INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

$\boxed{\text{Travaux Dirigés d'Automatique } n^o 8}$

Corrigé

Décembre 2003

1. Modélisation du procédé continu

La transformée de Laplace de l'équation différentielle conduit à la fonction de transfert suivante:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{ab/2 + (3b/2 - 2a)p}{ab - (a+b)p + p^2}$$

La décomposition en éléments simples de cette fonction de transfert est:

$$G(p) = \frac{-2a}{p-a} + \frac{3b/2}{p-b}$$

Cette décomposition permet un choix de représentation canonique diagonale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} x(t) \quad + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = & \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

2. Modélisation du système échantillonné

On utilise les formules du cours relatives à l'échantillonnage à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro. En notant A_c, la matrice d'état du modèle continu:

$$A = e^{A_c T} = \begin{bmatrix} e^{aT} & 0 \\ 0 & e^{bT} \end{bmatrix}$$

B_c, la matrice de commande du modèle continu:

$$\begin{aligned} B &= \int_0^T e^{A_c \alpha} B_c d\alpha \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{a\alpha} & 0 \\ 0 & e^{b\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} d\alpha \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} ae^{a\alpha} \\ be^{b\alpha} \end{bmatrix} d\alpha \\ &= \begin{bmatrix} e^{aT} - 1 \\ e^{bT} - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

C_c, la matrice de sortie du modèle continu:

$$C = C_c = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Le calcul de la fonction de transfert du modèle discrétisé est obtenue par:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI_n - A)^{-1} B$$

Le calcul est très simple ici car A est diagonale:

$$G(z) = \frac{-2(e^{aT} - 1)}{z - e^{aT}} + \frac{3/2(e^{bT} - 1)}{z - e^{bT}}$$

3. Analyse du système

L'application numérique donne:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Le système est instable puisque ses pôles du modèle échantillonné sont 2 et 3 et les points associés à ces pôles dans le plan de Laplace se situent hors du disque unitaire. On retrouve se résultat en observant les pôles $a = ln(2)$ et $b = ln(3)$ du modèle continu. Il est instable car les pôles sont à partie réelle positive.

La fonction de transfert du système échantillonné s'écrit:

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}$$

4. Régulation proportionnelle

Le système en boucle ouverte est composé de deux pôles instable et d'un zéro stable. On sait que quand le gain K du régulateur proportionnel croit de zéro à l'infini, l'un des pôles va rejoindre le zéro, l'autre tend vers $-\infty$. Donc grâce à cette étude sommaire du lieu d'Evans on sait que pour des faibles valeurs du gain K le système est instable (les pôles de la boucle fermée sont proche des pôles de la boucle ouverte) et pour des valeurs élevées de K le système est également instable (l'un des pôles est hors du disque unité). Pour autant n'existe-t-il pas des valeurs de K telles que le système en boucle fermée est stable?

Pour cela on construit la fonction de transfert du système en boucle fermée:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{Kz}{z^2 + (K-5)z + 6}$$

Le critère de Jury pour la stabilité de $H(z)$ s'écrit:

$$\begin{cases} p_o + p_1 + p_2 = 6 + K - 5 + 1 = K + 2 > 0 \\ p_o - p_1 + p_2 = 6 - K + 5 + 1 = 12 - K > 0 \\ p_2 - p_o = 1 - 6 = -5 > 0 \end{cases}$$

La dernière de ces inégalités ne peut jamais être satisfaite, le système n'est pas stabilisable par une contre réaction proportionnelle. On retrouve ce résultat en traçant le lieu d'Evans de

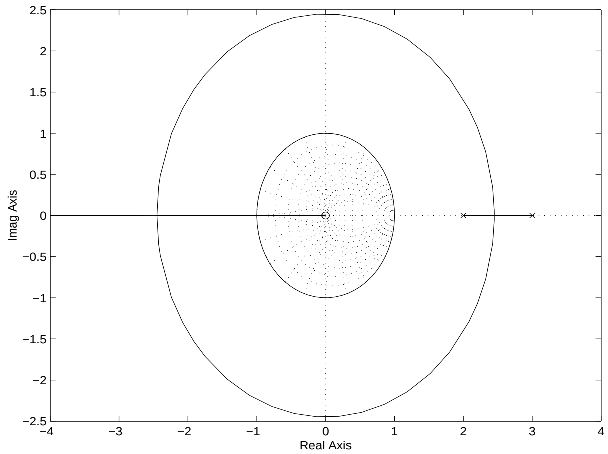

Figure 1: Lieu d'Evans du système échantillonné

$G(z)$ sous MATLAB (`rlocus(G)`). Le tracé est donné sur la figure 1. Les pôles ne sont jamais simultanément dans le disque unité.

