INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Travaux Dirigés d'Automatique $n^o 7$

Corrigé

Novembre 2002

1. Choix de la période d'échantillonnage

Le système est caractérisé par le comportement dynamique:

$$m\ddot{y}(t) = \Gamma(t) - b\dot{y}(t)$$

Sachant que $m = 1$, $b = 1$ et $\Gamma(p) = U(p)$ la transformée de Fourier de cette équation donne:

$$p(p+1)Y(p) = U(p)$$

les pôles du système sont $p_{s1} = 0$ et $p_{s2} = -1$ ce qui correspond à un mode de constante de temps infinie (pôle nul: pas de convergence) et à un mode de constante de temps:

$$\tau_2 = -1/p_{s2} = 1s$$

La dynamique de régulation se caractérise par un mode complexe tel que:

$$p_r = -\zeta_r \omega_{n_r} \pm j\omega_{n_r}\sqrt{1-\zeta_r^2}$$

c'est à dire un mode de constante de temps de convergence τ_r et une période de pulsation propre T_r:

$$\tau_r = \frac{1}{\zeta_r \omega_{n_r}} = 0.5s \quad T_r = \frac{2\pi}{\omega_{n_r}} = 0.63s$$

La dynamique de poursuite est donnée par un mode réel:

$$p_t = -1/\tau_t = -0.25$$

de constante de temps de convergence $\tau_t = 0.4s$.

L'échantillonnage doit être suffisamment rapide pour pouvoir à la fois distinguer les temps de réponse et les oscillations. Ici la constante de temps la plus rapide est $\tau_r = 0.5s$. De façon a respecter la règle issue du théorème de Shannon ($\tau/4 < T_e < \tau$) on choisit:

$$T_e = 0.2s$$

2. Représentation polynômiale du système

La fonction de transfert du système continu s'écrit:

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)}U(p)$$

La fonction de transfert du procédé échantillonné est donc:

$$Y(z) = Z[B_o(p)\frac{1}{p(p+1)}] = \frac{z-1}{z}Z[\frac{1}{p^2(p+1)}]$$

Elle se calcule donc comme suit. Premièrement on calcule la transformée de Laplace inverse:

$$L^{-1}[\frac{1}{p^2(p+1)}] = L^{-1}[\frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}] = -1 + t + e^{-t}$$

Puis on échantillonne ce signal continu à la période T_e et on calcule sa transformée en z:

$$Z[-1 + kT_e + e^{-kT_e}] = -\frac{z}{z-1} + \frac{T_e z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z - e^{-T_e}}$$

La fonction de transfert du procédé échantillonné est donc:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = -1 + \frac{T_e}{z-1} + \frac{z-1}{z-e^{-T_e}}$$

A l'aide de MATLAB ce modèle échantillonné ce calcule comme suit:

```
>> Gc=tf(1,[1 1 0]);
>> Te=0.2;
>> Gd=c2d(Gc,Te,'zoh')

Transfer function:
 0.01873 z + 0.01752
----------------------
z^2 - 1.819 z + 0.8187

Sampling time: 0.2
```

On a donc:

$$N(z) = 0.01873z + 0.01752 = b_1 z + b_0$$
$$D(z) = z^2 - 1.819z + 0.8187 = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

3. Précision et rejet de perturbations.

Pour garantir que des entrées indicielles perturbatrices en entrée du système soient atténuées par la boucle de régulation, il faut placer un intégrateur en amont dans la chaîne d'action. Cela revient à imposer une structure sur le polynôme $S(z)$ telle que:

$$S(z) = S_1(z)(z-1)$$

Aucune autre contrainte n'est imposée au correcteur R.S.T. On a donc:

$$R_2(z) = 1 \quad S_2(z) = (z-1) \quad T_2(z) = 1$$

et on définit les polynômes suivants:

$$\begin{aligned} R_2(z)N(z) &= 0.01873z + 0.01752 \\ &= \beta_1 z + \beta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(z)D(z) &= z^3 - 2.819z^2 + 2.6377z - 0.8187 \\ &= \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 \end{aligned}$$

4. Choix des degrés des polynômes

On applique le résultat présenté dans le cours. Pour avoir des polynômes R_1 et S_1 de degrés minimaux il faut choisir:

$$deg(R_1) = deg(D) + deg(S_2) - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$$

