

INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Travaux Dirigés d'Automatique n°6

Régulation d'un chauffe-eau

Novembre 2002

En vue de pouvoir disposer d'un débit constant de fluide à température désirée, un procédé hydraulique et thermique schématisé sur la figure 1 est constitué d'un réservoir de section $S = 1m^2$ équipé d'une résistance chauffante. Le fluide est caractérisé par sa masse volumique μ et sa constante de chaleur spécifique c , telles que $\mu c = 2 \cdot 10^6$.

Les entrées du système sont le débit d'entrée du fluide Q_e et la puissance électrique de chauffage P . Les sorties sont le débit de sortie Q_s et la température θ_s à la sortie du réservoir. On désire réguler ces sorties autour d'un point de fonctionnement tel que $Q_s = Q_o = 20l/min$ et $\theta_s = \theta_o = 50^\circ C$. Afin de modéliser le procédé en vue de sa commande, on fait les hypothèses suivantes :

- la température d'arrivée du fluide $\theta_e = 20^\circ C$ est constante,
- le réservoir est parfaitement calorifugé et sa capacité thermique est négligeable,
- l'échange de chaleur entre la résistance chauffante et le fluide est instantané.
- le débit de sortie du fluide est régi par un écoulement par gravité de type turbulent tel que $Q_s = \alpha\sqrt{H}$ avec $\alpha = 4.3033 \cdot 10^{-4}$.
- la régulation se fait par retour d'état discret à la période d'échantillonnage $T = 6min$.

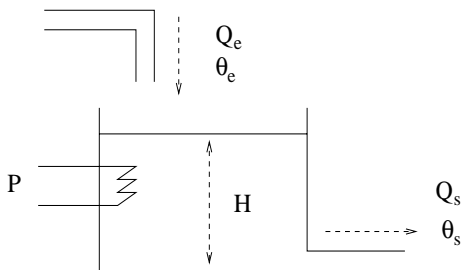


Figure 1: Schéma du procédé

1. Modélisation par les lois de comportement.

Soit V le volume du réservoir. Le bilan volumétrique appliqué au système conduit à:

plié au système conduit à:

$$\frac{dV}{dt} = S \frac{dH}{dt} = Q_e - Q_s \Rightarrow \frac{dH}{dt} = -\frac{\alpha}{S} \sqrt{H} + \frac{1}{S} Q_e$$

Le bilan calorimétrique du réservoir pendant l'intervalle de temps élémentaire dt s'écrit:

$$P dt - Q_e \mu c (\theta_s - \theta_e) dt - SH \mu c d\theta_s = 0$$

où $P dt$ est l'énergie calorifique fournie par la résistance pendant dt , $Q_e \mu c (\theta_s - \theta_e) dt$ est l'énergie calorifique consommée pour porter le fluide entrant à la température θ_s et $SH \mu c d\theta_s$ est l'énergie calorifique consommée pour élever la température du fluide de $d\theta_s$ dans le réservoir. On en déduit donc la deuxième loi dynamique régissant le comportement du système:

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \frac{P}{\mu c SH} - \frac{(\theta_s - \theta_e) Q_e}{SH}$$

Donner un modèle d'état de ce système non linéaire.

2. Point d'équilibre. Donner les valeurs de H_o , P_o au point de fonctionnement considéré comme point d'équilibre. Définir les variables d'état et les entrées du système en tant que variations autour du point de fonctionnement.

3. Modèle linéarisé. Donner le modèle linéaire continu du système au voisinage du point de fonctionnement.

4. Modèle échantillonné. Donner le modèle discret du procédé en considérant un bloqueur d'ordre zéro.

5. Analyse des dynamiques. Donner les caractéristiques dynamiques du système continu et échantillonné.

6. A.N. Réaliser l'application numérique sous MATLAB et tracer les réponses impulsionnelles pour des perturbations de $1m^2/s$ sur le débit d'entrée et de 10^8W sur la puissance de chauffage.

2. Point d'équilibre

7. Synthèse. Réaliser la synthèse du correcteur par retour d'état L sur le système discret, de façon à imposer des constantes de temps égales à 15min et 16min .

