c_f & -c_k & c_k & -r_1 & 0 & -r_f & -r_k & 1 & 0 & 1 \\
c_f & -c_f & c_k & -c_k & 0 & -r_2 & r_f & r_k & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]}_{\mathcal{A}}
\left(\begin{array}{c}
\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ \hline w_{\Delta 1} \\ w_{\Delta 2} \\ w_{\Delta f} \\ w_{\Delta k} \\ \hline w_1 \\ w_2 \\ \hline u
\end{array}\right)
$$

- Modèle LFT : En multipliant par $\mathcal{E}^{-1}$ on trouve

$$
\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \hline z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 2} \\ z_{\Delta f} \\ z_{\Delta k} \end{pmatrix}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc|cc|c}
-\frac{c_f}{c_1} & \frac{c_f}{c_1} & -\frac{c_k}{c_1} & \frac{c_k}{c_1} & -\frac{r_1}{c_1} & 0 & -\frac{r_f}{c_1} & -\frac{r_k}{c_1} & \frac{1}{c_1} & 0 & \frac{1}{c_1} \\
\frac{c_f}{c_2} & -\frac{c_f}{c_2} & \frac{c_k}{c_2} & -\frac{c_k}{c_2} & 0 & -\frac{r_2}{c_2} & \frac{r_f}{c_2} & \frac{r_k}{c_2} & 0 & \frac{1}{c_2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\frac{c_f}{c_1} & \frac{c_f}{c_1} & -\frac{c_k}{c_1} & \frac{c_k}{c_1} & -\frac{r_1}{c_1} & 0 & -\frac{r_f}{c_1} & -\frac{r_k}{c_1} & \frac{1}{c_1} & 0 & \frac{1}{c_1} \\
\frac{c_f}{c_2} & -\frac{c_f}{c_2} & \frac{c_k}{c_2} & -\frac{c_k}{c_2} & 0 & -\frac{r_2}{c_2} & \frac{r_f}{c_2} & \frac{r_k}{c_2} & 0 & \frac{1}{c_2} & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]}_{\begin{bmatrix} A & B_\Delta & B_w & B_u \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta w} & D_{\Delta u} \end{bmatrix}}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ \hline w_{\Delta 1} \\ w_{\Delta 2} \\ w_{\Delta f} \\ w_{\Delta k} \\ \hline w_1 \\ w_2 \\ \hline u \end{pmatrix}
$$

- Modèle linéaire sans incertitudes, bouclé par matrice diagonale incertaine

$$
w_\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \delta_f & \\ & & & \delta k \end{bmatrix} z_\Delta = \Delta z_\Delta
$$

■ Théorème

Tout modèle linéaire dont les coefficients sont rationnels en les paramètres

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(\delta) & B(\delta) \\ C(\delta) & D(\delta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

admet une représentation sous la forme d'un bouclage entre un modèle nominal et une matrice diagonale des paramètres

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_\Delta & B_0 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta u} \\ C_0 & D_{y\Delta} & D_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

▲ On parle de transformation fractionnaire $\leftrightarrow$ linéaire (LFT en anglais)

■ Propriétés des représentations LFT

- Les paramètres peuvent être répétés sur la diagonale
  - Exemple $y = \delta(x_1 + \delta x_2)$ donne

$$\left(\begin{array}{c} y \\ \hline z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline w_{\Delta 1} \\ w_{\Delta 2} \end{array}\right), \quad w_\Delta = \left[\begin{array}{cc} \delta & \\ & \delta \end{array}\right] z_\Delta$$

- Les paramètres sont répétés au minimum autant que le degré des polynômes

Propriétés des représentations LFT

- Les représentations ne sont pas unique
  - $y = \frac{\delta}{1+\delta}x \;\Leftrightarrow\; y + \delta y = \delta x$ avec $w_{\Delta 1} = \delta y$, $w_{\Delta 2} = \delta x$ on a

$$\left(\begin{array}{c} y \\ \hline z_{\Delta 1} \\ z_{\Delta 2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} x \\ \hline w_{\Delta 1} \\ w_{\Delta 2} \end{array}\right), \quad w_\Delta = \begin{bmatrix} \delta & \\ & \delta \end{bmatrix} z_\Delta$$

  - avec $w_\Delta = \delta(x-y)$ on a une forme plus simple

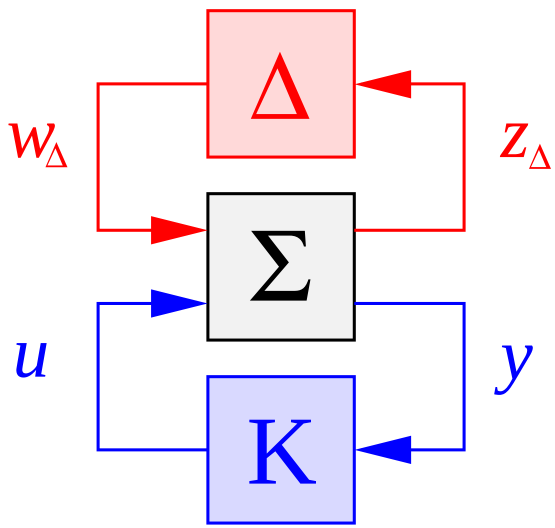
$$\left(\begin{array}{c} y \\ \hline z_\Delta \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 \end{array}\right] \left(\begin{array}{c} x \\ \hline w_\Delta \end{array}\right), \quad w_\Delta = \delta z_\Delta$$

- PB : comment trouver <u>une</u> forme minimale ?

Propriétés des représentations LFT

- LFT "hautes" et "basses" ("upper" and "lower")

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_\Delta & B_0 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta u} \\ C_0 & D_{y\Delta} & D_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{array}{c} w_\Delta = \Delta z_\Delta \\ u = K y \end{array}$$



$$\mathcal{L}_l(\mathcal{L}_u(\Sigma, \Delta), K) = \mathcal{L}_u(\mathcal{L}_l(\Sigma, K), \Delta)$$

$$(\Delta \overset{w_\Delta, z_\Delta}{\star} \Sigma) \overset{u,y}{\star} K = \Delta \overset{w_\Delta, z_\Delta}{\star} (\Sigma \overset{u,y}{\star} K)$$
$$= \Sigma \star \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

■ Propriétés des représentations LFT

● Représentations rationnelles

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_\Delta \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \end{pmatrix} \quad , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

▲ $z_\Delta = C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} \Delta z_\Delta$ conduit à la représentation :

$$\dot{x} = (A_0 + B_\Delta \Delta (1 - D_{\Delta\Delta} \Delta)^{-1} C_\Delta) x$$

▲ $w_\Delta = \Delta C_\Delta x + \Delta D_{\Delta\Delta} w_\Delta$ conduit à la représentation équivalente :

$$\dot{x} = (A_0 + B_\Delta (1 - \Delta D_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta C_\Delta) x$$

■ Propriétés des représentations LFT

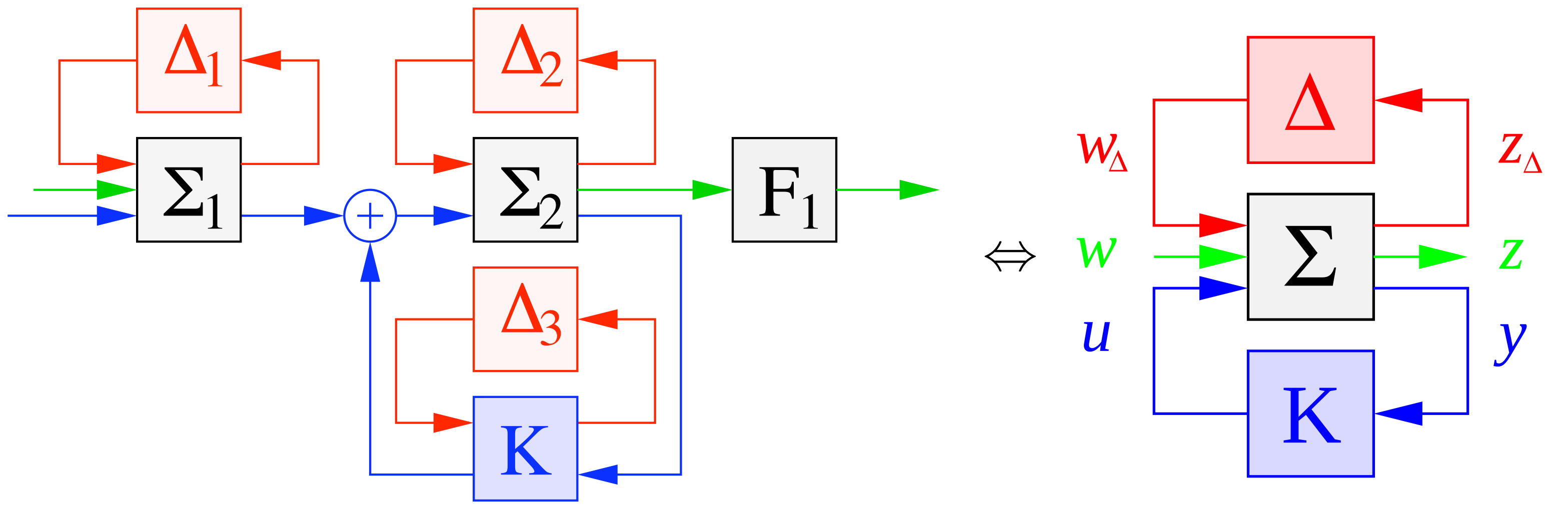
● s^{-1} intégrateur avec conditions initiales nulles

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}^{\Sigma} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad x = s^{-1}\dot{x}$$

▲ Matrices de transfert : LFT “haute”

$$y = \underbrace{(D + Cs^{-1}(\mathbf{1} - As^{-1})^{-1}B)}_{\Sigma \star^{x,\dot{x}} (s^{-1}\mathbf{1})} u = \underbrace{(D + C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B)}_{G(s)} u$$

- Propriétés des représentations LFT
- Algèbre des LFT



$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & \\ & \Delta_2 & \\ & & \Delta_3 \end{bmatrix}$$

■ "Star product" de matrices - propriétés

$$\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = M_{22}+M_{21}\Delta(\mathbf{1}-M_{11}\Delta)^{-1}M_{12} = M_{22}+M_{21}(\mathbf{1}-\Delta M_{11})^{-1}\Delta M_{12}$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \star K = M_{11}+M_{12}K(\mathbf{1}-M_{22}K)^{-1}M_{21} = M_{11}+M_{12}(\mathbf{1}-KM_{22})^{-1}KM_{21}$$

$$\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{bmatrix} \star \Delta$$

■ "Star product" de matrices - propriétés (suite)

$$\Delta_M \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} + \Delta_N \star \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_M & 0 \\ 0 & \Delta_N \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} M_{11} & 0 & M_{12} \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ \hline M_{21} & N_{21} & M_{22}+N_{22} \end{array}\right]$$

$$\left(\Delta_M \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\right)\left(\Delta_N \star \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta_M & 0 \\ 0 & \Delta_N \end{bmatrix} \star \left[\begin{array}{cc|c} M_{11} & M_{12}N_{21} & M_{12}N_{22} \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22}N_{21} & M_{22}N_{22} \end{array}\right]$$

$$\left(\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\Delta \star \begin{bmatrix} M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} & -M_{12}M_{22}^{-1} \\ M_{22}^{-1}M_{21} & M_{22}^{-1} \end{bmatrix}\right)$$

- "Star product" de matrices - formule générale

$$\overbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}}^{M} \star \overbrace{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}}^{N}$$

$$= \begin{bmatrix} M \star N_{11} & M_{12}(\mathbf{1} - N_{11}M_{22})^{-1}N_{12} \\ N_{21}(\mathbf{1} - M_{22}N_{11})^{-1}M_{21} & M_{22} \star N \end{bmatrix}$$

- Propriétés des représentations LFT
- Toolbox dans Matlab pour manipuler des LFT
  - LFRT - gratuite - très complète

    par JF Magni + extention Simulink par JM Biannic et C Doll

    `www.onera.fr/staff-en/jean-marc-biannic/docs/lfrtv20s.zip`
  - Robust Control toolbox - Matlab©
  - RoMulOC - gratuite (manipulations LFT limitées)

    `www.laas.fr/OLOCEP/romuloc/`

- Types d'incertitudes $\Delta = \text{diag}(\cdots\Delta_i\cdots) \ , \ \Delta_i \in \mathbf{\Delta}_i$
  - Scalaires réelles constantes répétées : $\Delta_i = \delta_i 1_{r_i} \quad \delta_i \in [\underline{\delta}_i \ , \ \overline{\delta}_i] \quad \dot{\delta}_i = 0$
  - Scalaires réelles variant dans le temps répétées : $\Delta_i = \delta_i 1_{r_i} \quad \delta_i \in [\underline{\delta}_i \ , \ \overline{\delta}_i] \quad \dot{\delta}_i \neq 0$
  - Scalaires complexes répétées : $\Delta_i = \delta_i 1_{r_i} \quad x_i + \delta_i^* y_i^* + y_i \delta_i + z_i \delta_i^* \delta_i \leq 0$
    - Exemple : $\mathbf{\Delta}_i$ = demi-plan droit si $(x_i, y_i, z_i) = (0, -1, 0)$
    - Exemple : $\mathbf{\Delta}_i$ = disque unité si $(x_i, y_i, z_i) = (-1, 0, 1)$
    - Exemple : $\mathbf{\Delta}_i$ = disque de diamètre $[\underline{\delta}_i \ , \ \overline{\delta}_i]$ si $(x_i, y_i, z_i) = (2\underline{\delta}_i\overline{\delta}_i, -(\underline{\delta}_i + \overline{\delta}_i), 2)$
  - Opérateurs matriciels dissipatifs (matrices complexes, temps-variant ou non-linéarités)

$$w_{\Delta i} = \Delta_i z_{\Delta i} \ \Rightarrow \int_0^\infty (z_{\Delta i}^* X_i z_{\Delta i} + z_{\Delta_i}^* Y_i w_{\Delta i} + w_{\Delta_i}^* Y_i^* z_{\Delta i} + w_{\Delta i}^* Z_i w_{\Delta i}) dt \leq 0$$

- Exemple : Opérateur borné en norme si $(X_i, Y_i, Z_i) = (-\gamma^2 1, 0, 1)$

$$\|w_{\Delta i}\|_2 \leq \gamma \|z_{\Delta i}\|_2 \quad , \quad \|\Delta_i\|_\infty \leq \gamma$$