Donc on recherche un polynôme R_1 de la forme:

$$R_1(z) = r_0 + r_1 z + r_2 z^2$$

Maintenant de façon a respecter la causalité de l'opérateur R/S ainsi que pour pouvoir imposer les dynamiques dominantes de la boucle de régulation, on prend:

$$deg(S_1) = \max \left\{ \begin{array}{c} deg(D) + deg(R_2) - 1 \\ deg(P_{dom}) - deg(D) - deg(S_2) \end{array} \right\}$$

Dans cet exemple on souhaite imposer un mode complexe dominant au système régulé. Donc on a $deg(P_{dom}) = 2$, soit:

$$deg(S_1) = \max\{\ 2 + 0 - 1\ ;\ 2 - 3\ \} = 1$$

Donc on recherche un polynôme S_1 de la forme:

$$S_1(z) = s_0 + s_1 z$$

Avant de passer au calcul de ces deux polynômes reste à déterminer le nombre de pôles auxiliaires qu'il peut être nécessaire de choisir. La boucle de régulation a comme fonction de transfert:

$$\frac{S(z)N(z)}{S(z)D(z) + R(z)N(z)} = \frac{S(z)N(z)}{P(z)}$$

Son polynôme caractéristique doit avoir parmi ses racines le mode complexe dominant que l'on souhaite imposer à la boucle de régulation. Il peut y avoir des modes auxiliaires, racines de P_{aux} et qui sont nécessairement plus rapides que le mode dominant. Sachant que:

$$deg(P_{aux}) = deg(S_1) + deg(R_1) + 1 - deg(P_{dom})$$

on a:

$$P(z) = P_{dom}(z)P_{aux}(z) \quad \Rightarrow \quad deg(P_{aux}) = 2$$

Pour faire le calcul de la boucle de régulation il faut imposer deux pôles auxiliaires en plus du mode complexe dominant spécifié par l'énoncé.

5. Boucle de régulation

Le polynôme $P(z)$ est pris égal au produit $P_{dom}(z)P_{aux}(z)$ composé d'un polynôme relatif au mode dominant que l'on souhaite imposer au système régulé et d'un polynôme auxiliaire permettant de satisfaire la condition sur le degré de $P(z)$. Le choix des dynamiques de régulation impose que les racines de $P_{dom}(z)$ soient $z_r = e^{p_r T_e}$ où p_r sont les nombres complexes définis dans la question **1**. Dans l'environnement MATLAB le polynôme $P_{dom}(z)$ est donc définit comme suit:

```
>> pr1=-10*0.2+i*10*sqrt(1-0.2^2);
>> pr2=-10*0.2-i*10*sqrt(1-0.2^2);
>> zr1=exp(pr1*Te)

zr1 =

  -0.2541 + 0.6203i

>> zr2=exp(pr2*Te);
>> Pdom=poly([zr1,zr2])

Pdom =

    1.0000    0.5082    0.4493
```

Comme $deg(P) = 4$ on ajoute deux modes auxiliaires. Ils doivent être choisis plus rapides que le mode dominant, c'est à dire des pôles de module inférieur au module des pôles dominants. Par exemple, on peut les choisir infiniment rapide $P_{aux}(z) = z^2$ (i.e. des pôles nuls). Le polynôme $P(z)$ s'écrit donc:

$$\begin{aligned} P(z) &= z^4 + 0.5082z^3 + 0.4493z^2 \\ &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de déterminer $R_1(z)$ et $S_1(z)$ solutions de l'équation diophantine:

$$P(z) = S_1(z)[S_2(z)D(z)] + R_1(z)[R_2(z)N(z)]$$

cette équation s'écrit également sous la forme suivante en fonction des coefficients des différents polynômes:

$$\begin{aligned} & p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 \\ & \quad = (s_0 + s_1 z)(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3) \\ & \quad\quad + (r_0 + r_1 z + r_2 z^2)(\beta_0 + \beta_1 z) \end{aligned}$$

Cette égalité se réécrit en identifiant terme à terme les coefficients des polynômes sous une forme matricielle $P = \Theta X$ avec:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & \beta_0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \beta_1 & \beta_0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & \beta_0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$X = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