8. A.N. Calculer le système bouclé sous MATLAB. Donner ses constantes de temps et tracer les réponses impulsionnelles.

9. Analyse Robuste. Soit un autre point de fonctionnement tel que $\theta_o = 80^\circ\text{C}$ et $Q_o = 15\text{l/min}$. Calculer le modèle linéarisé autour du nouveau point d'équilibre. Sans modifier le correcteur calculé en 7, donner les caractéristiques de la boucle fermée.

10. Pilotage découplé. On se replace autour du point de fonctionnement $\theta_s = 50^\circ\text{C}$ et $Q_s = 20\text{l/min}$. Soit une précommande l_c telle que :

$$u_k = l_c y_{c_k} - Lx_k$$

où $y_{c_k} = \begin{pmatrix} h_{c_k} \\ \theta_{c_k} \end{pmatrix}$ est un vecteur de consigne sur l'état. Calculer l_c tel que le gain de transfert en régime permanent soit égal à l'identité.

Un modèle linéaire admet l'origine comme unique point d'équilibre. On se place donc autour du point de fonctionnement en tant que point d'équilibre. A l'équilibre $\frac{dH}{dt} = 0$ et $\frac{d\theta_s}{dt} = 0$. Donc le point de fonctionnement se définit par:

$$\begin{aligned} \theta_s &= \theta_o = 50^\circ\text{C} \\ Q_s &= Q_o = 20\text{l/min} \\ Q_e &= Q_o = 20\text{l/min} \\ H &= H_o = \left(\frac{1}{\alpha} Q_o\right)^2 = 0.6\text{m} \\ P &= P_o = \mu c (\theta_o - \theta_e) Q_o = 20\text{kW} \end{aligned}$$

De façon à prendre l'origine comme point d'équilibre on pose les changements de variables suivants:

$$\begin{aligned} H &= H_o + h \\ \theta_s &= \theta_o + \theta \\ Q_e &= Q_o + q \\ P &= P_o + p \end{aligned}$$

et on définit le vecteur d'état, x , et le vecteur de commande, u , du modèle linéaire, tels que

$$x = \begin{pmatrix} h \\ \theta \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Corrigé

MODÉLISATION DU SYSTÈME

La première étape est de modéliser le système dans l'objectif de l'analyse et la synthèse. Ici on désire appliquer les méthodes de synthèse par retour d'état discret. La méthode suppose de donner un modèle linéaire en représentation d'état du système discrétisé.

1. Modélisation par les lois de comportement

Le système est commandé par le débit d'entrée, Q_e , et la puissance de chauffage, P . L'état du fluide dans le réservoir est caractérisé par la hauteur de fluide H et sa température θ_s . Donc on prend X et U les vecteurs d'état et de commande du système non linéaire tels que:

$$X = \begin{pmatrix} H \\ \theta_s \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} Q_e \\ P \end{pmatrix}$$

La représentation d'état du modèle s'écrit:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{S} \sqrt{H} + \frac{1}{S} Q_e \\ \frac{P}{\mu c S H} - \frac{(\theta_s - \theta_e) Q_e}{S H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X, U) \\ f_2(X, U) \end{pmatrix}$$

3. Modèle linéarisé

Le modèle linéarisé est donné par:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + B_c u \\ y = C_c x + D_c u \end{cases}$$

où A_c et B_c sont les jacobiniennes du modèle non linéaire calculés au point de fonctionnement:

$$X_o = \begin{pmatrix} H_o \\ \theta_o \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} Q_o \\ P_o \end{pmatrix}$$

Donc:

$$A_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}_{\{X_o, U_o\}}$$

En tenant compte des conditions sur le point d'équilibre on trouve donc:

$$A_c = \begin{bmatrix} -\frac{Q_o}{2SH_o} & 0 \\ 0 & -\frac{Q_o}{SH_o} \end{bmatrix}$$

De la même façon on trouve:

$$B_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q_e} & \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q_e} & \frac{\partial f_2}{\partial P} \end{bmatrix}_{\{X_o, U_o\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ \frac{\theta_e - \theta_o}{SH_o} & -\frac{1}{\mu c SH_o} \end{bmatrix}$$

4. Modèle échantillonné

La discrétisation d'un modèle dans l'espace d'état, à la période d'échantillonnage T , en considérant un bloqueur d'ordre zéro, conduit au modèle discret:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \\ y_k = C_d x_k + D_d u_k \end{cases}$$

où les matrices du modèle sont données par:

$$\begin{aligned} A_d &= e^{A_c T} & B_d &= \int_0^T e^{A_c \tau} B_c d\tau \\ C_d &= C_c & D_d &= D_c \end{aligned}$$

