INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Examen d'Automatique - Commande Numérique des Procédés

Documents et calculatrice autorisés.
Sujet volontairement long (3 exercices) pour couvrir plusieurs aspects du cours (barème > 20).
Quasiment toutes les questions peuvent être traitées séparément les unes des autres.
Les questions les plus délicates en termes de calculs sont indiquées par le (ou les) symbole $\star$.

4 Février 2003

Exercice 1

Soit le système représenté sur la figure 1 pour lequel on donne le modèle $G(p)$ et un contrôleur $F(p)$

$$G(p) = \frac{p}{p+1} \qquad F(p) = \frac{p-21.16}{p+38.08}$$

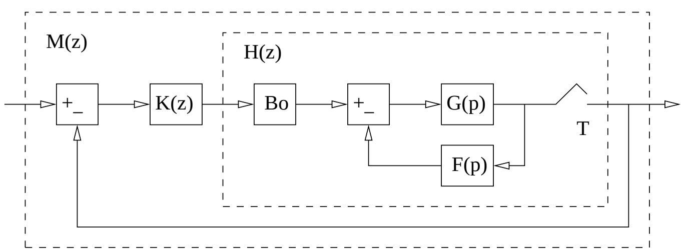

Figure 1: Système avec deux rétroactions imbriquées

1.a$\star\star$ Echantillonnage. Pour la période d'échantillonnage $T = 0.2s$, calculer le modèle $H(z)$.

Dans la suite on travaillera avec l'approximation suivante :

$$H(z) = \frac{3z^2+4z-7}{6z^2-5z+1}$$

1.b Réponse temporelle. Caractériser la réponse indicielle du système $H(z)$ en termes de constante de temps du mode le plus lent et en termes de valeur finale.

1.c$\star$ Représentation d'état. Donner une représentation d'état modale pour le système décrit par la fonction de transfert:

$$H(z) - \frac{1}{2}$$

En déduire une représentation d'état modale pour $H(z)$.

1.d$\star$ Retour proportionnel. On considère un retour proportionnel $K(z) = K$. En utilisant la transformée en w et le critère de Routh, donner les valeurs de K qui assurent la stabilité de $M(z)$.

Exercice 2

Soit le système représenté sur la figure 2 pour lequel on donne le modèle $G(p) = \frac{p}{p+1}$.

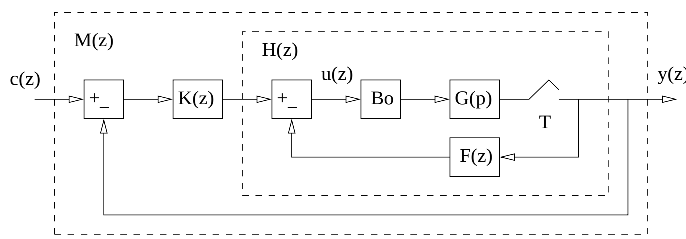

Figure 2: Système avec deux rétroactions imbriquées

2.a Discrétisation. A partir du correcteur $F(p)$ donné dans l'exercice 1 et en considérant la période d'échantillonage $T = 0.2s$, proposer trois correcteurs (notés $F_1(z)$, $F_2(z)$ et $F_3(z)$) pour le modèle de la figure 2.

2.b Réponses temporelles. Caractériser la stabilité et la réponse indicielle des trois systèmes $F_1(z)$, $F_2(z)$ et $F_3(z)$. Justifier pourquoi ces trois correcteurs ont des comportement aussi différents.

2.c$\star$ Algorithme de commande. On donne les lois de commande :

$$F(z) = \frac{3z+1}{1-9z} \qquad K(z) = \frac{2}{3z-1}$$

et on suppose $c(z) = 0$. Exprimer $u(z)$ en fonction de $y(z)$.
En déduire l'algorithme de commande global pour le système $G(p)$ échantillonné, c'est à dire l'équation récurrente qui permet le calcul en temps réel du signal $\{u_k\}$ à la donnée des mesures $\{y_k\}$.