- Exemple : Opérateur passif si $(X_i, Y_i, Z_i) = (0, -1, 0)$
- Exemple : Non-linéarité de secteur si $(x_i, y_i, z_i) = (2\underline{\delta}_i\overline{\delta}_i, -(\underline{\delta}_i + \overline{\delta}_i), 2)$

Systèmes incertains et matrices de transfert

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 & B_\Delta & B_0 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta u} \\ C_0 & D_{y\Delta} & D_0 \end{bmatrix}}^{\Sigma} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

- Bouclages avec matrices de transfert

$$\begin{pmatrix} z_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\Delta\Delta}(s) & \Sigma_{\Delta u}(s) \\ \Sigma_{y\Delta}(s) & \Sigma_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{\Delta\Delta}(s) & \Sigma_{\Delta u}(s) \\ \Sigma_{y\Delta}(s) & \Sigma_{yu}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta u} \\ D_{y\Delta} & D_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\Delta \\ C_0 \end{bmatrix} (s1 - A_0)^{-1} \begin{bmatrix} B_\Delta & B_0 \end{bmatrix}}_{\Sigma \overset{x,\dot{x}}{\star} (s^{-1}1)}$$

$$y = \left(\begin{bmatrix} \Sigma_{\Delta\Delta}(s) & \Sigma_{\Delta u}(s) \\ \Sigma_{y\Delta}(s) & \Sigma_{yu}(s) \end{bmatrix} \overset{w_\Delta, z_\Delta}{\star} \Delta \right) u = \left(\begin{array}{l} \Sigma_{yu}(s) \\ +\Sigma_{y\Delta}(s)\Delta(1 - \Sigma_{\Delta\Delta}(s)\Delta)^{-1}\Sigma_{\Delta y}(s) \end{array} \right) u$$

■ Systèmes incertains et matrices de transfert (suite)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_\Delta & B_0 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta u} \\ C_0 & D_{y\Delta} & D_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

● Si Δ est composée uniquement d'incertitudes constantes (réelles ou complexes)

$$y = \underbrace{\left(D_0 + \begin{bmatrix} C_0 & D_{y\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \left(1 - \begin{bmatrix} A_0 & B_\Delta \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_0 \\ D_{\Delta u} \end{bmatrix} \right)}_{G(s,\Delta)} u$$

▲ $G(s, \Delta)$: Matrice de transfert dont les coefficients sont rationnels en les incertitudes

▲ Sauf cas particulier, les coefficients sont inter-dépendants

- Systèmes SISO définis par une fonction de transfert incertaine

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- Incertitudes intervalles

$$\underline{b}_j \leq b_j \leq \overline{b}_j \ \ \forall j = 1 \ldots m \ \ , \ \ \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i \ \ \forall i = 1 \ldots n$$

  - Modèle très simple
  - Suppose tous les coefficients indépendants

$$\left\{ \frac{s+\delta}{s^2+\delta s+1}, \ \ \delta \in [-1 \ \ 1] \right\} \subset \left\{ \frac{s+b_0}{s^2+a_1 s+1}, \ \ \begin{array}{l} b_0 \in [-1 \ \ 1] \\ a_1 \in [-1 \ \ 1] \end{array} \right\}$$

  - Fonction de transfert : suppose tous les coefficients constants

- Systèmes MIMO et factorisation copremières à droite et à gauche

$$G(s) = M_l^{-1}(s)N_l(s) = N_r(s)M_r^{-1}(s)$$

  - $M_l(s)$, $N_l(s)$, $M_r(s)$, $N_r(s)$: matrices polynomiales (existent d'autres factorisations)

$$M_l(s) = M_{nl}s^n + \ldots + M_{1l}s + M_{0l}$$

  - $M_l(s)y = N_l(s)u$: modélisation polynomiale des systèmes LTI

- Factorisations copremières incertaines

$$G(s) = M_l{}^{-1}(s)N_l(s) = N_r(s)M_r{}^{-1}(s)$$

- Analogie avec les modèles SISO :

facteurs copremiers aux coefficients indépendants dans des intervalles

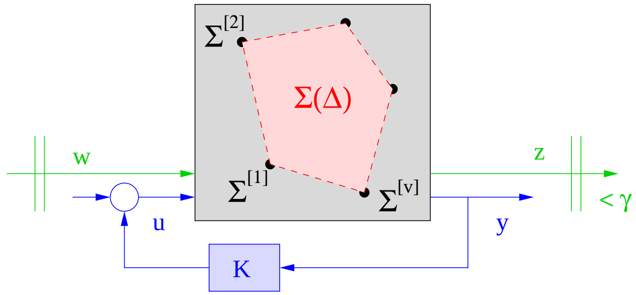
$$M_l(s) = [m_{lij}(s)]_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq m} = M_{nl}s^n + \cdots + M_{1l}s + M_{0l}$$

$$m_{lij}(s) = m_{nlij}s^n + \ldots + m_{1lij}s + m_{0lij}$$

$$\underline{m}_{klij} \leq m_{klij} \leq \overline{m}_{klij}$$

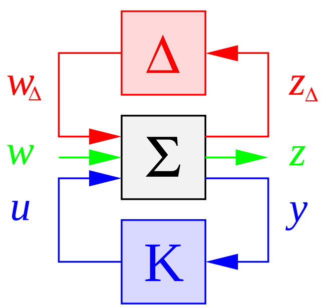
Résumé des modèles incertains considérés dans la suite

- Affines polytopiques



$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \Sigma(\zeta) \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \;,\; \Sigma(\zeta) \in \text{co} \left\{ \Sigma^{[1]} \ldots \Sigma^{[\overline{v}]} \right\}$$

- LFT



$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \\ z \\ y \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \\ w \\ u \end{pmatrix} \;,\; \begin{array}{l} w_\Delta = \Delta z_\Delta \; : \\ \Delta = \text{diag}(\ldots \Delta_i \ldots) \\ \Delta_i \in \mathbf{\Delta}_i , \end{array}$$

- Polynomiaux (surtout SISO) $M(s)y = N(s)u$

Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Cours 2 - Stabilité robuste et théorie de Lyapunov

■ Dans cette partie on s'intéresse à la stabilité d'une boucle fermée décrite dans l'espace d'état

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ z_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_\Delta & B_0 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta u} \\ C_0 & D_{y\Delta} & D_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ w_\Delta \\ u \end{pmatrix} , \quad \begin{matrix} w_\Delta = \Delta z_\Delta \\ \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ u \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}}_{K} \begin{pmatrix} \eta \\ y \end{pmatrix} \end{matrix}$$

● Exercice de manipulation des LFT : montrer que la boucle fermée avec le correcteur s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(K) & B_\Delta(K) \\ C_\Delta(K) & D_{\Delta\Delta}(K) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \end{pmatrix} , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

▲ avec $x^T = \begin{pmatrix} x_0^T & \eta^T \end{pmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A(K) & B_\Delta(K) \\ C_\Delta(K) & D_{\Delta\Delta}(K) \end{bmatrix} =$

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_0 & 0 & B_\Delta \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline C_\Delta & 0 & D_{\Delta\Delta} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & B_0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & B_{\Delta u} \end{array}\right] K \left(1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix} K\right)^{-1} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ C_0 & 0 & D_{y\Delta} \end{array}\right]$$

▲ Rq : K doit être telle que $(1 - D_0 D_K)$ est inversible pour que la LFT ait un sens

▲ Dans la suite de cette partie K est supposée connue

- Exercice de manipulation des LFT suite

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_\Delta \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \end{pmatrix} \quad , \quad w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

  - On trouve au choix

$$\dot{x} = (A + B_\Delta \Delta (1 - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} C_\Delta) x = A(\Delta) x$$

$$\dot{x} = (A + B_\Delta (1 - \Delta D_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta C_\Delta) x = A(\Delta) x$$

  - La LFT a un sens si $(1 - \Delta D_{\Delta\Delta})$ et $(1 - D_{\Delta\Delta}\Delta)$ sont inversibles $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$.

- On voit sur ces deux exemples que écrire des LFT suppose des hypothèse sur les inverses $(1 - D_0 D_K)$, $(1 - D_{\Delta\Delta}\Delta)$ etc.

  - On parle de **bien-posé** de la LFT ou bien posé de la boucle d'interconnexion.

Bien posé d'une boucle - Définition

- Une boucle $\Delta \star M$ avec $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ est dite bien posée si
  - $\mathbf{\Delta}$ est non vide
  - Pour tout $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ et toute paire $(\hat{w}, \hat{z})$, il existe une **unique** paire (w, z) solution de

$$z = Mw + \hat{z} \ , \ \ w = \Delta z + \hat{w}$$

  - Il existe un γ tel que la solution (w, z) est **bornée**

$$\left\| \begin{array}{c} w \\ z \end{array} \right\| \leq \gamma \left\| \begin{array}{c} \hat{w} \\ \hat{z} \end{array} \right\| \ , \ \ \forall (\hat{w}, \hat{z}), \ \ \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

- Le bien posé implique que quand $(\hat{w}, \hat{z}) = 0$ la seule solution aux équations est $(w, z) = 0$
  - $z = w$ bouclé avec $w = \delta z$ et $\delta \in [0 \ , \ 2]$, n'est pas bien posé
    en effet $\exists \delta = 1 \in [0 \ , \ 2]$ telle que $w = z \in \mathbb{R}$ est un ensemble (infini) de solutions

- Unicité des signaux internes à l'équilibre
  - Point d'équilibre $x = \dot{x} = 0$

$$z_\Delta = D_{\Delta\Delta} w_\Delta \ , \ w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

  - (z_Δ, w_Δ) unique pour toute perturbation $(\hat{z}, \hat{w})$ bornée

$$z_\Delta = D_{\Delta\Delta} w_\Delta + \hat{z} \ , \ w_\Delta = \Delta z_\Delta + \hat{w}$$

    - Unicité de la solution à

$$\begin{bmatrix} 1 & -D_{\Delta\Delta} \\ -\Delta & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{w} \end{pmatrix}$$

    - $\begin{bmatrix} 1 & -D_{\Delta\Delta} \\ -\Delta & 1 \end{bmatrix}$ de rang plein et donc $\begin{bmatrix} 1 & D_{\Delta\Delta} \\ \Delta & 1 \end{bmatrix}$ de rang plein
    - $\begin{bmatrix} 1 & -D_{\Delta\Delta} \\ -\Delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & D_{\Delta\Delta} \\ \Delta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta D_{\Delta\Delta} & 0 \\ 0 & 1 - D_{\Delta\Delta}\Delta \end{bmatrix}$ inversible

- Stabilité asymptotique globale du point d'équilibre $x = \dot{x} = 0$

- Etat borné pour toute condition initiale bornée et toute perturbation bornée :

$$\dot{x} = Ax + \hat{z} \ , \ \ x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau + x(0)$$

  - $x(s) = \mathcal{L}[x]$ est définie pour Re$[s] > \alpha$ si $\exists M \ : \ ||x(t)|| \leq Me^{\alpha t}$
  - Convergence asymptotique si $\alpha < 0 \quad \Rightarrow$ Re$[s] \geq 0$

- Bien posé de la boucle

$$\dot{x} = Ax + \hat{z} \ , \ \ x = s^{-1}\dot{x} + x(0) \ \ : \ \ s^{-1} \in \{\text{Re}[s] \geq 0\}$$

  - Unicité de la solution à

$$\begin{bmatrix} 1 & -A \\ -s^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{w} \end{pmatrix}$$

  - $\Rightarrow \ \ (s\mathbf{1} - A)$ inversible pour tout $s \in \{\text{Re}[s] \geq 0\}$
  - $\Rightarrow \ \ \det(s\mathbf{1} - A) \neq 0$ pour tout $s \in \{\text{Re}[s] \geq 0\}$

- Stabilité asymptotique globale robuste du point d'équilibre $x = \dot{x} = 0$
  - Etat borné pour toute condition initiale bornée, toute perturbation bornée et toute incertitude :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_\Delta \\ C_\Delta & D_\Delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \end{pmatrix} + \hat{z} \,, \quad \begin{pmatrix} x \\ w_\Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s^{-1}\mathbf{1} & \\ & \Delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \end{pmatrix} + \hat{w}$$

  - Obtenu si la matrice suivante est de rang plein $\forall \mathrm{Re}[s] \geq 0$ et $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & 0 & -A & -B_\Delta \\ 0 & \mathbf{1} & -C_\Delta & -D_\Delta \\ \hline -s^{-1}\mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

  - $\Rightarrow \quad \det(s\mathbf{1} - A(\Delta)) \neq 0 \; \forall \mathrm{Re}[s] \geq 0$ et $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$

- Stabilité robuste des systèmes LTI incertains
- $\det(s1 - A(\Delta)) \neq 0$ pour tout $s \in \{\mathrm{Re}[s] \geq 0\}$ et tout $\Delta \in \mathbf{\Delta}$
- Approche aléatoire [Tempo et al.(2005)Tempo, Calafiore, and Dabbene] :
  - Calculer v.p. $A(\Delta)$ sur un ***grand*** nombre de valeurs ***aléatoires*** de Δ
  - Résultats probabilistes :

    Probabilité de stabilité, pour N tirages, a condition d'avoir un tirage uniforme
  - Approche optimiste : pas de garantie de stabilité robuste
  - Approche optimiste : peut trouver un certificat d'instabilité
  - Exemple : polytope avec 4 sommets stables

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 8 \\ 5 & 4 & -14 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} -12 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 1 \\ 1 & 10 & -12 \end{bmatrix}$$

$$A^{[3]} = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 6 \\ 2 & -12 & 2 \\ 9 & 9 & -15 \end{bmatrix}, \quad A^{[4]} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 2 \\ 9 & -11 & 0 \\ 9 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

Tirage aléatoire de 100 combinaisons linéaires de ces sommets : 3 instables.