Pour le système considéré on a donc:

$$A_d = \begin{bmatrix} e^{-\frac{Q_o T}{2SH_o}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{Q_o T}{SH_o}} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} B_d &= \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{S} e^{-\frac{Q_o \tau}{2SH_o}} & 0 \\ \frac{\theta_e - \theta_a}{SH_o} e^{-\frac{Q_o \tau}{SH_o}} & \frac{1}{\mu c SH_o} e^{-\frac{Q_o \tau}{SH_o}} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2H_o}{Q_o} (1 - e^{-\frac{Q_o T}{2SH_o}}) & 0 \\ \frac{\theta_e - \theta_a}{Q_o} (1 - e^{-\frac{Q_o T}{SH_o}}) & \frac{1}{\mu c Q_o} (1 - e^{-\frac{Q_o T}{SH_o}}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ANALYSE DE LA BOUCLE OUVERTE

La seconde étape est d'analyser les caractéristiques du système représenté par son modèle. L'analyse se fait sur la base de connaissances théoriques des modèles linéaires et sur la base de simulations.

5. Analyse des dynamiques

Les modèles continu et discret sont donnés dans leur base diagonale. Les pôles (coefficients de la diagonale) sont réels, donc le système est non-oscillant. Les pôles du système continu sont négatifs donc le système est stable. Les constantes de temps du système sont données par:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p_1} &= \frac{2 * S * H_o}{Q_o} = 3600s = 60min \\ -\frac{1}{p_2} &= \frac{S * H_o}{Q_o} = 1800s = 30min \end{aligned}$$

La période d'échantillonnage $T = 6min$ est donc justifiée (petite devant les temps de réponse) et elle est suffisamment grande pour avoir pouvoir effectuer les mesures dans de bonnes conditions.

Comme les matrices B_c et B_d ne sont pas diagonales on peut s'attendre à un couplage entre les différentes entrées/sorties. Une perturbation sur q aura une influence sur h et θ . Par contre une perturbation sur p n'influe que l'état θ .

6. A.N.

Dans l'environnement MATLAB on effectue les opérations suivantes pour, dans un premier temps, définir les données du modèle dans le système international, puis on écrit le système linéaire continu, le système discrétisé et pour finir on trace les réponses impulsionnelles. On a choisi de tracer des réponses impulsionnelles pour observer la stabilité ainsi que le temps de réponse du système à des perturbations qui l'écartent du point de fonctionnement. L'amplitude (très importante au regard du point d'équilibre) de ces signaux impulsionnels est choisie de façon à amplifier les réponses et observer les différents couplages.

```
>> muc=2e6;
>> Qo=20e-3/60;
>> tho=50;
>> the=20;
>> Ho=0.6;
>> Po=20e3;
>> S=1;
>> Ac=[-Qo/(2*S*Ho) 0 ; 0 -Qo/(S*Ho)];
>> Bc=[1/S 0;(the-tho)/(S*Ho) 1/(muc*S*Ho)];
>> Cc=eye(2);
>> Dc=zeros(2,2);
>> Gc=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
>> Gd=c2d(Gc,6*60,'zoh');
>> impulse(Gc*[1e-4 0;0 1e4])
>> impulse(Gd*[1e-4 0;0 1e4])
```

Les tracés des réponses impulsionnelles sont données sur les figures 2 et 3.

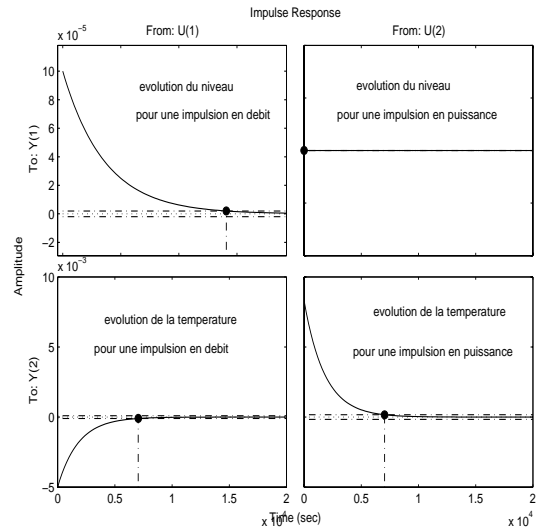


Figure 2: Réponses du système continu

On retrouve sur les tracés que les temps de réponses sont de l'ordre de 10^4 secondes et l'une des sorties est deux fois plus rapide que l'autre. On retrouve également les différents couplages.