5. Commande par retour d'état

Préalablement au calcul du retour d'état, on doit s'assurer de la commandabilité en calculant la matrice de Kalman Q_c relative à cette propriété:

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

La matrice Q_c est de rang 2 donc de rang plein. Le système est commandable.

Pour calculer le retour d'état, on met le modèle discret sous forme canonique de commande. Il vient :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage permettant de passer à cette réalisation canonique ($x_k = M_c\tilde{x}_k$) est :

$$M_c = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$m_2 = B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad m_1 = (A + a_1\mathbf{I}_n)B = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Donc on a :

$$M_c = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad M_c^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

On souhaite placer les deux pôles du système à 0, ce qui correspond à un polynôme caractéristique désiré :

$$P_d(z) = z^2 = \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

alors que le polynôme caractéristique en boucle ouverte est :

$$P(z) = z^2 - 5z + 6 = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Ainsi, dans la base canonique de commande, le retour d'état est tel que :

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Le retour d'état à appliquer dans la base initiale est donné par :

$$L_1 x_k = \tilde{L}\tilde{x}_k = \tilde{L}M_c^{-1}x_k = \begin{bmatrix} -4 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} x_k$$

6. Pré-commande

Le retour d'état ne change pas le numérateur de la fonction de transfert et il est tel que son dénominateur devient égal au polynôme caractéristique désiré soit $P_d(z)$. Ainsi la fonction de transfert du système, une fois le retour d'état appliqué, est :

$$\frac{z}{P_d(z)} = \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z}$$

Cette fonction de transfert présente un gain statique $H(1)$ unitaire ce qui rend inutile l'utilisation d'un gain de précommande. Il vient :

$$l_c = 1$$

7. Analyse du système bouclé par le retour d'état

La fonction de transfert vient d'être calculée : $\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{1}{z}$.

Ce transfert agit exactement comme l'opérateur retard z^{-1}. La réponse est donc égale à la consigne (pour toute consigne) mais décalée de $T = 1s$. On retrouve ce résultat en écrivant l'équation récurrente associée à la fonction de transfert:

$$y_{k+1} = y_{c_k}$$

Il s'agit donc d'une réponse pile (le système rejoint exactement la consigne en un temps fini). Le régime permanent est atteint en $T = 1s$.

Remarque: On observe une simplification zéro/pôle dans la fonction de transfert en boucle fermée. Cela traduit une perte de commandabilité ou d'observabilité du système. Si on réécrit le modèle du système en boucle fermée dans l'espace d'état on a:

$$\begin{cases} x_{k+1} = & (A - BL_1)x_k + By_{c_k} \\ y_k = & Cx_k \end{cases}$$

La matrice de Kalman relative à l'observabilité est:

$$Q_o^{b.f.} = \begin{bmatrix} C \\ C(A - BL_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un mode du système bouclé par le retour d'état n'est pas observable. Cela ne pose pas de difficulté si l'objectif est de stabiliser rapidement le système car ce mode est stable (pôle $z = 0$, mode très rapide).

8. Retour d'état

La matrice des dynamiques de la boucle fermée obtenue pour le gain L_2 s'écrit:

$$A - BL_2 = \begin{bmatrix} 4.74 & -3.37 \\ 5.48 & -3.74 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est :

$$P_{A-BL_2}(z) = z^2 - z + 0.74 = (z - 0.5 - 0.7i)(z - 0.5 + 0.7i)$$

D'après les équations vues en cours, le caractéristiques dynamiques de ce mode complexe se déduisent par analogie avec les modes continus ($z_i = e^{p_i T}$) :

$$\begin{aligned}
\tau &= -2T/\ln(z_R^2 + z_I^2) = 6.64s \\
\omega_p &= \frac{1}{T}\arctan(z_I/z_R) = 1.0766 rad/s \\
\omega_n &= \sqrt{\omega_p^2 + 1/\tau^2} = 0.9624 rad/s \\
\zeta &= 1/(\tau\omega_n) = 0.1564
\end{aligned}$$

Pour ce choix de retour d'état, le système converge très lentement ($3\tau \simeq 20s$) et oscille fortement (amortissement ζ faible).