Stabilité robuste des systèmes LTI incertains

- $\det(s1 - A(\Delta)) \neq 0$ pour tout $s \in \{\text{Re}[s] \geq 0\}$ et tout $\Delta \in \mathbf{\Delta}$
- Critère de Routh (peu de paramètres, faible degré de dépendance)
  - Exemple $\det(s1 - A(\Delta))$

$$= s^4 + 10s^3 + 10(10 - {\delta_1}^2)s^2 + (10 - {\delta_2}^2)s + 10(1 - {\delta_1}^3 + 5{\delta_2}^2)$$

  - Stable ssi

$$100(10 - {\delta_1}^2) > 10 - {\delta_2}^2 > 0 \ , \ \ {\delta_1}^3 - 5\delta_2 - 1 < 0 \ ,$$
$$100{\delta_1}^2{\delta_2}^2 - {\delta_2}^4 + 1000{\delta_1}^3 - 1000\delta_1 - 5980{\delta_2}^2 > 0$$

  - Inégalités satisfaites pour

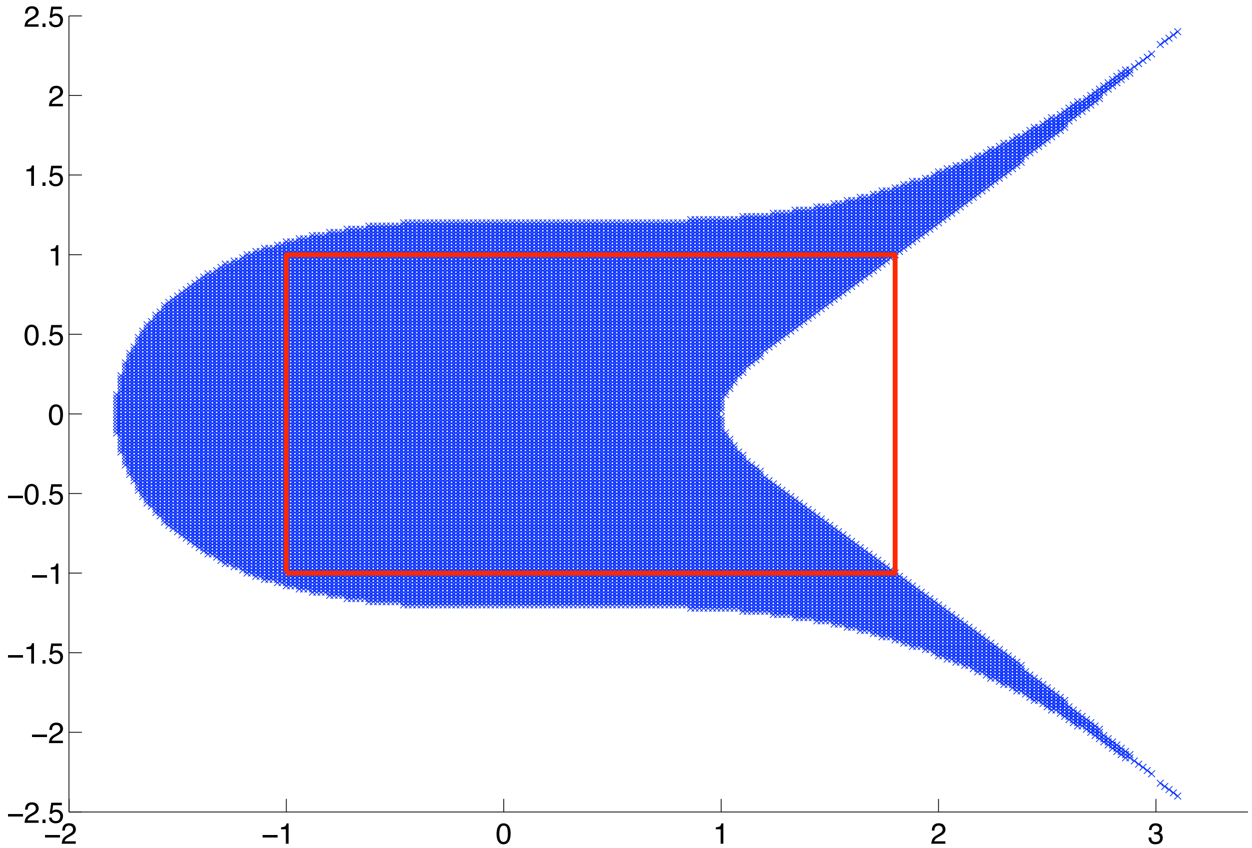
$$(\delta_1, \delta_2) = (-1, 1) \ , \ (-1, -1) \ , \ (1.8, -1) \ , \ (1.8, 1)$$

  - Mais pas satisfaites pour $(\delta_1, \delta_2) = (1.8, 0) \ , \ (1, 0)$

- Exemple $\det(s1 - A(\Delta))$

$$= s^4 + 10s^3 + 10(10 - {\delta_1}^2)s^2 + (10 - {\delta_2}^2)s + 10(1 - {\delta_1}^3 + 5{\delta_2}^2)$$

- Valeurs stabilisantes de (δ_1, δ_2)



- Il ne suffit pas de tester la stabilité des valeurs extrêmes !

- Stabilité robuste des systèmes LTI incertains
- Théorème de Kharitonov , $\underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i$ indépendants les uns des autres

$$\det(s1 - A(\Delta)) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n$$

le polynôme est stable ssi les quatre polynômes suivants sont stables

$$\underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \ldots$$
$$\underline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \ldots$$
$$\overline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \overline{a}_4 s^4 + \ldots$$
$$\overline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \overline{a}_4 s^4 + \ldots$$

- Exemple $s^4 + 10s^3 + [100 \;\; 91.9]s^2 + [10 \;\; 9]s + [2.71 \;\; 67.29]$

(*i.e.* $|\delta_1| \leq 0.9$ et $|\delta_2| \leq 1$ dans ex précédent)

$$\text{racines}(2.71 + 9s + 100s^2 + 10s^3 + s^4) = \begin{pmatrix} -4.96 \pm j8.63 \\ -0.044 \pm j0.16 \end{pmatrix}$$

$$\text{racines}(2.71 + 10s + 100s^2 + 10s^3 + s^4) = \begin{pmatrix} -4.95 \pm j8.63 \\ -0.049 \pm j0.16 \end{pmatrix}$$

$$\text{racines}(67.29 + 10s + 91.9s^2 + 10s^3 + s^4) = \begin{pmatrix} -4.98 \pm j8.12 \\ -0.014 \pm j0.86 \end{pmatrix}$$

$$\text{racines}(67.29 + 9s + 91.9s^2 + 10s^3 + s^4) = \begin{pmatrix} -4.99 \pm j8.13 \\ -0.009 \pm j0.86 \end{pmatrix}$$

- Kharitonov ne permet pas de prouver stabilité de $-1 \leq \delta_1 \leq 0.9$, $|\delta_2| \leq 1$

- Stabilité asymptotique globale - Théorème de Lyapunov

$$\exists V(x) > 0 \ : \ \dot{V}(x) < 0 \ \ \forall x \in \{\dot{x} = f(x)\}$$

- Systèmes linéaires $\dot{x} = Ax$, fct de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$

$$P > 0 \ , \ A^T P + P A < 0$$

  - C'est un problème LMI
  - Preuve par congruence

- Systèmes linéaires incertains $\dot{x} = A(\Delta)x$,
  - Fonction de Lyapunov quadratique dépendant des paramètres

$$P(\Delta) > 0 \ , \ A^T(\Delta)P(\Delta) + P(\Delta)A(\Delta) < 0 \ , \ \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

  - LMI mais avec infinité de contraintes et de variables

- Stabilité asymptotique globale - Théorème de Lyapunov

- Systèmes linéaires incertains $\dot{x} = A(\Delta)x$,
  - Fonction de Lyapunov quadratique dépendant des paramètres

$$P(\Delta) > 0 \ , \ A^T(\Delta)P(\Delta) + P(\Delta)A(\Delta) < 0 \ , \ \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

- "Stabilité quadratique" Barmish [Barmish(1985)] :
  - Fonction de Lyapunov unique pour toutes les incertitudes

$$P > 0 \ , \ A^T(\Delta)P + PA(\Delta) < 0 \ , \ \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

  - Test sur les sommets pour un système polytopique :

$$P > 0 \ , \ A^{[v]T}P + PA^{[v]} < 0 \ , \ \forall v = 1 \ldots \bar{v}$$
$$A(\Delta) \in \text{co}\left\{A^{[v]} \ , \ v = 1 \ldots \bar{v}\right\}$$

  - Preuve (**ssi**) : convexité des contraintes LMI

■ Stabilité asymptotique globale - Théorème de Lyapunov

- Systèmes linéaires incertains $\dot{x} = A(\Delta)x$,
  - Fonction de Lyapunov quadratique dépendant des paramètres

$$P(\Delta) > 0 \ , \ A^T(\Delta)P(\Delta) + P(\Delta)A(\Delta) < 0 \ , \ \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

- Variables de relaxation [Peaucelle et al.(2000)Peaucelle, Arzelier, Bachelier, and Bernussou] :
  - Fonction de Lyapunov polytopique $P(\Delta) = \sum \zeta_v P^{[v]}$ pour $A(\Delta) = \sum \zeta_v A^{[v]}$

$$P^{[v]} > 0 \ , \ \begin{bmatrix} 0 & P^{[v]} \\ P^{[v]} & 0 \end{bmatrix} < F \begin{bmatrix} A^{[v]} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^{[v]T} & -1 \end{bmatrix} F^T \ , \ \forall v = 1 \dots \overline{v}$$

  - Preuve (**suffisance**) : convexité des contraintes + congruence

- Stabilité asymptotique globale - Théorème de Lyapunov

- Systèmes linéaires incertains $\dot{x} = A(\Delta)x$,
  - Fonction de Lyapunov quadratique dépendant des paramètres

$$P(\Delta) > 0 \ , \ \ A^T(\Delta)P(\Delta) + P(\Delta)A(\Delta) < 0 \ , \ \ \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

- Théorème de Polya [Chesi(2010)] :
  - Fonction de Lyapunov polytopique $P(\Delta) = \sum \zeta_v P^{[v]}$ pour $A(\Delta) = \sum \zeta_v A^{[v]}$

$$P^{[v]} > 0 \ , \ \ A^{[v]T}P^{[v]} + P^{[v]}A^{[v]} < 0 \ , \ \ \forall v = 1 \dots \overline{v}$$

$$A^{[v_1]T}P^{[v_2]} + P^{[v_2]}A^{[v_1]} + A^{[v_2]T}P^{[v_1]} + P^{[v_1]}A^{[v_2]} < 0 \ , \ \ \forall v_1 \neq v_2 \in \{1 \dots \overline{v}\}$$

  - Preuve (**suffisance**) : positivité des coefficients des polynômes homogènes
  - Théorème de Polya : construction de résultats LMI asymptotiquement non pessimistes

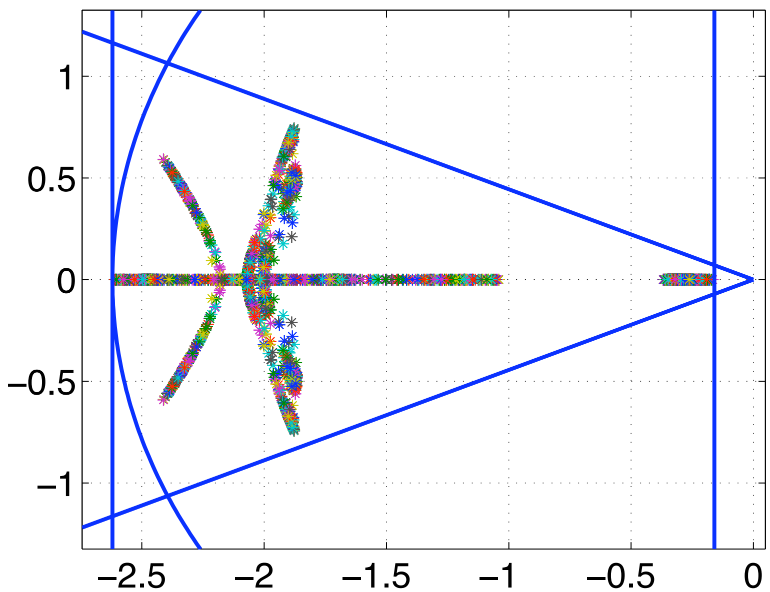
- Localisation robuste des pôles des systèmes LTI incertains

- Localisation des v.p. de $A(\Delta)$ pour tout $\Delta \in \mathbf{\Delta}$

  - Exemple : polytope avec 3 sommets

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{[3]} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tirage aléatoire de 1000 combinaisons linéaires de ces sommets



- Re$(\text{eig}(A(\Delta))) \leq -0.16 \ \Rightarrow \ \tau_{\min} \leq 6.25s$
- Re$(\text{eig}(A(\Delta))) \geq -2.62 \ \Rightarrow \ \tau_{\max} \geq 0.39s$
- $|\text{eig}(A(\Delta))| \leq 2.62 \ \Rightarrow \ \omega_{n\,\max} \leq 2.62\text{rad}/s$
- $\angle([0, j\omega], \text{eig}(A(\Delta))) \geq 66° \ \Rightarrow \ \zeta_{\min} \geq 0.92$

- Localisation robuste des pôles des systèmes LTI incertains

- Localisation dans des régions quadratiques de C tq $r_1\lambda\lambda^* + r_2^*\lambda + r_2\lambda^* + r_3 > 0$
  - $-\lambda - \lambda^* + 2\alpha > 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}(\lambda) < \alpha$
  - $\lambda + \lambda^* - 2\alpha > 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}(\lambda) > \alpha$
  - $-\lambda\lambda^* + \alpha^*\lambda + \alpha\lambda^* + r^2 - \alpha^*\alpha > 0 \;\Leftrightarrow\; |\alpha - \lambda| < r$
  - $-e^{j\psi}\lambda - e^{-j\psi}\lambda^* + \alpha e^{-j\psi} + \alpha^* e^{j\psi} > 0 \;\Leftrightarrow\; \angle([\alpha, \alpha + j\omega], \lambda) > \psi$

- Condition LMI

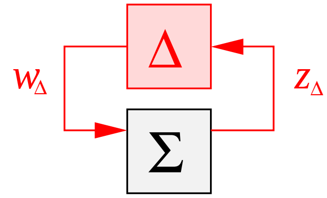
$$P > 0 \;,\; r_1 A^* P A + r_2 P A + r_2^* A^* P + r_3 P > 0$$

  - Preuve : congruence avec vecteur propre de A
  - Exemple : Condition de stabilité de $x_{k+1} = Ax$ $\quad P > 0 \;,\; -A^*PA + P > 0$
  - Exercice : Construire conditions LMI de localisation de pôles robuste

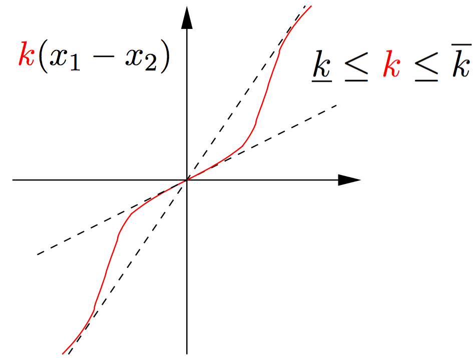
Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Cours 3 - Stabilité robuste et théorème du petit-gain