Tourner la page $\longrightarrow$

Exercice 3

On s'intéresse au fonctionnement d'un magasin chargé de l'approvisionnement en fournitures de bureau dans une entreprise. Pour simplifier la démarche on suppose que le magasin ne gère qu'un seul produit. On étudie l'évolution des quantités de ce produit dans le magasin en identifiant trois indicateurs:

s_k : stock disponible en début de semaine k

a_k : achats effectués par le gestionnaire lors de la semaine k

c_k : consommation de fournitures lors de la semaine k

Après une enquête sur le fonctionnement de l'entreprise il a été mis en évidence que :

- le gestionnaire du magasin reporte d'une semaine sur l'autre le nombre d'achats à effectuer en pondérant cette valeur en fonction du stock restant :

  $$a_{k+1} = a_k + \alpha(S_{nom} - s_k)$$

  (S_{nom} est une valeur constante de stock "nominale" que le gestionnaire estime nécessaire pour le magasin)

- les employés ont tendance à se servir proportionnellement aux nouveaux arrivages de produits :

  $$c_{k+1} = C_{nom} + \beta a_k$$

  (C_{nom} est une valeur constante de consommation usuelle pour le fonctionnement de l'entreprise).

Remarque pour aider les calculs :

$$\begin{bmatrix} -4/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4/5 & 4/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -25/4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix} = I_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -4/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5/4 & 0 & 0 \\ -5/4 & -1 & 0 \end{bmatrix} = I_3$$

3.a Modèle. Partant des définitions, donner la loi liant s_{k+1}, s_k, a_k et c_k. En déduire que le fonctionnement du magasin suit le modèle suivant :

$$\begin{pmatrix} s_{k+1} \\ a_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_k \\ a_k \\ c_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha S_{nom} \\ C_{nom} \end{pmatrix}$$

3.b Equilibre. Etant donné ce modèle, déterminer - quand il existe - l'équilibre que peut connaître le fonctionnement du magasin.

3.c⋆ Stabilité. Donner le polynôme caractéristique du système en fonction de α et β et appliquer le théorème de Jury. En déduire parmi les six choix suivants, lesquels conduisent à un fonctionnement asymptotiquement stable du magasin:

$$(\alpha = 1, \beta = 1) \quad (\alpha = 2, \beta = 0.5) \quad (\alpha = 1, \beta = 0.5)$$
$$(\alpha = 0.1, \beta = 0.7) \quad (\alpha = 0.7, \beta = 0.4) \quad (\alpha = 0.4, \beta = 0.9)$$

3.d Réponse temporelle. La configuration réelle du magasin correspond à $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.8$, $S_{nom} = 300$ et $C_{nom} = 100$. L'évolution du stock pour certaines conditions initiales est tracée sur la figure 3. Sans calculer les pôles du système, décrire le mode dominant du système.

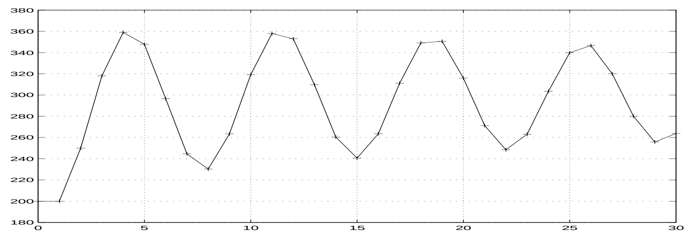

Figure 3: Evolution du stock

3.e⋆ Retour d'état. Pour aider le gestionnaire de magasin, on se propose de calculer une loi d'achats qui tient compte de l'état exact du magasin. Cela revient à calculer une loi de commande par retour d'état ($u_k = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} X_k$) pour le système suivant:

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

Calculer la loi de retour d'état qui permet de rendre le système le plus rapide possible.

3.f Réponse temporelle. Le nouveau modèle de fonctionnement du magasin tenant compte de cette loi de retour d'état s'écrit :

$$\begin{pmatrix} s_{k+1} \\ a_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_k \\ a_k \\ c_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

En prenant comme conditions initiales $(s_0, a_0, c_0) = (200, 300, 300)$ calculer les cinq premiers échantillons de l'état, i.e. (s_k, a_k, c_k) pour $k = 1..5$.

3.g⋆ Observateur. Le dirigeant de l'entreprise souhaite avoir une idée de l'évolution de la consommation des fournitures mais ne connaît que les quantités en stock chaque semaine. Pour l'aider on se propose de calculer un observateur dynamique sur la base du système suivant :

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_k$$

Déterminer un observateur dont les pôles sont à zéro.