De part le choix des degrés des polynômes R_1 et S_1 la matrice Θ est carrée. De plus, elle s'avère inversible. Les coefficients des polynômes recherchés s'obtiennent par l'opération $X = \Theta^{-1}P$. Dans l'environnement MATLAB cela revient à:

```
>> al3=1; al2=-2.819; al1=2.6377; al0=-0.8187;
>> b1=0.01873; b0=0.01752;
```

```
>> Theta=[al0 0 b0 0 0
al1 al0 b1 b0 0
al2 al1 0 b1 b0
al3 al2 0 0 b1
0 al3 0 0 0];
>> P=[0;0;0.4493;0.5082;1];
>> X=inv(Theta)*P
X =
    0.8224
    1.0000
   38.4285
 -118.1625
  133.7341
```

Les solutions uniques de l'équation diophantine sont donc:

$$R_1(z) = 133.7341z^2 - 118.1625 + 38.4285$$
$$S_1(z) = z + 0.8224$$

6. Pré-commande

L'opérateur $T(z)/S(z)$ est en général choisi de façon à assurer au plus prés le suivi de consignes en entrée de cet opérateur. Soit le transfert entre la consigne Y_c en la sortie Y du système:

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{T(z)}{S(z)} \cdot \frac{S(z)N(z)}{P(z)} = \frac{T(z)N(z)}{P(z)}$$

Pour que ce transfert suive au mieux la consigne Y_c il faut que ses pôles soient les plus rapides possibles. Pour réaliser cela on effectue une compensation des pôles lents par les zéros apportés par le polynôme T. On rappelle que pour des raisons de causalité on a:

$$deg(T) \leq deg(S) = 2$$

Le polynôme T ne peut donc compenser que deux pôles. De plus le principe de compensation ne peut s'appliquer que pour des pôles stables. T peut donc être choisi pour compenser les deux pôles stables les plus lents du dénominateur $P = P_{dom}P_{aux}$. Par construction ces pôles sont exactement les racines de P_{dom}. Le choix de T est donc direct:

$$T(z) = P_{dom}(z) = z^2 + 0.5082z + 0.4493$$

Le transfert entre Y_c et la sortie Y est stable et très rapide. Ici les pôles de ce transfert sont les racines de P_{aux}, c'est à dire deux pôles nuls. Le système entre Y_c et Y à une réponse pile en deux échantillons.

Ce n'est pas ce qui est recherché pour le monte charge pour lequel on a spécifié une dynamique de poursuite telle que la constante de temps soit de $\tau_t = 4s$. Pour cette raison une pré-commande est choisie telle que:

$$Y(z) = \frac{N(z)}{P_{aux}(z)}Y_c(z) = \frac{N(z)N_m(z)}{P_{aux}(z)D_m(z)}Y_m(z)$$

De manière à imposer la dynamique de poursuite le polynôme D_m doit avoir une racine réelle telle que:

$$D_m(z) = z - e^{-T_e/\tau_t} = z - 0.9512$$

Reste a choisir N_m qui doit être au plus de degré égal à celui de D_m et qui doit assurer un gain statique unité au processus. On fait le choix $N_m(z) = \mu z$ de façon à compenser un pôle du dénominateur ($P_{aux}(z) = z^2$) et le paramètre μ est choisi pour assurer le gain statique:

$$\frac{Y_o}{Y_{mo}} = \lim_{z \to 1} \frac{N(z)N_m(z)}{P_{aux}(z)D_m(z)} = \frac{\mu N(1)}{D_m(1)} = 1$$

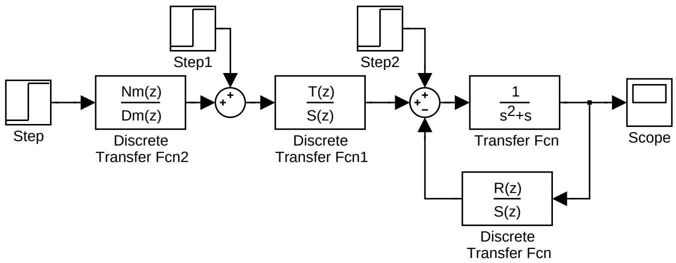
On choisi donc: $\mu = \frac{D_m(1)}{N(1)} = 1.344$

7. Simulation

Les différents polynômes du régulateur se définissent comme suit

```
>> R=[133.7341 -118.1625 38.4285];
>> S=[1 -0.1776 -0.8224];
>> T=[1.0000   0.5082    0.4493];
>> Nm=[1.344 0];
>> Dm=[1 -0.9512];
```

Ayant définit ces polynômes le schéma Simulink de la figure suivante permet de simuler le système régulé et piloté.