Stabilité robuste - Problème de Lur'e

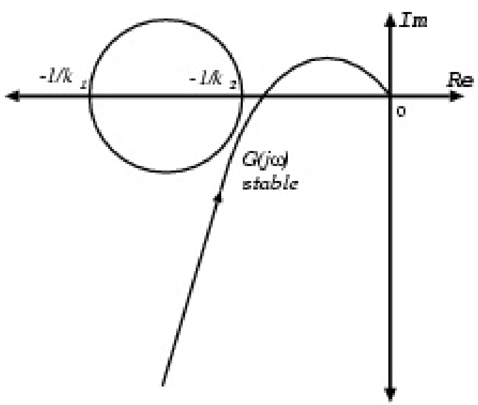


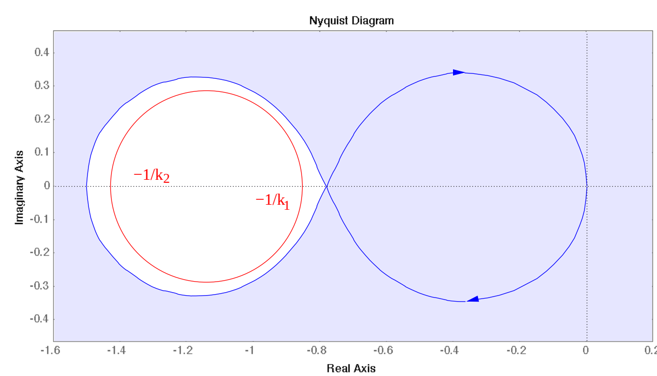
- $\Delta \in [\,-k_1,\ -k_2\,]$ gain TV,NL borné dans un secteur
- $\Sigma = T(j\omega)$ fonction de transfert



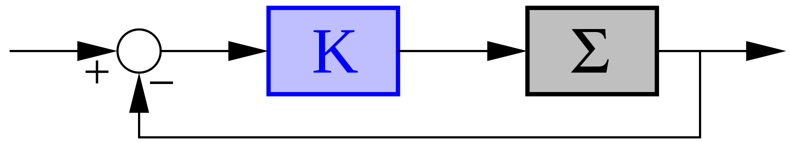
Critère du cercle :

- Pour une valeur $k \in [\,-k_1,\ -k_2\,]$ la boucle fermée est stable
- Le tracé de Nichols ne coupe pas le cercle de diamètre $[\,-1/k_1\ ,\ -1/k_2\,]$

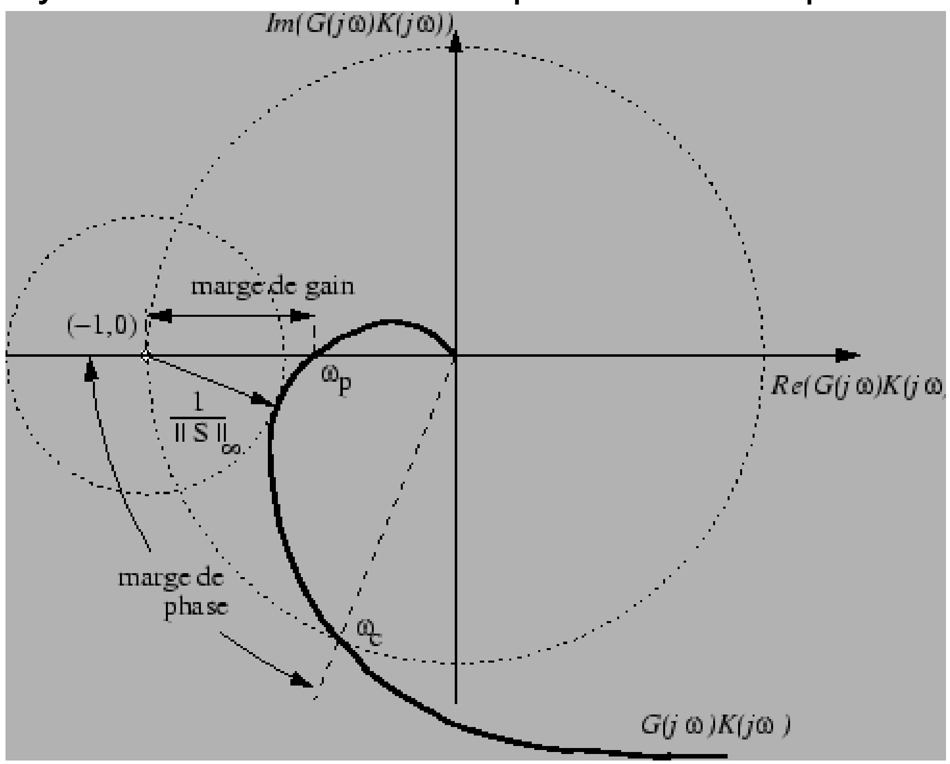




- Stabilité robuste - Conséquence du critère du cercle pour les systèmes SISO



- Plus le lieu de Nyquist de ΣK est distant du point -1 plus on peut attendre de robustesse
  - Marge de gain : de combien augmenter/diminuer le gain de ΣK sans couper -1
  - Marge de phase : de combien augmenter/diminuer la phase de ΣK sans couper -1
  - Marge de module : rayon maximal du cercle autour de -1 qui ne coupe pas ΣK
  - Marge de module : rayon des cercles en tout point de ΣK qui ne coupent pas -1.



Stabilité robuste - Marge de module SISO

- Marge de module : rayon maximal du cercle autour de -1 qui ne coupe pas ΣK

$$r = \min_{\omega} |1 + \Sigma(j\omega)K(j\omega)| = \frac{1}{\max_{\omega} |1 + \Sigma(j\omega)K(j\omega)|^{-1}}$$

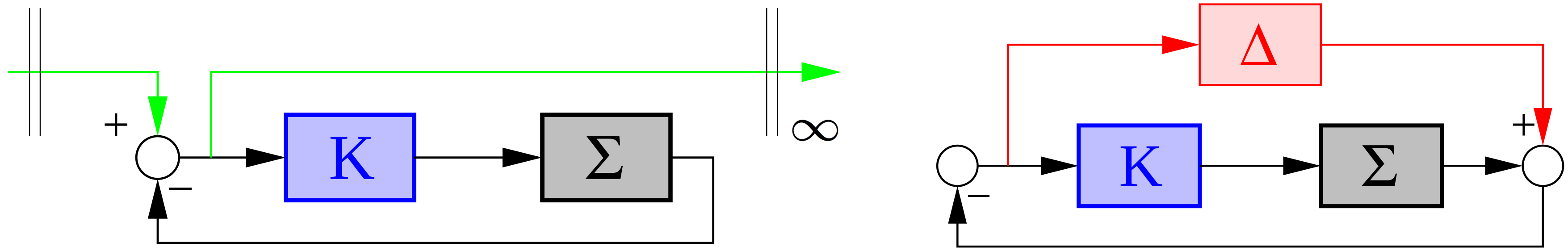
- Marge de module : rayon des cercles en tout point de ΣK qui ne coupent pas -1.

Stabilité robuste - Marge de module MIMO

- Marge de module : inverse de la norme H_∞ de la fonction de sensibilité $S = (1 + \Sigma K)^{-1}$

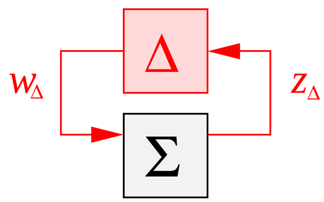
$$r = \min_{\omega} \underline{\sigma}(1 + \Sigma(j\omega)K(j\omega)) = \frac{1}{\max_{\omega} \overline{\sigma}(S(j\omega))} = ||S||_\infty^{-1}$$

- Marge de module : norme maximale des incertitudes additives sur ΣK : $||\Delta||_\infty \leq r$



■ Stabilité robuste - Théorème du petit gain - [Zhou et al.(1996)Zhou, Doyle, and Glover]

Σ *est stable et* $||\Sigma||_\infty < \mu$ ***ssi***

la boucle fermée 

est stable pour toute incertitude $||\Delta||_\infty \leq \frac{1}{\mu}$

- Stabilité (interne) de la boucle $\Delta \star \Sigma$ où Σ et Δ sont des matrices de transfert :

$\Leftrightarrow$ bien posé de la boucle pour tout $s \in \mathbb{C}^+$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\Sigma(s) \\ -\Delta(s) & 1 \end{bmatrix} \text{ propre et inversible pour tout } s \in \mathbb{C}^+$$

- Stabilité robuste de la boucle $\Delta \star \Sigma$ où Σ et Δ sont des matrices de transfert :

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\Sigma(s) \\ -\Delta(s) & 1 \end{bmatrix} \text{ propre et inversible pour tout } s \in \mathbb{C}^+ \text{ et tout } \Delta \in \mathbb{\Delta}$$

- Preuve suffisance :

  - Pour tout $\tau \in [0\ \ 1]$ on a $\tau\|\Delta\|_\infty\|\Sigma\|_\infty < 1$

    On en déduit $\|\Sigma[\tau\Delta]\|_\infty < 1\ \ \forall\tau \in [0\ \ 1]\ \ \forall||\Delta||_\infty \leq \frac{1}{\mu}$

    C'est à dire $\bar{\sigma}(\Sigma(j\omega)[\tau\Delta(j\omega)]) < 1\ \ \forall\tau \in [0\ \ 1]\ \ \forall||\Delta||_\infty \leq \frac{1}{\mu}\ \ \forall\omega$

    $[1 - \Sigma(j\omega)[\tau\Delta(j\omega)]]$ est inversible $\forall\tau \in [0\ \ 1]\ \ \forall||\Delta||_\infty \leq \frac{1}{\mu}\ \ \forall\omega$

    $\begin{bmatrix} 1 & -\Sigma(j\omega) \\ -\tau\Delta(j\omega) & 1 \end{bmatrix}$ est inversible $\forall\tau \in [0\ \ 1]\ \ \forall||\Delta||_\infty \leq \frac{1}{\mu}\ \ \forall\omega$

    (A) La propriété est vraie $\forall\tau \in [0\ ,\ \ 1]$ et $s = j\omega$ sur l'axe imaginaire = frontière de $\mathbb{C}^+$

  - Σ est stable donc $\begin{bmatrix} 1 & -\Sigma(s) \\ -0\Delta(s) & 1 \end{bmatrix}$ propre et inversible $\forall||\Delta||_\infty \leq \frac{1}{\mu}\ \ \forall s \in \mathbb{C}^+$

    (B) La propriété est vraie pour $\tau = 0$ et $s \in \mathbb{C}^+$

  - Argument de continuité : Pour que la propriété soit fausse pour $\tau = 1$ et un $s \in \mathbb{C}^+$ il faut qu'elle soit à la limite entre validité et non-validité pour un certain $\tau \in]0\ ,\ \ 1[$. C'est à dire qu'il existe $\tau \in]0\ ,\ \ 1[$ et $s = j\omega$ qui contredise (A).

- Preuve de la nécessité - Supposons $\|\Sigma\|_\infty = \mu + \epsilon$

$$\Rightarrow \exists \omega_0, \ \exists y \ (y^* y = (\mu+\epsilon)^2), \ \exists u \ (u^* u = 1) \ : \ y = \Sigma(j\omega_0) u$$

En prenant $\Delta = \frac{1}{(\mu+\epsilon)^2} u y^*$ on a $(1 - \Delta\Sigma(j\omega_0))u = 0$

i.e. Δ rend la boucle mal posée, donc instable, et on a

$$\|\Delta\|_\infty^2 = \frac{1}{(\mu+\epsilon)^4}\sigma_{\max}(y u^* u y^*) = \frac{1}{(\mu+\epsilon)^4}\sigma_{\max}(y y^*) = \frac{1}{(\mu+\epsilon)^2} < \frac{1}{\mu^2}$$

- Ici Δ est une matrice a valeurs complexes

On peut aussi construire $\Delta(s)$ modèle LTI à coefficient réels qui coïncide pour $s = j\omega_0$

[Scherer()]

Exemple d'emploi du théorème du petit gain

- Capteurs : dispositifs conçus pour mesurer des grandeurs physiques - ils sont imparfaits
  - erreur de mesure et bruits en haute fréquence : $y_m = (1 + \Delta_m W_m(s))y$

    W_m : gabarit fréquentiel (passe haut) , $\|\Delta_m\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_m}$
  - Système Σ en boucle fermée avec un correcteur K, tenant compte de capteurs incertains :

$$((1 + \Delta_m W_m)\Sigma K) \star (-1) = \Delta_m \star (-W_m \Sigma K (1 + \Sigma K)^{-1})$$

  - Stabilité robuste garantie si $\|W_m \Sigma K (1 + \Sigma K)^{-1}\|_\infty < \gamma_m$
  - SISO : $\gamma_m W_m^{-1}$= gabarit sur la sensibilité complémentaire $\Sigma K (1 + \Sigma K)^{-1}$
  - MIMO et $W_m = w_m 1$ alors $\gamma_m w_m^{-1}$= gabarit sur $\bar{\sigma}$ de la sensibilité complémentaire

- Exercice : Condition de stabilité robuste vis-à-vis d'incertitudes sur les actionneurs

- Exemple d'emploi du théorème du petit gain

- Précision de la boucle fermée à des perturbations basse fréquence sur l'entrée du système
  - Peut être évaluée par

$$\left\| \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Sigma & \Sigma K \end{bmatrix} \star (-1) \right) W_p \right\|_\infty = \|(1+\Sigma K)^{-1} \Sigma W_p\|_\infty \leq \gamma_p$$

W_p : gabarit fréquentiel (passe bas)

  - Equivalent à la stabilité robuste vis-à-vis d'incertitudes $\|\Delta_p\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_p}$ de

$$\Delta_p \star \left(\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Sigma & \Sigma K \end{bmatrix} \star (-1) \right) W_p \right) = (\Sigma(K + W_p \Delta_p)) \star (-1)$$

  - Le rejet de perturbation $\Leftrightarrow$ robustesse vis-à-vis d'incertitudes additives BF sur le contrôleur

- Exemple de performance $\mathcal{H}_\infty$ robuste
- Comment évaluer la précision robuste pour toutes les incertitudes sur les capteurs ?

$$\left\| \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ ((1+\Delta_m W_m)\Sigma & ((1+\Delta_m W_m)\Sigma K \end{bmatrix} \star (-1) \right) W_p \right\|_\infty \leq \gamma_p \ , \ \forall \|\Delta_m\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_m}$$

- Stabilité robuste de $((1+\Delta_m W_m)\Sigma(K + W_p\Delta_p)) \star (-1) =$

$$\begin{bmatrix} \Delta_m & \\ & \Delta_p \end{bmatrix} \overset{w_\Delta, z_\Delta}{\star} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & W_m \Sigma W_p & W_m \Sigma K \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & \Sigma W_p & \Sigma K \end{array}\right] \overset{u,y}{\star} (-1) \ , \quad \begin{array}{l} \|\Delta_m\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_m} \\ \|\Delta_p\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_p} \end{array}$$

- Stabilité robuste

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\Delta}_m & \\ & \hat{\Delta}_p \end{bmatrix}}_{\hat{\Delta}} \overset{w_\Delta, z_\Delta}{\star} \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{1}{\gamma_m \gamma_p} W_m \Sigma W_p & \frac{1}{\gamma_m} W_m \Sigma \\ -1 & -\frac{1}{\gamma_p} \Sigma W_p & -\Sigma \\ \hline -1 & -\frac{1}{\gamma_p} \Sigma W_p & -\Sigma \end{array}\right]}_{\hat{\Sigma}} \overset{u,y}{\star} K \ , \quad \begin{array}{l} \|\hat{\Delta}_m\|_\infty \leq 1 \\ \|\hat{\Delta}_p\|_\infty \leq 1 \end{array}$$

- Condition <u>suffisante</u> : $\|\hat{\Sigma} \star K\|_\infty < 1$.