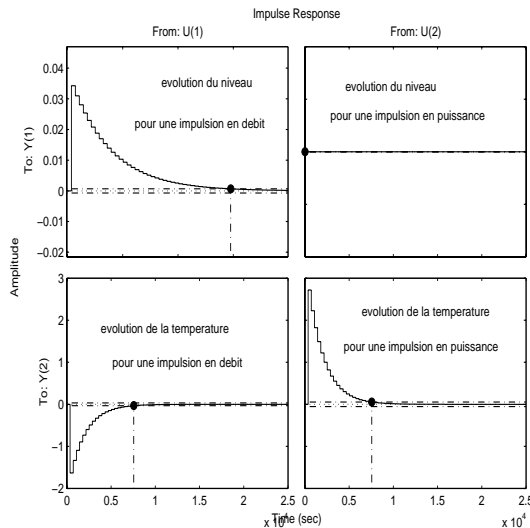


Figure 3: Réponses du système échantillonné

SYNTHÈSE D'UN RETOUR D'ÉTAT

La troisième étape est de faire la synthèse d'un retour d'état pour améliorer les temps de réponse du système. La loi de commande ainsi calculée sera ensuite évaluée selon différents critères.

7. Synthèse

On souhaite calculer une loi de commande:

$$u_k = v_k - Lx_k$$

telle que le système bouclé:

$$x_{k+1} = (A_d - B_d L)x_k + B_d v_k$$

ait comme constantes de temps $15\text{min} = 900\text{s}$ et $16\text{min} = 960\text{s}$. Cela correspond à des pôles d'un système continu égaux à:

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} = -\frac{1}{900}$$

$$p_2 = -\frac{1}{\tau_2} = -\frac{1}{960}$$

Donc on souhaite que le système discret en boucle fermée ait ses pôles placés en:

$$z_1 = e^{-\frac{T}{\tau_1}} = e^{-\frac{360}{900}}$$

$$z_2 = e^{-\frac{T}{\tau_2}} = e^{-\frac{360}{960}}$$

Le calcul de L se fait à l'aide de la fonction place de MATLAB:

```
>> [Ad,Bd,Cd,Dd,T]=ssdata(Gd);
>> L=place(Ad,Bd,[exp(-360/900) exp(-360/960)])
place: ndigits= 15
```

$L =$

1.0e+04 *

```
0.0000 0.0000
3.8101 0.0546
```

```
>> L(1,2)
```

ans =

2.2214e-20

```
>> L(1,1)
```

ans =

6.3502e-04

On remarque que le terme (1,2) de L est nul (10^{-20} est au delà de la précision de MATLAB qui est donnée par eps).

ANALYSE DE LA BOUCLE FERMÉE

8. A.N.

L'analyse de la boucle fermée est faite ici à l'aide de MATLAB:

```
>> H=feedback(Gd,L);
>> Z=pole(H);
>> -T./log(Z)
```

ans =

```
960.0000
900.0000
```

```
>> impulse(H*[1e-4 0;0 1e4])
```

On retrouve que les pôles de la boucle fermée sont ceux spécifiés pour la synthèse. Le tracé des réponses impulsionnelles de la figure 4 montrent que les temps de réponses sont réduits. Les couplages entrées/sorties sont inchangés.

8. Analyse Robuste

La synthèse du correcteur par retour d'état est effectuée pour un point de fonctionnement donné ($\theta_o = 50^\circ\text{C}$, $Q_o = 20\text{l/min}$). Comme le système est non linéaire cette commande n'est valable en théorie que dans un certain voisinage du point de fonctionnement. Se pose alors la question de la robustesse de cette commande. C'est à dire: comment les caractéristiques de la boucle fermées sont dégradées si on se place autour d'un autre point de fonctionnement? Pour répondre à cette question on calcule le modèle linéaire du système autour du nouveau point de fonctionnement ($\theta_o = 80^\circ\text{C}$, $Q_o = 15\text{l/min}$) et on analyse la boucle fermée pour le même correcteur L .

```
>> Qo2=15e-3/60;
>> tho2=80;
>> Ho2=((1/4.3033e-4)*Qo2)^2
```

