# INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Examen d'Automatique - Commande Numérique des Procédés

Documents et calculatrice autorisés

Mercredi 12 Décembre 2001

**Exercice 1.**

Soit le système échantillonné de la figure 1 composé d'un bloqueur d'ordre zéro, de deux gains proportionnels ($k_1$ et $k_2$), d'un procédé continu ($\frac{1}{p+1}$) et d'un échantillonneur à la période $T$. Sa fonction de transfert est notée :

$$\frac{y(z)}{u(z)} = G(z)$$

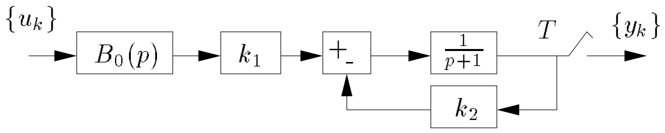


Figure 1: Procédé échantillonné

**1.a.** Sous quelle(s) condition(s) ce système est-il stable ?

**1.b.** On pose $k_2 = 10 \cdot \ln(2) - 1$. Parmi les périodes d'échantillonnage suivantes choisir celle qui satisfait le mieux la règle de Shannon:

$$T_1 = 1s \quad T_2 = 0.1s \quad T_3 = 0.01s$$

Puis calculer le gain $k_1$ qui assure un gain statique unitaire au système échantillonné.

**1.c.** Donner la constante de temps de convergence de $G(z)$ et, en réponse à un échelon, évaluer le temps que met le système à atteindre 95% de sa valeur finale.

**1.d.** Confirmer ce résultat en calculant les premiers échantillons de $\{y_k\}$ en réponse à un échelon d'amplitude unité ($u_k = 1 \quad \forall k \geq 0$) et pour des conditions initiales nulles.

**Exercice 2.**

Soient les deux systèmes discrets suivants associés à une période d'échantillonnage différente:

- Système $H_1$ avec la période $T = 0.1s$:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

- Système $H_2$ avec la période $T = 0.01s$:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

On souhaite placer les pôles de ces systèmes de façon à garantir une dynamique dominante oscillante caractérisée par la pulsation propre et l'amortissement suivants:

$$\omega_n = 14.872 \text{ rad/s} \qquad \zeta = 0.8492$$

**2.a.** Pour chacun des deux systèmes $H_1$ et $H_2$ calculer les pôles du système bouclé que l'on souhaite imposer (éventuellement ajouter des pôles auxiliaires très rapides).

**2.b.** Calculer (si elle existe) la commande par retour d'état pour chacun de ces systèmes qui permet de placer les pôles comme spécifié dans la question précédente.

**Tourner la page ⟶**

**Exercice 3.**

Soit le système continu suivant:

$$\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{10 \cdot \ln(2)}{p + 10 \cdot \ln(2)}$$

et le correcteur continu du type Proportionnel-Intégral avec les caractéristiques suivantes:

$$\frac{u(p)}{\epsilon(p)} = 2(1 + \frac{1}{0.1p})$$

On suppose que le système est échantillonné à la période $T = 0.1s$ avec un bloqueur d'ordre zéro en entrée.

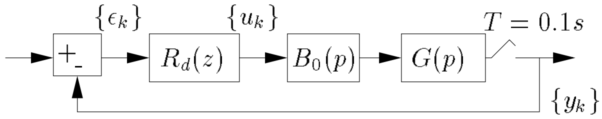


Figure 2: Procédé échantillonné

**3.a.** A partir du correcteur à temps continu déduire trois correcteurs discrets pour le modèle échantillonné de la figure 2.

**3.b.** Lequel de ces trois correcteurs conduit au système bouclé stable le plus rapide? Commenter ces résultats.

---

**Exercice 4.**

Soit le système discret suivant:

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1}{2z - 1}$$

On souhaite calculer un régulateur R.S.T. comme indiqué sur la figure 3 en vue d'avoir les caractéristiques suivantes:

(i) Rejet de perturbations du type échelon sur l'entrée $\{u_k\}$.

(ii) Mode complexe oscillant stable pour la dynamique de la boucle de régulation.

(iii) Mode réel stable dominant pour la dynamique de poursuite. Ce mode doit être plus lent que le mode de régulation.

**4.a.** Calculer les degrés des polynômes $R(z)$ et $S(z)$ minimaux pour pouvoir satisfaire ces spécifications.

**4.b.** Soit les signaux $\{x_{1_k}\}$ et $\{x_{2_k}\}$ tels que:

$$x_1(z) = \frac{1}{2z-1} u(z) \qquad x_2(z) = \frac{1}{z-1} y(z)$$

En prenant ces signaux comme composantes de l'état de la boucle de régulation $\frac{y(z)}{e(z)}$, montrer qu'elle admet une représentation d'état de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e_k \\ y_k & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k \end{array} \right.$$

où $\alpha$ et $\beta$ dépendent uniquement des coefficients des polynômes $R(z)$ et $S(z)$.

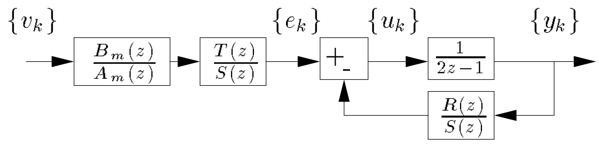


Figure 3: Régulateur R.S.T.

**4.c.** Donner les conditions sur $\alpha$ et $\beta$ pour que cette boucle de régulation soit stable.

**4.d.** Pour la pré-commande de poursuite on donne le transfert $\frac{e(z)}{v(z)}$ sous la forme d'une représentation d'état telle que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \eta_{k+1} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 \end{bmatrix} \eta_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} v_k \\ e_k & = & \begin{bmatrix} -0.42 & 1.1 \end{bmatrix} \eta_k + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} v_k \end{array} \right.$$

Parmi les choix suivants sur les paramètres, énoncer ceux qui remplissent les spécifications (i) à (iii):

(a) $\gamma_0 = -1 \quad \gamma_1 = 1.5$
$\alpha = -1.2 \quad \beta = -1.36$

(b) $\gamma_0 = 0.7 \quad \gamma_1 = -1.7$
$\alpha = -1.2 \quad \beta = -1.36$

(c) $\gamma_0 = 0.7 \quad \gamma_1 = -1.7$
$\alpha = 1 \quad \beta = 2$

Justifier votre choix.