Exemple de robustesse paramétrique

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 1_2 & \\ & \alpha_2 \end{bmatrix} \overset{w_\Delta, z_\Delta}{\star} \begin{bmatrix} \Sigma_{\Delta\Delta} & \Sigma_{\Delta u} \\ \Sigma_{y\Delta} & \Sigma_{yu} \end{bmatrix} \overset{u,y}{\star} K \ , \quad \begin{array}{l} \alpha_1 \in [\underline{\alpha}_1 \ , \ \overline{\alpha}_1] \\ {\alpha_2}^* + \alpha_2 \geq 0 \end{array}$$

- Incertitudes normalisées :

$$\alpha_1 = \overbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_1)}^{c_1} + \overbrace{\tfrac{1}{2}(\overline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_1)}^{r_1} \delta_1 = \delta_1 \star \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r_1 & c_1 \end{bmatrix} \quad : \quad \delta_1 \in [-1 \ , \ 1]$$

$$\alpha_2 = \tfrac{1-\delta_2}{1+\delta_2} = \delta_2 \star \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad : \quad |\delta_2| \leq 1$$

- En utilisant les propriétés des LFT on se ramène à stabilité robuste de

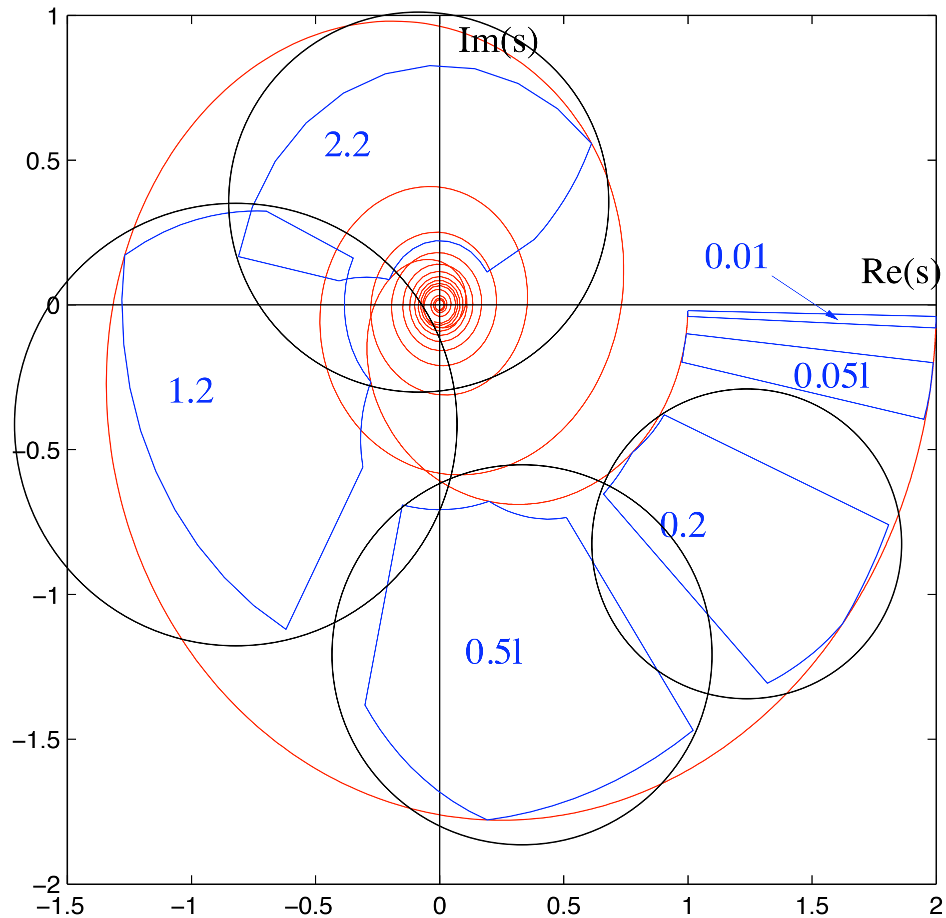
$$\begin{bmatrix} \delta_1 1_2 & \\ & \delta_2 \end{bmatrix} \overset{\hat{w}_\Delta, \hat{z}_\Delta}{\star} \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{\Delta\Delta} & \hat{\Sigma}_{\Delta u} \\ \hat{\Sigma}_{y\Delta} & \hat{\Sigma}_{yu} \end{bmatrix} \overset{u,y}{\star} K$$

- Condition suffisante : $\|\hat{\Sigma} \star K\|_\infty < 1$.

- Condition <u>suffisante</u> : $\|\hat{\Sigma} \star K\|_\infty < 1$.
- Illustration du pessimisme

Zones bleues = possibles valeurs de $\hat{\Sigma} \star K$ pour une fréquence donnée

Cercles = incertitudes non structurées incluant le cas strcturé



- Exemple de multi-performance $\mathcal{H}_\infty$

- Précision de la boucle fermée à des perturbations basse fréquence sur l'entrée du système

$$\left\| \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Sigma & \Sigma K \end{bmatrix} \star (-1) \right) W_p \right\|_\infty = \|(1+\Sigma K)^{-1} \Sigma W_p\|_\infty \leq \gamma_p$$

- Minimisation de l'effort des actionneurs en réponse à des bruits de mesure

$$\left\| \left(\begin{bmatrix} 0 & K \\ 1 & \Sigma K \end{bmatrix} \star (-1) \right) W_b \right\|_\infty = \|K(1+\Sigma K)^{-1} W_b\|_\infty \leq \gamma_b$$

- Condition <u>suffisante</u> : stabilité robuste vis à vis de 2 incertitudes

$$\begin{bmatrix} \hat{\Delta}_p & \\ & \hat{\Delta}_b \end{bmatrix} \star \left(\overbrace{\left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{\gamma_p}\Sigma W_p & -\frac{1}{\gamma_b} W_b & -\Sigma \\ \frac{1}{\gamma_p} W_p & 0 & 1 \\ \hline -\frac{1}{\gamma_p}\Sigma W_p & -\frac{1}{\gamma_b} W_b & -\Sigma \end{array} \right]}^{\hat{\Sigma}} \star K \right) \quad , \quad \begin{array}{l} \|\hat{\Delta}_p\|_\infty \leq 1 \\ \|\hat{\Delta}_b\|_\infty \leq 1 \end{array}$$

- Condition <u>suffisante</u> de la condition <u>suffisante</u> : $\|\hat{\Sigma} \star K\|_\infty \leq 1$

Loop-shaping SISO

– Suivi de référence et réjection de perturbations :

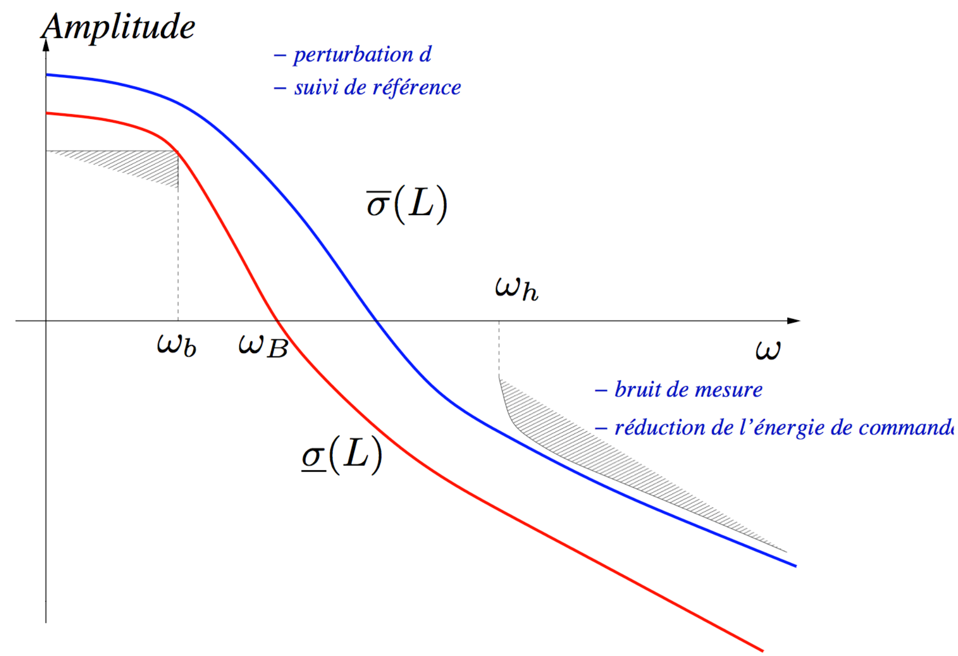
$$\underline{\sigma}(L_y) \text{ grand } \; 0 \leq \omega \leq \omega_B$$

– Réduction d'énergie de commande :

$$\overline{\sigma}(K) \text{ faible } \; 0 \leq \omega_B \leq \omega$$

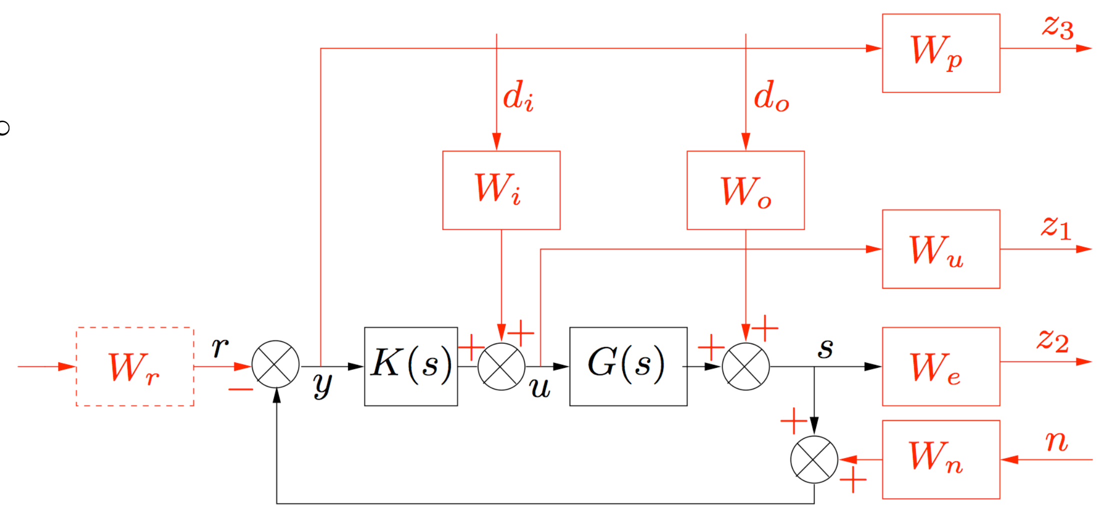
– Filtrage des bruits de mesure :

$$\overline{\sigma}(L_y) \text{ faible } \; 0 \leq \omega_B \leq \omega$$



Généralisation MIMO grâce aux filtres et H_∞

- W_u : restriction sur u
- W_e, W_p : spécif. sur des transferts en BF
- W_i, W_o, W_n : contenu fréq. de d et de n
- W_r : modelage de la consigne



■ Exemple : système à retard

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau)$$

- Factorisation de $A_d = B_d C_d$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_d w_d(t) \\ z(t) = C_d x(t) \end{array} \right. \quad , \quad w(t) = z(t-\tau)$$

- Opérateur retard $e^{-s\tau}$ = opérateur borné dans disque unité quand $s \in \mathbb{C}^+$

$$\|e^{-j\omega\tau}\|_\infty = 1$$

- Condition suffisante de stabilité indépendante du retard :

$$\|C_d(s\mathbf{1} - A)^{-1} B_d\|_\infty < 1$$

Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Cours 4 - Stabilité robuste, μ-analyse

■ Problème générique d'analyse de stabilité robuste (pouvant inclure performance H_∞)

- Stabilité de la "boucle $M - \Delta$" : stabilité de $\Delta \star M$ où $M = \hat{\Sigma} \star K$
- $\Delta \in \mathbb{\Delta}_\gamma$ incertitude structurée

$$\Delta(s) = \text{diag}\left\{\delta_1 1, \cdots, \delta_{n_r} 1,\ \ q_1(s) 1, \cdots, q_{n_c}(s) 1,\ \ \Delta_1(s), \cdots, \Delta_{n_f}(s)\right\}$$

- n_r blocs réels répétés avec $\delta_j \in \mathbb{R}$, $|\delta_j| \leq \gamma$
- n_c blocs LTI scalaires répétés avec $q_j \in \mathcal{RH}_\infty$, $\|q_j\|_\infty \leq \gamma$
- n_f blocs LTI matriciels stables $\Delta_j \in \mathcal{RH}_\infty^{p_j \times l_j}$, $\|\Delta_j\|_\infty \leq \gamma$

(incertitudes normalisée : $\gamma = 1$)

- Pour chaque fréquence ω on a $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \gamma$ et $\Delta(j\omega) \in \mathbb{\nabla}$ défini par :

$$\nabla = \text{diag}\left\{\delta_1 1, \cdots, \delta_{n_r} 1,\ \ q_1 1, \cdots, q_{n_c} 1,\ \ \Delta_1, \cdots, \Delta_{n_f}\right\}$$

- n_r blocs réels répétés avec $\delta_j \in \mathbb{R}$
- n_c blocs complexes répétés avec $q_j \in \mathbb{C}$
- n_f blocs matriciels complexes $\Delta_j \in \mathbb{C}^{p_j \times l_j}$