Ho2 =

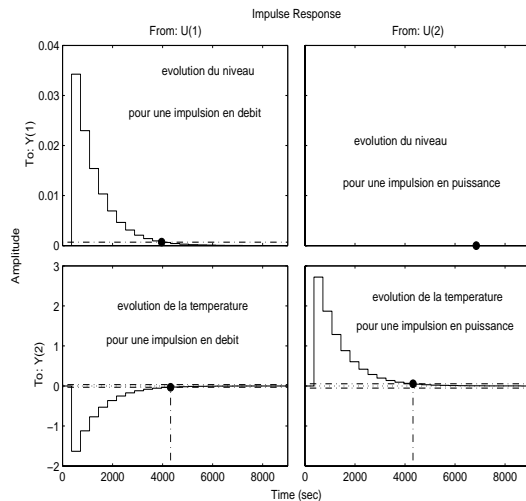


Figure 4: Réponses du système bouclé

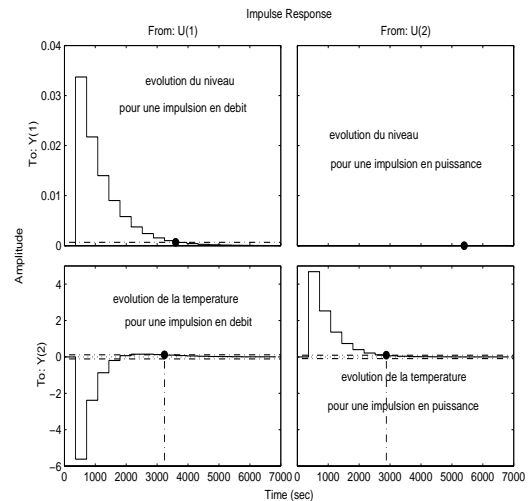


Figure 5: Réponses du système bouclé pour le second point de fonctionnement

2

SYNTHÈSE D'UNE PRÉCOMMANDE

Nous avons remarqué que les entrées/sorties des systèmes sont fortement couplées. En vue de piloter (faire suivre une consigne) les sorties du système il peut être nécessaire de calculer une précommande qui permet d'agir uniquement sur l'une ou l'autre des deux variables. Le découplage ne peut bien sûr être total. On parlera de découplage en régime permanent. De même que pour les systèmes avec une seule entrée une seule sortie, ce problème revient à fixer le gain statique du système égal à l'identité. Ici, le gain statique est une matrice de dimensions 2×2 .

Sans précommande le gain statique de la boucle fermée est:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_k}{v_k} = \lim_{z \rightarrow 1} C_d (zI - A_d + B_d L)^{-1} B_d$$

```
>> Gstat=Cd*inv(eye(2)-Ad+Bd*L)*Bd
```

Gstat =

```
1.0e+04 *
    0.1096    0.0000
   -4.9485    0.0000
```

```
>> Gstat(1,2)
```

ans =

```
3.6494e-20
```

```
>> Gstat(2,2)
```

ans =

```
8.2475e-04
```

0.3375

```
>> Po2=muc*(tho2-the)*Qo2
```

Po2 =

```
30000
```

```
>> Ac2=[-Qo2/(2*S*Ho2) 0 ; 0 -Qo2/(S*Ho2)];
>> Bc2=[1/S 0 ; (the-tho2)/(S*Ho2) 1/(muc*S*Ho2)];
>> Gc2=ss(Ac2,Bc2,Cc,Dc);
>> Gd2=c2d(Gc2,6*60,'zoh');
>> H2=feedback(Gd2,L);
>> Z2=pole(H2);
>> -T./log(Z2)
```

ans =

```
870.0464
```

```
535.2819
```

```
>> impulse(H2*[1e-4 0;0 1e4])
```

On remarque sur la figure 5 que les temps de réponse sont plus courts, en particulier pour la réponse en température. Dans l'ensemble on peut dire que le comportement du système n'est pas dégradé quand on modifie le point de fonctionnement. Les dynamiques sont fortement liées au débit de fonctionnement (quasiment pas d'influence de θ_o sur les dynamiques de la boucle fermée). Plus Q_o est faible, plus le système est rapide. On peut donc considérer que le correcteur par retour d'état est robuste pour tout débit inférieur à $20l/min$.