On commence par observer la réponse à un échelon de perturbation (`step2`) les autres étant nuls. La réponse est donnée sur la figure 1. Elle est oscillante (caractéristiques dynamiques désirées pour la boucle de régulation) et converge vers zéro (rejet des perturbation du type échelon).

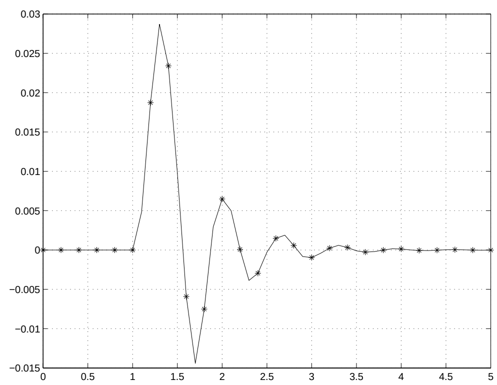


Figure 1: Réponse du système à une perturbation

Dans un deuxième temps on applique un échelon sur y_c (`step1`) les autres étant nuls. La réponse est donnée sur la figure 2. Elle converge en deux échantillons car les deux pôles de ce système sont exactement 0.

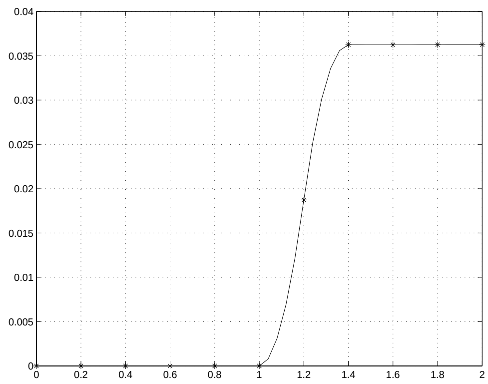


Figure 2: Réponse du système à une consigne en y_c

Enfin, on considère un échelon sur la véritable entrée de consigne (`step`) les autres étants nuls. la réponse est donnée sur la figure 3. Elle converge avec les dynamiques souhaitées en poursuite et a un gain statique unitaire.

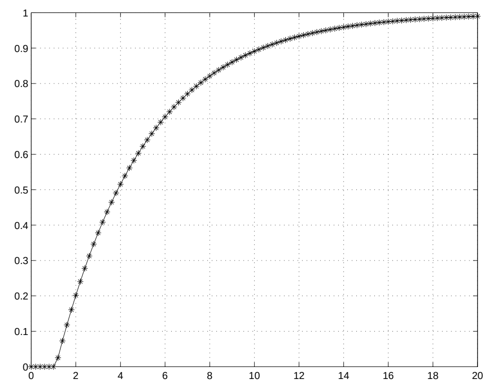


Figure 3: Réponse du système à une consigne en y_m

En dernier lieu, des simulations sont effectuées avec une consigne du type échelon sur y_m et des échelons répétés en perturbation. Le résultat comme attendu est donné sur la figure 4. On observe les différentes dynamiques qui se supperposent.

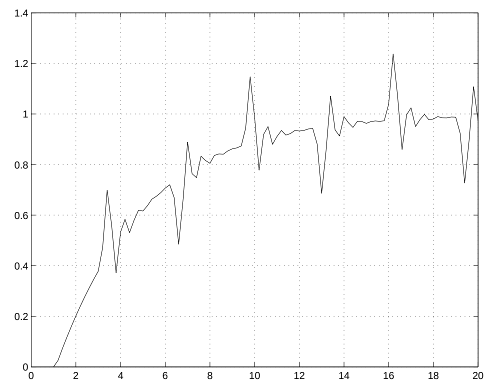


Figure 4: Réponse du système à une consigne avec des perturbations