- $\mathbb{\nabla}$ définit la "structure" de l'incertitude, γ sa "taille"

- Problème générique d'analyse de stabilité robuste (suite)

- Pour M stable, trouver le plus grand γ tel que $\Delta \star M$ stable pour tout $\Delta \in \mathbb{\Delta}_\gamma$

  - Argument de continuité (voir preuve Théorème du petit gain), il suffit de montrer que

    $[1 - M(j\omega)\tau\Delta(j\omega)]$ inversible pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0\ ,\ 1]$, $\Delta \in \mathbb{\Delta}_\gamma$

  - Par construction de $\mathbb{\nabla}$ la propriété est vraie si

    $[1 - M(j\omega)\Delta]$ inversible pour tout $\Delta \in \mathbb{\nabla}$ tel que $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma$

- Définition : Marge de non singularité d'une matrice complexe = $k_{\nabla}(M_0) = \max \gamma_0$

  Plus grande valeur de γ_0 telle que $[1 - M_0\Delta]$ inversible pour tout $\Delta \in \mathbb{\nabla}$ tq $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma_0$

  - Cette valeur dépend de M_0 et de la structure de l'incertitude $\mathbb{\nabla}$

- Définition : Valeur singulière structurée d'une matrice complexe :

$$\mu_{\nabla}(M_0) = \frac{1}{k_{\nabla}(M_0)}$$

Théorème

- μ-analyse (borne supérieure) :

  si $\mu_\nabla(M(j\omega)) < \mu_u$ pour toutes des fréquences $\omega \in \mathbb{R}^+$

  alors $\Delta \star M$ stable pour tout $\Delta \in \mathbb{\Delta}_{\gamma_u}$ avec $\gamma_u = 1/\mu_u$

- μ-analyse (borne inférieure) : [Tits and Fan(1995)]

  si $\mu_\nabla(M(j\omega)) > \mu_l$ pour une fréquence $\omega \in \mathbb{R}^+$

  alors il existe $\Delta \in \mathbb{\Delta}_{\gamma_l}$ avec $\gamma_l = 1/\mu_l$ qui rend $\Delta \star M$ instable

- Stabilité robuste évaluée par bornes supérieures/inférieures de $\mu_\nabla(M(j\omega))$
- Mais... le calcul de $\mu_\nabla(M)$ est difficile en général
- Il faut le faire pour toutes les fréquences (ou un quadrillage suffisamment fin)

■ Propriétés de μ_∇ :

● μ_∇ croît avec la taille de l'ensemble d'incertitude

$$\mathbb{\nabla}_1 \subset \mathbb{\nabla}_2 \;\Rightarrow\; \mu_{\nabla_1}(M_0) \leq \mu_{\nabla_2}(M_0)$$

● $\mu_\nabla(\alpha M_0) = |\alpha| \mu_\nabla(M_0)$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

● Si $\mathbb{\nabla} = \mathbb{C}^{p \times q}$ alors $\mu_\nabla(M_0) = \bar{\sigma}(M_0)$ et donc $\|M\|_\infty = \sup_\omega \mu_\nabla(M(j\omega))$

(Résultat de μ-analyse se confond alors avec le théorème du petit gain)

● Si $\mathbb{\nabla} = \{\nabla = \delta 1, \delta \in \mathbb{C}\}$ alors $\mu_\nabla(M_0) = \rho(M_0)$

et donc pour tout $\mathbb{\nabla}$ avec que des blocs complexes on a $\boxed{\rho(M_0) \leq \mu_\nabla(M_0) \leq \bar{\sigma}(M_0)}$

● Si $\mathbb{\nabla} = \{\nabla = \delta 1, \delta \in \mathbb{R}\}$ alors $\mu_\nabla(M_0) = \rho_R(M_0)$

(plus grand module de v.p. réelle)

et donc pour tout $\mathbb{\nabla}$ on a $\boxed{\rho_R(M_0) \leq \mu_\nabla(M_0) \leq \bar{\sigma}(M_0)}$

Exemple : [Skogestad 96]

$$M = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \quad \mu_{\nabla}(M) = \begin{cases} \rho(M) = |a+b| \text{ pour } \nabla = \delta 1 \\ |a| + |b| \text{ pour } \nabla = \mathrm{diag}\{\delta_1, \delta_2\} \\ \overline{\sigma}(M) = \sqrt{2|a|^2 + 2|b|^2} \text{ pour } \nabla \text{ pleine} \end{cases}$$

Exemple : [Zhou96]

$$M = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \nabla = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \rho(M) = 0 \\ \overline{\sigma}(M) = \mu_{\nabla} = 1 \end{array}$$

Nota : l'écart entre les bornes inférieure et supérieure peut être grand

■ Propriétés de μ_∇ :

● Si $\mathbb{V}$ avec uniquement blocs complexes alors $\mu_\nabla(M_0) \ : \ \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue

● Si il existe des blocs réels $\mu_\nabla(M_0) \ : \ \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être discontinue

▲ Exemple avec $\nabla = \delta 1_2 \ , \ \delta \in \mathbb{R}$ et $M_0 = \begin{bmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{bmatrix}$

$$\mu_\nabla(M_0) = \rho_R(M_0) = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq 0 \\ 1 \text{ si } m = 0 \end{cases}$$

▲ ! ! La fonction $\omega \mapsto \mu_\nabla(M(j\omega))$ peut contenir des sauts

Calcul d'une meilleure borne inférieure de μ

- Tirage aléatoire :
  - Prendre aléatoirement $\nabla \in \mathbb{V}$ et normaliser $\hat{\nabla} = \frac{1}{\bar{\sigma}(\nabla)}\nabla$
  - alors $\rho_R(M_0\hat{\nabla}) \leq \mu_{\nabla}(M_0)$
  - Preuve : $(1 - M_0\left[\frac{1}{\rho_R(M_0\hat{\nabla})}\hat{\nabla}\right])$ n'est pas inversible et $\bar{\sigma}(\frac{1}{\rho_R(M_0\hat{\nabla})}\hat{\nabla}) = \frac{1}{\rho_R(M_0\hat{\nabla})}$
- Problème d'optimisation :

$$\sup_{\hat{\nabla}\in\nabla,\bar{\sigma}(\hat{\nabla})=1} \rho_R(M_0\hat{\nabla}) \leq \mu_{\nabla}(M_0)$$

  - Optimisation non convexe ($\bar{\sigma}(\hat{\nabla}) = 1$ est une contrainte non-convexe)
- Cas où $\mathbb{V}$ contient uniquement des blocs complexes, alors

$$\max_{\hat{\nabla}\in\nabla,\bar{\sigma}(\hat{\nabla})=1} \rho(M_0\hat{\nabla}) = \mu_{\nabla}(M_0)$$

- Rappel : calcul de bornes inférieures donne des valeurs d'incertitudes ("petites") qui déstabilisent

- Calcul d'une meilleure borne supérieure de μ (pour garantir stabilité robuste)

- Pour la suite du cours on suppose que tous les blocs $\Delta_j \in \mathbb{C}^{p_j \times p_j}$ sont carrés

- Soit l'ensemble de matrices inversibles suivant (de structure "opposée" à $\mathbb{\nabla}$)

$$\mathbf{D}_\nabla = \left\{ \begin{array}{c} D = \mathrm{diag}(P_1, \cdots, P_{n_r}, \;\; D_1, \cdots, D_{n_c}, \;\; d_1 \mathbf{1}_{p_1}, \cdots, d_{n_f} \mathbf{1}_{p_{n_f}}) \\ P_j = P_j{}^* > 0, \; D_j = D_j{}^* > 0, \; d_j \in \mathbb{R}^{+*} \end{array} \right\}$$

  - Pour tout $D \in \mathbf{D}_\nabla$ et tout $\Delta \in \mathbb{\nabla}$ on a $D\Delta = \Delta D$ et donc

$$\det(\mathbf{1} - M_0 \Delta) = \frac{\det(D)}{\det(D)} \det(\mathbf{1} - M_0 \Delta) = \det(D^{-1}(\mathbf{1} - M_0 \Delta) D) = \det(\mathbf{1} - D^{-1} M_0 D \Delta)$$

  - Ainsi pour tout $D \in \mathbf{D}_\nabla$ on a $\mu_\nabla(M_0) = \mu_\nabla(D^{-1} M_0 D)$

  - Interprétation en terme de boucle

$$\Delta \star M_0 = (D^{-1} \Delta D) \star (D^{-1} M_0 D) = \Delta \star (D^{-1} M_0 D)$$

- Pour tout $D \in \mathbf{D}_\nabla$ on a $\mu_\nabla(M_0) = \mu_\nabla(D^{-1}M_0D) \leq \bar{\sigma}(D^{-1}M_0D)$ d'où

- Le problème d'optimisation suivant donne une borne supérieur de μ :

$$\mu_\nabla(M_0) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}_\nabla} \bar{\sigma}(D^{-1}M_0D) \leq \bar{\sigma}(M_0)$$

- L'écart entre la borne et la valeur réelle peut être grand

  (mais en général bien moins grand que avec $\bar{\sigma}(M_0)$)

- Si $2(n_r + n_c) + n_f \leq 3$ alors il y a égalité

- Le problème d'optimisation de la borne supérieur de μ est convexe

$$\mu_{\nabla}(M_0) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}_{\nabla}} \bar{\sigma}(D^{-1} M_0 D)$$

- Preuve :

  Par définition $\bar{\sigma}(D^{-1} M_0 D) < \kappa$ ssi $D^* M_0^* D^{-*} D^{-1} M_0 D < \kappa^2 \mathbf{1}$

  Par congruence on trouve la contrainte $M_0^* D^{-*} D^{-1} M_0 < \kappa^2 D^{-*} D^{-1}$

  On remarque que $Q = D^{-*} D^{-1} \in \mathbf{D}_{\nabla}$ ssi $D \in \mathbf{D}_{\nabla}$ et donc

$\mu_{\nabla}(M_0) \leq \kappa$ s'il existe une solution aux LMI suivantes $M_0^* Q M_0 < \kappa^2 Q$, $Q \in \mathbf{D}_{\nabla}$

- La minimisation de κ est un "problème LMI de v.p. généralisé",

  convexe, avec solutions en temps polynomial

$\mu_\nabla(M_0) < \kappa$ s'il existe une solution aux LMI suivantes $M_0 Q M_0^* < \kappa^2 Q$, $Q \in \mathbf{D}_\nabla$

- Preuve alternative de la condition LMI
  - La contrainte $M_0^* Q M_0 < \kappa^2 Q$ s'écrit également

$$\begin{bmatrix} 1 & M_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M_0 \end{bmatrix} < 0$$

D'après le lemme de Finsler on en déduit l'existence $\tau > 0$ tel que

$$\begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} < \tau \begin{bmatrix} M_0^* \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 & -1 \end{bmatrix}$$

Par congruence on a pour tout $\Delta \in \mathbb{V}$

$$\begin{bmatrix} \Delta^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 1 \end{bmatrix} < \tau \begin{bmatrix} \Delta^* M_0^* - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \Delta - 1 \end{bmatrix}$$

Par construction, la partie gauche est déinie-positive si $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \frac{1}{\kappa}$

donc $1 - M_0 \Delta$ est non singulière pour toute incertitude $\Delta \in \mathbb{V}$ tq $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \frac{1}{\kappa}$.

■ Condition LMI moins pessimiste (DG-scalings)

● Soit l'ensemble suivant

$$\mathbf{G}_\nabla = \left\{ \; G = \mathrm{diag}(G_1, \cdots, G_{n_r}, \;\; 0, \cdots, 0, \;\; 0, \cdots, 0) \;\; , \;\; G_j = -G_j{}^* \; \right\}$$

▲ Pour tout $G \in \mathbf{G}_\nabla$ et tout $\Delta \in \mathbb{V}$ on a $G\Delta = -\Delta^* G^*$ donc

$$\begin{bmatrix} \Delta^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 1 \end{bmatrix}$$

le preuve précédente tient donc de la même façon si on définit le problème suivant

$\mu_\nabla(M_0) < \kappa$ s'il existe une solution aux LMI suivantes

$$\begin{bmatrix} 1 & M_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M_0 \end{bmatrix} < 0 \;\; , \;\; \begin{array}{c} Q \in \mathbf{D}_\nabla \\ G \in \mathbf{G}_\nabla \end{array}$$

▲ Condition longtemps considérée comme, pessimiste, mais la meilleure possible

Théorème

- μ-analyse (borne supérieure) :

  si $\mu_\nabla(M(j\omega)) < \mu_u$ pour toutes des fréquences $\omega \in \mathbb{R}^+$

  alors $\Delta \star M$ stable pour tout $\Delta \in \mathbb{\Delta}_{\gamma_u}$ avec $\gamma_u = 1/\mu_u$

  - Pour chaque fréquence les DG-scalings donnent une valeur $\mu_u(\omega)$

- μ-analyse (borne inférieure) : [Tits and Fan(1995)]

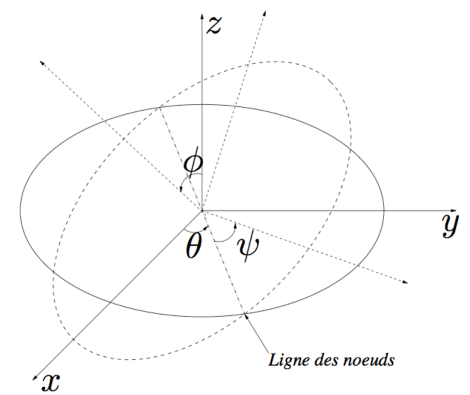
  si $\mu_\nabla(M(j\omega)) > \mu_l$ pour une fréquence $\omega \in \mathbb{R}^+$

  alors il existe $\Delta \in \mathbb{\Delta}_{\gamma_l}$ avec $\gamma_l = 1/\mu_l$ qui rend $\Delta \star M$ instable

  - Pour chaque fréquence des algorithmes (aléatoires/non-convexes) donnent une valeur $\mu_l(\omega)$
  - Il faut le faire pour toutes les fréquences (ou un quadrillage suffisamment fin)

Exemple : stabilité robuste d'un satellite

- Ecriture des équations d'Euler du satellite en spin Ω constante autour de l'axe z et des équations de la cinématique
- Linéarisation des équations d'Euler et de la cinématique
- $I_{xx} = I_{yy} = I_1$ et $I_{zz} = I_3$
- Découplage du mouvement autour de z / axes x et y



- Equations d'Euler linéarisées et découplées :

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\Omega(I_1 - I_3) = T_1$$
$$I_1\dot{\omega}_2 - \omega_1\Omega(I_3 - I_1) = T_2$$