La matrice de gain statique est non diagonale (les entrées/sorties sont couplées) et les coefficients de la diagonale sont différents de 1 (le système n'est pas précis, v_k n'est pas une consigne respectée en précision).

Nous proposons donc de faire une précommande:

$$v_k = l_c y_{c_k}$$

telle que le nouveau gain statique soit égal à l'identité:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_k}{y_{c_k}} = \lim_{z \rightarrow 1} C_d(zI - A_d + B_d L)^{-1} B_d l_c = I$$

Il suffit donc de choisir:

$$l_c = [C_d(zI - A_d + B_d L)^{-1} B_d]^{-1}$$

```
>> lc=inv(Gstat)
```

```
lc =
```

```
1.0e+04 *
    0.0000  -0.0000
    5.4768   0.1212
```

```
>> lc(1,1)
```

```
ans =
```

```
9.1280e-04
```

```
>> lc(1,2)
```

```
ans =
```

```
-4.0658e-20
```

Le système précédé de sa précommande est donc précis et les entrées/sorties sont découplées. On observe cela sur la figure 6 où sont appliquées des commandes de consigne indicielles d'amplitude $h_c = 0.1m$ et $\theta_c = 5^\circ C$. Ces entrées sont choisies suffisamment faibles pour respecter l'hypothèse de faibles variations autour du point de fonctionnement.

```
>> step(H*lc*[0.1 0;0 5])
```

Le tracé des réponses indicielles de la figure 6 montre que non seulement le découplage est effectif en régime permanent mais également pour le régime transitoire ce qui n'est pas assuré en théorie.

Pour conclure on étudie le fonctionnement du système pour ce choix de retour d'état et de précommande, au second point de fonctionnement:

```
>> step(H2*lc*[0.1 0;0 5])
```

Le tracé de la figure 7 montre que la précommande n'est pas robuste. Le découplage n'est plus effectif pour ce point de fonctionnement et le gain statique n'est pas égal à l'identité.

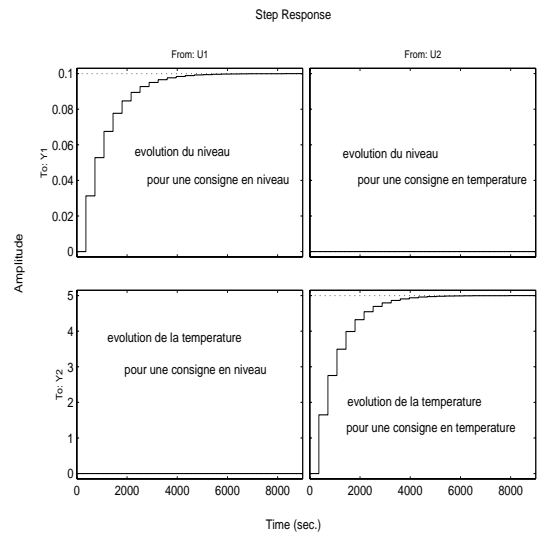


Figure 6: Réponses du système découplé

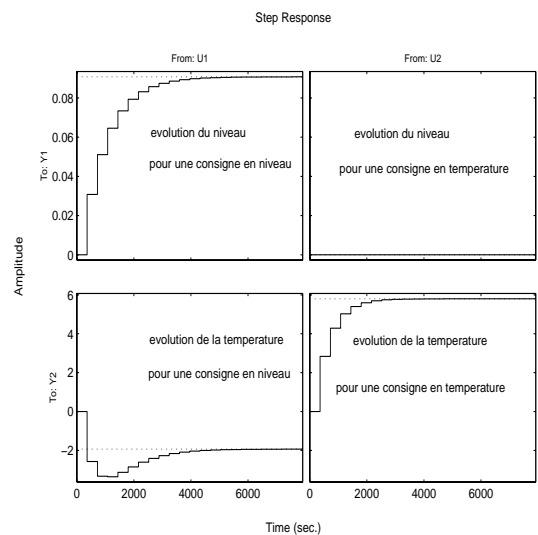


Figure 7: Réponses du système découplé pour le second point de fonctionnement