9. Observateur

Préalablement au calcul du gain de l'observateur, on s'assure de l'observabilité du système en vérifiant que la matrice de Kalman Q_o relative à cette propriété est de rang plein.

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ -4 & 9/2 \end{bmatrix}$$

La matrice Q_o est de rang 2 donc le système est observable.

Pour construire l'observateur, on met le modèle sous forme canonique d'observation. Il vient :

$$\breve{A} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \breve{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \breve{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice M_o assurant ce changement de base $\breve{x}_k = M_o x_k$ est telle que :

$$M_o = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$m_2 = C = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad m_1 = C(A + a_1\mathbf{I}_n) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$M_o = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad M_o^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Puisque l'on souhaite placer les pôles de l'observateur à zéro (ce qui correspond toujours au polynôme caractéristique $P_d(z)$), le gain calculé dans la base canonique

$$\breve{H} = \begin{bmatrix} \breve{h}_1 \\ \breve{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

On en déduit le gain de l'observateur dans la base initiale :

$$H = M_o^{-1}\breve{H} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

10. Simulation

Simulations avec L_1 :

En premier lieu on effectue des simulations avec des perturbations nulles et des conditions initiales non nulles pour l'observateur. On remarque alors que les états de l'observateur convergent vers les états du système en 2 itérations (réponse pile de l'observateur dont les pôles sont placés en zéro) et que la sortie du système converge vers la consigne (gain statique unitaire de la boucle fermée) en trois itérations (deux itérations pour la convergence des états de l'observateur puis une période une fois que le système bouclé correspond au problème de retour d'état).

En présence de perturbations du type échelon, le système bouclé se place à un équilibre décalé par rapport à la consigne. Ceci vient qu'il n'y a pas d'intégrateur situé dans la chaîne d'action de la boucle en amont de l'entrée de perturbation.

La loi de commande qui a été calculée force l'ensemble des dynamiques du système de façon à avoir des réponses piles. Ce type de réponses très rapides peuvent se justifier pour des problèmes de régulation autour d'un point d'équilibre et pour le rejet de petites perturbations. Cependant il peut être nécessaire d'imposer des dynamiques différentes en poursuite de consigne. La question suivante permet à l'aide d'un régulateur R.S.T. de faire ce choix différencié entre dynamiques de régulation et dynamiques de poursuite. De plus le régulateur sera choisi de façon à rejeter des perturbations du type échelon.

Simulations avec L_2 :

Même comportement de l'observateur et idem pour le rejet de perturbations. La différence se fait uniquement sur les dynamiques de la boucle de régulation. Temps de convergence de l'ordre de 20 secondes, fortes oscillations.

11. Régulateur R.S.T.

En premier lieu on calcule les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ qui permettent d'imposer les dynamiques de régulation. Pour assurer un rejet de perturbations de type échelon on impose une racine $z = 1$ au polynôme $S(z)$:

$$S(z) = (z-1)S_1(z)$$

Ensuite on choisi une dynamique dominante pour le système régulé. On souhaite que le système ait une réponse pile, soit des pôles en zéro :

$$P(z) = P_{dom}(z)P_{aux}(z) \qquad P_{dom}(z) = z$$

Cela revient à imposer au moins un pôle à zéro. Les autres, si nécessaires, seront pris plus rapides (en fait aussi rapides car c'est déjà ce qui se fait de plus rapide). Les degrés des différents polynômes sont alors choisis en respectant les règles de causalité:

$$\begin{array}{cc}
deg(R) = 2 & R(z) = r_o + r_1 z + r_2 z^2 \\
deg(S_1) = 1 & S(z) = (z-1)(s_o + s_1 z) \\
deg(P_{aux}) = 3 & P(z) = p_o + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4
\end{array}$$

On choisit donc des pôles auxiliaires en zéro :

$$P_{aux}(z) = z^3 \qquad P(z) = z^4$$

L'équation diophantine correspondant à ce bouclage s'écrit alors:

$$\begin{aligned} P(z) &= S(z)D(z) + R(z)N(z) \\ z^4 &= (z^2-5z+6)(z-1)(s_o+s_1 z) + z(r_o+r_1 z+r_2 z^2) \end{aligned}$$