- On pose $a = (1 - I_3/I_1)\Omega$ et $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} T_1/I_1 & T_2/I_1 \end{bmatrix}'$

- Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

- Modèle d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transfert :

$$\Sigma(s) = C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + a^2} \begin{bmatrix} s - a^2 & a(s+1) \\ -a(s+1) & s - a^2 \end{bmatrix}$$

- Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

- Stabilisation interne nominale : $K = 1_2$

  - Test entrée - sortie (fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire)

$$S_y(s) = S_u(s) = (1 + \Sigma(s)K)^{-1} = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} s & -a \\ a & s \end{bmatrix}$$

$$T_y(s) = T_u(s) = \Sigma(s)K(1 + \Sigma(s)K)^{-1} = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

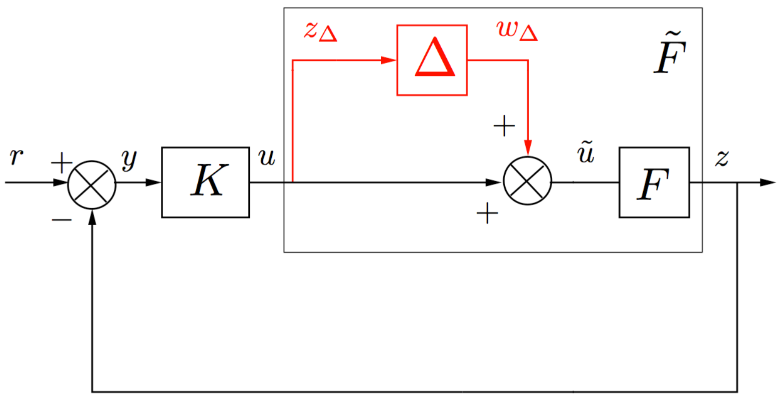
  - Test d'état :

$$\tilde{A} = A - BKC = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

- On suppose que des dynamiques liées aux modes souples ont été négligées ou non modélisées
  - Modèle incertain multiplicatif :

$$\Sigma(s,\Delta) = \Sigma(s)(1+\Delta) = \frac{1}{s^2+a^2}\begin{bmatrix} s-a^2 & a(s+1) \\ -a(s+1) & s-a^2 \end{bmatrix}[1+\Delta]$$



  - Modèle $\Delta \star M$ pour $K = 1$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Sigma & -\Sigma \end{bmatrix} \star K = -K(1+\Sigma K)^{-1}\Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s+1} & -\frac{a}{s+1} \\ \frac{a}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

- Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

- Cas où Δ est pleine, LTI, bornée en norme (cas des dynamiques couplées négligées)

  - Calcul de $\mu_{\nabla_1}(M(j\omega))$ avec $\mathbb{V}_1 = \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$\mu_{\nabla_1}(M(j\omega)) = \bar{\sigma}(M(j\omega)) = \left|\frac{1}{1+j\omega}\right| \bar{\sigma}\begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\sqrt{1+a^2}$$

Donc $\max\limits_{\omega} \mu_{\nabla}(M(j\omega)) = \sqrt{1+a^2}$: la boucle est stable si $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

  - Théorème du petit gain : $\Delta \star M$ stable ssi $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_F}$ où

$$\gamma_F = \|M\|_\infty = \left\| \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \sqrt{1+a^2}$$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Cas où $\mathbb{V}_2 = \left\{\text{diag}(\delta, \delta) \in \mathbb{C}^{2\times 2}\right\}$ à valeurs **complexes**

▲ Le calcul exact de $\mu_{\nabla_2}(M(j\omega))$ est dans ce cas possible :

$$\begin{aligned}\mu_{\nabla_2}(M(j\omega)) = \rho(M(j\omega)) &= \rho\left(\frac{1}{1+j\omega}\begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left|\frac{1}{1+\omega^2}\right| \rho \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}|-1 \pm ja| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\sqrt{1+a^2}\end{aligned}$$

▲ $\Delta \star M$ stable si $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_F}$ où $\gamma_F = \sqrt{1+a^2}$

- Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)
- Cas où $\mathbb{W}_2 = \left\{\text{diag}(\delta, \delta) \in \mathsf{C}^{2\times 2}\right\}$

$$\underbrace{\left\{\Delta = \text{diag}(\delta, \delta) \in \mathsf{C}^{2\times 2}\right\}}_{\nabla_2} \subset \underbrace{\left\{\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2) \in \mathsf{C}^{2\times 2}\right\}}_{\nabla_3} \subset \underbrace{\left\{\Delta \in \mathsf{C}^{2\times 2}\right\}}_{\nabla_1}$$

- On en déduit $\mu_{\nabla_2}(M(j\omega)) \leq \mu_{\nabla_3}(M(j\omega)) \leq \mu_{\nabla_1}(M(j\omega))$.
- Les deux bornes sont égales, donc là encore

$$\Delta \star M \text{ stable si } \|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_F} \text{ où } \gamma_F = \sqrt{1 + a^2}$$

Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

- Cas où $\mathbb{W}_4 = \left\{ \text{diag}(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$ est à valeurs **réelles**

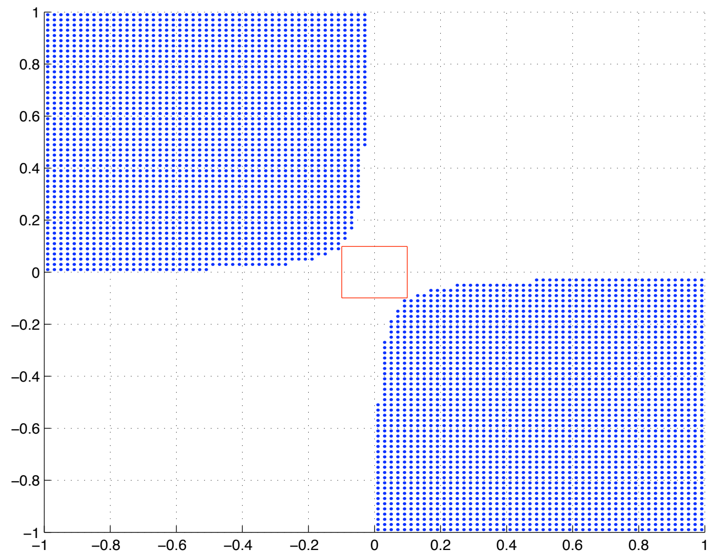
  - Calcul à l'aide du critère de Routh-Hurwitz

$$\det(\mathbf{1} - M\Delta) = \det \begin{bmatrix} 1 + \frac{\delta_1}{s+1} & \frac{a\delta_2}{s+1} \\ \frac{-a\delta_1}{s+1} & 1 + \frac{\delta_2}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} \left(\begin{array}{c} s^2 + (2 + \delta_1 + \delta_2)s \\ +1 + \delta_1 + \delta_2 + (a^2+1)\delta_1\delta_2 \end{array} \right)$$

  - La boucle $\Delta \star M$ est stable si

$$2 + \delta_1 + \delta_2 > 0 \text{ et}$$

$$1 + \delta_1 + \delta_2 + (a^2+1)\delta_1\delta_2$$



  - $\Delta \star M$ stable si $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_F}$ où $\gamma_F = \sqrt{1+a^2}$

■ Exemple : stabilité robuste d'un satellite (suite)

● Cas où $\mathbb{V}_5 = \left\{\text{diag}(\delta, \delta) \in \mathbb{R}^{2\times 2}\right\}$ est à valeurs **réelles**

▲ Calcul à l'aide du critère de Routh-Hurwitz conduit à : $\Delta \star M$ est stable si

$$2 + 2\delta > 0 \;\;,\;\; 1 + 2\delta + (a^2+1)\delta^2 > 0$$

▲ $\Delta \star M$ stable si $\delta > -1$ c'est à dire $\|\Delta\| \leq 1$

▲ Calcul de $\mu_{\nabla_5}(M(j\omega))$ est possible et exact :

$$\mu_{\nabla_2}(M(j\omega)) = \rho_R(M(j\omega)) = \rho_R\left(\frac{1}{1+j\omega}\begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \max \mathbb{R}\left|\frac{-1 \pm ja}{1+j\omega}\right|$$

▲ donc $\mu_{\nabla_5}(M(j\omega)) = 1$ si $\omega = a$ et $\mu_{\nabla_5}(M(j\omega)) = 0$ sinon

Discontinue ! Très difficile à calculer par quadrillage sur ω !

▲ $\Delta \star M$ stable si $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma_F}$ où $\gamma_F = 1$

- Test LMI (pessimiste) sur toutes les fréquences

- Calcul de borne supérieure pour une fréquence donnée $M_0 = M(j\omega)$

$\mu_\nabla(M_0) < \kappa$ s'il existe une solution aux LMI suivantes

$$\begin{bmatrix} 1 & M_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M_0 \end{bmatrix} < 0 \ , \quad \begin{array}{l} Q \in \mathbf{D}_\nabla \\ G \in \mathbf{G}_\nabla \end{array}$$

- Condition suffisante pour le calcul d'une borne supérieure pour toutes les fréquences

$\mu_\nabla(M(j\omega)) < \kappa \ , \ \forall \omega \in \mathbb{R}^+$ s'il existe une solution aux LMI suivantes

$$\begin{bmatrix} 1 & M^*(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M(j\omega) \end{bmatrix} < 0 \ , \quad \begin{array}{l} Q \in \mathbf{D}_\nabla \\ G \in \mathbf{G}_\nabla \end{array} \ , \ \forall \omega \in \mathbb{R}^+$$

- CNS si Q et G dépendent de ω, mais ...

■ Test LMI (pessimiste) sur toutes les fréquences (suite)

● Condition suffisante pour le calcul d'une borne supérieure pour toutes les fréquences

$$\mu_\nabla(M(j\omega)) < \kappa \ , \ \forall \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ s'il existe une solution aux LMI suivantes}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & M^*(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M(j\omega) \end{bmatrix} < 0 \ , \quad \begin{array}{c} Q \in \mathbf{D}_\nabla \\ G \in \mathbf{G}_\nabla \end{array} \quad , \ \forall \omega \in \mathbb{R}^+$$

● Lemme de Kalman-Yakubovitch-Popov avec $M(s) = D + C(s1 - A)^{-1}B$

$$\mu_\nabla(M(j\omega)) < \kappa \ , \ \forall \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ s'il existe une solution aux LMI suivantes}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C & D \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{bmatrix} < 0$$

$$Q \in \mathbf{D}_\nabla \ , \ G \in \mathbf{G}_\nabla \ , \ P = P^*$$

▲ Les deux conditions ci-dessus sont **équivalentes** (on ne montre que la suffisance)

- Preuve de la suffisance du lemme K-Y-P
  - Remarquons que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s1 - A)^{-1}B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ M(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s1 - A)^{-1}B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s1 \end{bmatrix} (s1 - A)^{-1}B$$

  - Donc par congruence et en posant $L(j\omega) = (j\omega 1 - A)^{-1}B$ on conclue

$$\begin{bmatrix} 1 & M^*(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ M(j\omega) \end{bmatrix}$$

$$+L(j\omega)^* \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -j\omega 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j\omega 1 \end{bmatrix}}_{=0} L(j\omega) < 0$$

- Condition issue du lemme K-Y-P et Lyapunov
  - Remarquons que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1-D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \\ 1 \end{bmatrix} (1-D\Delta)^{-1}C$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta(1-D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ A+B\Delta(1-D\Delta)^{-1}C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ A(\Delta) \end{bmatrix}$$

  où $\dot{x} = A(\Delta)x$ est la représentation d'état de $\Delta \star M$.

  - Donc par congruence et en posant $C_a(\Delta) = (1-D\Delta)^{-1}C$ on trouve

$$\overbrace{C_a(\Delta)^* \begin{bmatrix} \Delta^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\kappa^2 Q & G^* \\ G & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 1 \end{bmatrix} C_a(\Delta)}^{\geq 0}$$
$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & A^*(\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A(\Delta) \end{bmatrix}}_{=A^*(\Delta)P+PA(\Delta)} < 0$$

  - Inégalité de Lyapunov pour $V(x) = x^T P x$ (on montre $P > 0$ par $A(0)$ supposée stable)

Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Cours 5 - Synthèse de commandes par retour d'état robustes

- Systèmes mécaniques (équation du mouvement) conduisent à des modèles du second ordre

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Nu \ , \ \ q \in \mathbb{R}^d \ , \ \ d : \text{ degrés de liberté}$$

  - C'est aussi le cas d'autres systèmes (électriques etc.)

- q est mesurée et comparée à une consigne $\epsilon = q_c - q$
- $\dot{q}$ est mesurée ou estimée

- Pour ces systèmes le PID est une loi de commande par retour d'état

$$u(t) = K_p \epsilon(t) + K_I \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau + K_D \dot{q}(t) = \begin{bmatrix} K_D & K_P & K_I \end{bmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{q} \\ -\dot{q} \\ \epsilon \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & M^{-1}K & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -q \\ \int \epsilon \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1}B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} q_c$$

$$y = \qquad \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -q \\ \int \epsilon \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} q_c$$

■ Problème de synthèse par retour d'état

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + B_w w + Bu \\ z = C_z + D_{zw} w + D_{zu} u \\ u = Kx \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = A(K)x + B_w w \\ z = C_z(K)x + D_{zw} w \end{array}\right. , \quad \begin{array}{l} A(K) = A + BK \\ C_z(K) = C_z + D_{zu} K \end{array}$$

- Stabilisation : trouver K tel que $A(K)$ est stable
- Localisation de pôles : trouver K tel que les v.p. de $A(K)$ sont dans une région de $\mathbb{C}$
- Performance H_∞ : trouver K qui minimise la norme H_∞ de la boucle fermée
- Performance H_2 : trouver K qui minimise la norme H_2 de la boucle fermée
- Problème multi-objectif : trouver K qui satisfait plusieurs de ces problèmes

■ Problème de synthèse par retour d'état robuste

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = A(\Delta)x + B_w(\Delta)w + B(\Delta)u \\ z = C_z(\Delta) + D_{zw}(\Delta)w + D_{zu}(\Delta)u \\ u = Kx \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = A(K,\Delta)x + B_w(\Delta)w \\ z = C_z(K,\Delta)x + D_{zw}(\Delta)w \end{array}\right. , \quad \begin{array}{l} A(K,\Delta) \\ = A(\Delta) + B(\Delta)K \\ C_z(K,\Delta) \\ = C_z(\Delta) + D_{zu}(\Delta)K \end{array}$$

- Problème multi-objectif robuste : trouver K qui satisfait plusieurs objectifs, $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$

■ Cas des systèmes incertains affines polytopiques

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A(\Delta) & B_w(\Delta) & B(\Delta) \\ C_z(\Delta) & D_{zw}(\Delta) & D_{zu}(\Delta) \end{bmatrix}}^{M(\Delta)} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}$$

$$M(\Delta) \in \text{CO}\left\{ \begin{bmatrix} A^{[v]} & B_w^{[v]} & B^{[v]} \\ C_z^{[v]} & D_{zw}^{[v]} & D_{zu}^{[v]} \end{bmatrix}, v = 1 \ldots \bar{v} \right\}$$

● Le système en boucle fermée est aussi affine polytopique

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A(K, \Delta) & B_w(\Delta) \\ C_z(K, \Delta) & D_{zw}(\Delta) \end{bmatrix}}^{M(K,\Delta)} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$$

$$M(K, \Delta) \in \text{CO}\left\{ \begin{bmatrix} A^{[v]} + B^{[v]}K & B_w^{[v]} \\ C_z^{[v]} + D_{zu}^{[v]}K & D_{zw}^{[v]} \end{bmatrix}, v = 1 \ldots \bar{v} \right\}$$

- Les tests LMI d'analyse élaborés dans le cours 3 s'appliquent
  - Par exemple : "stabilité quadratique" - trouver P telle que

$$P > 0 \ , \ \ (A^{[v]} + B^{[v]}K)^T P + P(A^{[v]} + B^{[v]}K) < 0 \ , \ \forall v = 1 \dots \bar{v}$$

  - Ce n'est pas une LMI : pas linéaire en les variables P et K
- "Astuce" essentielle pour le calcul LMI d'un retour d'état

$A(K, \Delta)$ *et* $A^T(K, \Delta)$ *ont les mêmes valeurs propres*

  - $\dot{x} = A(K, \Delta)x$ stable ssi $\dot{x}_d = A^T(K, \Delta)x_d$ stable :

$$Q > 0 \ , \ \ (A^{[v]} + B^{[v]}K)Q + Q(A^{[v]} + B^{[v]}K)^T < 0 \ , \ \forall v = 1 \dots \bar{v}$$

  - En posant $S = KQ$ on trouve la condition LMI

$$Q > 0 \ , \ \ A^{[v]}Q + B^{[v]}S + QA^{[v]T} + S^T B^{[v]T} < 0 \ , \ \forall v = 1 \dots \bar{v}$$

  - Si le problème LMI a une solution alors $K = SQ^{-1}$ stabilise robustement le système
  - $\dot{x} = A(K, \Delta)x$ et $\dot{x}_d = A^T(K, \Delta)x_d$ sont dits duaux l'un de l'autre, de plus $Q = P^{-1}$

Retour d'état H_∞ robuste pour les systèmes affines polytopiques

- Condition LMI pour $\|D_{zw} + C_z(s1 - A)^{-1}B_w\|_\infty \leq \gamma$:

$$P > 0 \;, \quad \begin{bmatrix} A^T P + PA + C_z^T C_z & PB_w + C_z^T D_{zw} \\ B_w^T P + D_{zw}^T C_z & -\gamma^2 1 + D_{zw}^T D_{zw} \end{bmatrix} < 0$$

- Sachant que $\|\Sigma(s)\|_\infty = \|\Sigma^*(s)\|_\infty$ on trouve la condition LMI

$$Q > 0 \;, \quad \begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_w B_w^T & QC_z^T + B_w D_{zw}^T \\ C_z Q + D_{zw} B_w^T & -\gamma^2 1 + D_{zw} D_{zw}^T \end{bmatrix} < 0$$

pour le système dual $\begin{cases} \dot{x}_d = A^T x_d + C_z^T w_d \\ z_d = B_w^T x_d + D_{zw}^T w_d \end{cases}$

- On en déduit la condition de synthèse LMI : $Q > 0$ et $\forall v = 1 \ldots \bar{v}$

$$\begin{bmatrix} A^{[v]} Q + B^{[v]} S + Q A^{[v]T} + S^T B^{[v]T} + B_w^{[v]} B_w^{[v]T} & QC_z^T + S^T D_{zu}^{[v]T} + B_w^{[v]} D_{zw}^{[v]T} \\ C_z^{[v]} Q + D_{zu}^{[v]} S + D_{zw}^{[v]} B_w^{[v]T} & -\gamma^2 1 + D_{zw}^{[v]} D_{zw}^{[v]T} \end{bmatrix} < 0$$

- Exercices : faire la même démarche pour obtenir des conditions LMI
  - de localisation des pôles par retour d'état
  - pour la performance H_2

Cours M2 ASTR - module FRS - Commande Robuste

Cours 6 - Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ de correcteurs dynamiques

- Conclusions du cours 3 - Stabilité robuste et théorème du petit gain

- Un grand nombre problèmes de robustesse et de performance (dont loop-shaping) sont satisfaits si $\|\Sigma \star K\|_\infty \leq \gamma$

- Synthèse H_∞ : trouver K qui satisfait $\|\Sigma \star K\|_\infty \leq \gamma$

- Pour Σ donné par

$$\Sigma \quad : \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u \\ y = C_y x + D_{yw} w + D_{yu} u \end{cases}$$

- On cherche K décrit dans l'espace d'état

$$K \quad : \quad \begin{cases} \dot{x}_K = A_K x_K + B_K y \\ u = C_K x_K + D_K y \end{cases}$$

■ Synthèse - Par les équations de Riccati

- Hypothèses sur le système pour l'existence d'une solution
  - (A, B_w) et (A, B_u) stabilisables, (A, C_z) et (A, C_y) détectables
  - $\begin{bmatrix} A - j\omega 1 & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A - j\omega 1 & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix}$ sont de rang plein $\forall\ \omega$

- Hypothèses simplificatrices (pour avoir des équations simples) dites de “normalisation”
  - $D_{zw} = 0$ et $D_{yu} = 0$
  - $D_{zu}^T \begin{bmatrix} C_z & D_{zu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} D_{yw}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

- La boucle fermée s'écrit :

$$\Sigma \star K \quad : \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_K \\ \hline z \end{pmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} A + B_u D_K C_y & B_u C_K & B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K C_y & A_K & B_K D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} D_K C_y & D_{zu} C_K & D_{zu} D_K D_{yw} \end{array}\right]} \begin{pmatrix} x \\ x_K \\ \hline w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A(K) & B_w(K) \\ C_z(K) & D_{zw}(K) \end{bmatrix}$$

- On définit $R(K, \gamma) = D_{zw}^T(K) D_{zw}(K) - \gamma^2 1$ et l'Hamiltonienne (voir annexe "normes") :

$$H_{\gamma,K} =$$
$$\begin{bmatrix} A(K) - B_w(K)R^{-1}(K,\gamma)D_{zw}^T(K)C_z(K) & -B_w(K)R^{-1}(K,\gamma)B_w^T(K) \\ -C_z^T(K)(1 - D_{zw}(K)R^{-1}(K,\gamma)D_{zw}^T(K)C_z(K) & -A^T(K) + C_z^T(K)D_{zw}(K)R^{-1}(K,\gamma)B_w^T(K) \end{bmatrix}$$

- $\|\Sigma \star K\|_\infty \leq \gamma$ ssi $H_{\gamma,K}$ n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire.

Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

- Grâce aux hypothèses, la condition sur l'Hamiltonienne se simplifie. Elle est vraie si
  - Il existe $X \geq 0$ et $Y \geq 0$ telles que $\rho(XY) < \gamma^2$ et solutions des équations de Riccati :

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T) X + C_z^T C_z = 0$$
$$AY + YA^T + Y(\gamma^{-2} C_z^T C_z - C_y^T C_y) Y + B_w B_w^T = 0$$

  - La solution aux équations de Riccati permet de construire

$$\hat{A}_K = A + \gamma^{-2} B_w B_w^T X + B_u F + ZLC_y$$
$$L = -YC_y^T \quad , \quad F = -B_u^T X \quad , \quad Z = (1 - \gamma^{-2} YX)^{-1}$$

  - L'ensemble des correcteurs vérifiant $\|\Sigma \star K\|_\infty \leq \gamma$ est tel que $K = \hat{K} \star \Omega$ où

$$\hat{K} \; : \; \begin{pmatrix} \dot{x}_K \\ u \\ z_\Omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_K & -ZL & ZB_u \\ F & 0 & 1 \\ -C_y & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_K \\ y \\ w_\Omega \end{pmatrix} \quad , \quad \|\Omega\|_\infty < \gamma$$

■ Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

- Le correcteur $K_0 = \hat{K} \star 0$ est appelé correcteur central
- Le correcteur central s'écrit aussi

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_w\hat{w} + B_u u + ZL(C_y\hat{x} - y)$$

  - où $\hat{x}$ est une estimée de l'état ;
  - $u = F\hat{x}$ est un retour d'état ;
  - ZL est un gain d'observateur ;
  - et $\hat{w} = \gamma^{-2}B_w^T X\hat{x}$ une “perturbation” spécifique.

- Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

- Exemple - trouver contrôleur tel que $\|\Sigma \star K\| \leq 1.7$

$$\begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & 0 & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

- Exemple - trouver contrôleur tel que $\|\Sigma \star K\| \leq 1.7$

  - Equation de Riccati $A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T) X + C_z^T C_z = 0$

    (Hamiltonienne associée = $\begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_z^T C_z & -A^T \end{bmatrix}$)

```
>> HamX = [ A , g^-2*Bw*Bw'-Bu*Bu' ; -Cz'*Cz -A'];
>> [x1,x2] = ric_schr( HamX );
>> X=x2/x1
    1.0504    0.5252
    0.5252    0.2626
>> eig(X)
         1.3130
         0
```

- Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

- Exemple - trouver contrôleur tel que $\|\Sigma \star K\| \leq 1.7$

  - Equation de Riccati $AY + YA^T + Y(\gamma^{-2}C_z^TC_z - C_y^TC_y)Y + B_wB_w^T = 0$

    (Hamiltonienne associée = $\begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_z^TC_z - C_y^TC_y \\ -B_wB_w^T & -A \end{bmatrix}$)

```
>> HamY = [ A' , g^-2*Cz'*Cz-Cy'*Cy ; -Bw*Bw' -A];
>> [y1,y2] = ric_schr( HamY );
>> Y=y2/y1
    2.4142         0
         0         0
```

■ Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

● Exemple - trouver contrôleur tel que $\|\Sigma \star K\| \leq 1.7$

▲ Construction du contrôleur central

```
>> L = -Y*Cy' ;
>> F = -Bu'*X ;
>> Z = inv( eye(2) - g^-2*Y*X ) ;
>> Ak = A + g^-2*Bw*Bw'*X + Bu*F + Z*L*Cy ;
>> Bk = -Z*L ;
>> Ck = F ;
>> K = ss( Ak, Bk, Ck, 0)
>> tf( K )
Transfer function:
  -31.05 s - 31.05
---------------------
s^2 + 21.71 s + 67.29
```

- Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

- Exemple - trouver contrôleur tel que $\|\Sigma \star K\| \leq 1.7$

  - Calcul de la norme H_∞ de la boucle fermée

```
>> sys = ss( A, [Bw,Bu] , [Cz;Cy] , [Dzw,Dzu;Dyw,Dyu] );
>> sysbf = feedback( sys, -K, 3, 2);
>> norm (sysbf (1, 1:2) , Inf)
 1.6975
```

■ Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

● Fonction `hinfsyn` de la Robust Control Toolbox

```
>> [kopt,N,g]=hinfsyn(P,1,1,'GMIN',1.6,'GMAX',1.7,'TOLGAM',0.001,...
                              'METHOD','ric','DISPLAY','on')

Test bounds:      1.6000 <  gamma  <=     1.7850
  gamma    hamx_eig  xinf_eig  hamy_eig   yinf_eig   nrho_xy   p/f
    1.785  1.0e+000  1.1e-016  1.0e+000   0.0e+000    0.7827    p
    1.692  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    0.8867    p
    1.646  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    0.9472    p
    1.623  1.0e+000  1.1e-016  1.0e+000   0.0e+000    0.9799    p
    1.612  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    0.9969    p
    1.606  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    1.0056#   f
    1.609  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    1.0012#   f
    1.610  1.0e+000  1.1e-016  1.0e+000   0.0e+000    0.9990    p
    1.609  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    1.0001#   f

 Gamma value achieved:     1.6101
```

Synthèse - Par les équations de Riccati - suite

- Correcteur presque optimal

```
>> tf(kopt)
Transfer function:
  -4041 s - 4041
-------------------
s^2 + 2513 s + 8573
```

Le correcteur presque optimal a comme fonction de transfert

$$\frac{-(s+1)}{2.47 \cdot 10^{-4} s^2 + 0.62s + 2.12} \sim \frac{-(s+1)}{0.62s + 2.12}$$

- On montre théoriquement que c'est toujours le cas : le contrôleur optimal est d'ordre réduit.

Synthèse - Par LMI

- La synthèse de correcteurs du même ordre que le système
- Il existe 2 versions LMI
  - Une version où les variables de K sont éliminées.

    Les LMIs permettent de trouver X et Y (analogues aux solutions des équations de Riccati)

    Une seconde LMI construite avec X et Y fixées permet de trouver K
  - Une autre version où les LMI impliquent X et Y et des variables $\tilde{K}$.

    La solution permet de construire K grâce à une formule sur X, Y, $\tilde{K}$ et Σ.

μ-Synthèse

- Synthèse H_∞ ($K_0 = \arg\min_K \|\Sigma \star K\|_\infty$) permet de trouver K_0 telle que

$$\Delta \star \Sigma \star K_0 \quad \text{stable} \quad \forall \Delta \ : \ \|\Delta\| \leq \frac{1}{\gamma_0}$$

  - Mais le résultat est pessimiste si Δ est structurée

$$\max_\omega \mu_\nabla(\Sigma(j\omega) \star K_0(j\omega)) \leq \|\Sigma \star K_0\|_\infty = \gamma_0$$

- D-scaling unique sur toutes les fréquences donne (étape d'analyse de la boucle fermée)

$$\max_\omega \mu_\nabla(\Sigma(j\omega) \star K_0(j\omega)) \leq \min_{D_1 \in \mathbf{D}_\nabla} \|{D_1}^{-1}(\Sigma \star K_0) D_1\|_\infty = \gamma_1 \leq \gamma_0$$

- Pour D_1 fixée on peut refaire une synthèse H_∞

$$K_1 = \arg\min_K \left\| \left(\begin{bmatrix} {D_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \star K \right\|_\infty$$

- Et ainsi de suite par D-K itérations (une étape d'analyse, une étape de synthèse)