La solution de cette équation diophantine se trouve aisément :

$$s_o = 0 \quad s_1 = 1 \quad r_o = 6 \quad r_1 = -11 \quad r_2 = 6$$

Soit des polynômes tels que:

$$S(z) = z^2 - z \quad R(z) = 6z^2 - 11z + 6$$

De façon à assurer des dynamiques différentes pour la poursuite de consigne, on réalise une pré-commande composée d'un modèle de référence et du terme de “tracking” du régulateur R.S.T.:

$$\text{pré-commande} = \frac{N_m(z)}{D_m(z)} \cdot \frac{T(z)}{S(z)}$$

La fonction de transfert du système régulé précédé de la pré-commande s'écrit alors :

$$\frac{Y(z)}{Y_m(z)} = \frac{N(z)T(z)N_m(z)}{P(z)D_m(z)} = \frac{zT(z)N_m(z)}{z^4 D_m(z)} = \frac{T(z)N_m(z)}{z^3 D_m(z)}$$

Les règles de causalité imposent que le polynôme $T(z)$ soit de degré inférieur ou égal à deux. Ici on choisit de le prendre égal à deux avec le choix:

$$T(z) = z^2$$

Ce choix permet de compenser deux pôles de régulation. Ces pôles sont nuls. Leur compensation implique une perte de commandabilité ou d'observabilité qui n'est pas préjudiciable car il s'agit de dynamiques de régulation qui ne doivent pas nécessairement être modifiées par la suite ou observées à l'utilisation. Cette compensation permet en outre de réduire le retard entrée/sortie qui serait de trois périodes si on prenait $T(z) = 1$.

On souhaite maintenant imposer les dynamiques de poursuite. Ceci se fait à l'aide du modèle de référence. Les dynamiques de poursuite sont celles imposées par les racines du polynôme $D_m(z)$. Les spécifications demandent d'avoir une constante de temps égale à $\tau = 2s$ ce qui correspond à un pôle simple tel que $z = e^{-T/\tau} = e^{-0.5}$. On prend donc :

$$D_m(z) = z - e^{-0.5}$$

Reste à choisir le polynôme $N_m(z)$ qui pour des questions de causalité doit être de degré inférieur ou égal à $deg(D_m) = 1$. Avec le même raisonnement que pour $T(z)$ on choisi :

$$N_m(z) = \mu z$$

où μ est un scalaire qui peut permettre d'imposer un gain statique unitaire au transfert. La fonction de transfert du système régulé précédé de la pré-commande s'écrit:

$$\frac{Y(z)}{Y_m(z)} = \frac{N(z)T(z)N_m(z)}{P(z)D_m(z)} = \frac{\mu}{z - e^{-0.5}}$$

Pour que ce transfert ait un gain statique unitaire il faut que :

$$\lim_{z\to 1} \frac{\mu}{z - e^{-0.5}} = 1 \;\Rightarrow\; \mu = 1 - e^{-0.5}$$

Le régulateur R.S.T. est entièrement définit.

A l'aide de SIMULINK ce système est simulé en réponse à une consigne en échelon d'amplitude 1 intervenant à $t = 1s$ et à une perturbation du type échelon d'amplitude 0.1 intervenant à $t = 10s$. La figure 2 donne le tracé de la réponse temporelle du système. Le trait continu correspond à la sortie du système (qui est continu) et les $*$ donnent la valeur de la sortie aux instants d'échantillonnage. On remarque que le temps de montée à 5% est égal à $3\tau = 6s$ comme désiré. De plus le rejet des perturbations par la boucle de régulation se fait en trois périodes d'échantillonnage (réponse pile). Ce rejet de perturbation correspond à la fonction de transfert:

$$\frac{N(z)}{P(z)} = \frac{1}{z^3}$$

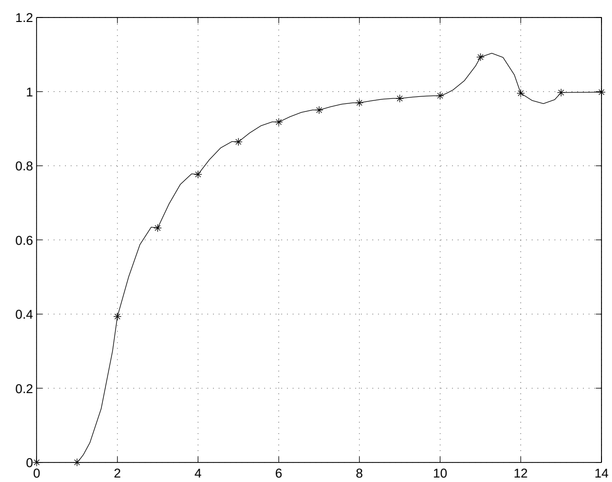

Figure 2: Réponse du système avec le régulateur R.S.T.