

# INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

## Travaux Dirigés d'Automatique n°5

### Corrigé

Novembre 2003

## 1 Analyse du système

Avant d'envisager le problème de synthèse de régulateurs, on s'intéresse à l'analyse des propriétés du système telles que l'observabilité, la commandabilité, la stabilité et les performances dynamiques.

### 1. Commandabilité et observabilité

#### a. Commandabilité

Soit la matrice de commandabilité  $Q_c$  du modèle.

$$Q_c = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ]$$

Ici le système est du second ordre,  $n = 2$ , on calcule donc :

$$AB = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice  $Q_c$  est de rang plein donc le système est commandable.

#### b. Observabilité

La démarche est identique. On calcule la matrice d'observabilité du modèle :

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1.5 \end{bmatrix}$$

La matrice  $Q_o$  est de rang plein donc le système est observable.

### 2. Étude de stabilité

On détermine le polynôme caractéristique du système  $P(z)$  et on en calcule les racines pour conclure sur la stabilité.

$$P_A(z) = \det(z\mathbf{I}_n - A) = \det \left( \begin{bmatrix} z-1.5 & 1 \\ -1.5 & z+0.5 \end{bmatrix} \right)$$

Le résultat est :

$$P_A(z) = (z-1.5)(z+0.5) + 1.5 = z^2 - z + 3/4$$

Ce polynôme a pour racines  $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Leur module est  $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$  et la partie imaginaire est non nulle. Le système est

donc stable et sa réponse présente un régime transitoire oscillatoire.

### 3. Comportement dynamique du procédé continu

Tout modèle de système à temps discret peut être vu comme issu de l'échantillonnage d'un système à temps continu. Ce n'est pas nécessairement le cas dans la réalité mais cette interprétation permet de caractériser le comportement dynamique d'un système discret. En effet, le comportement dynamique (temps de convergence, oscillations...) d'un système n'est pas modifié par l'échantillonnage. De plus, on a établi que si  $p_i$  est un pôle du système continu alors au travers de l'échantillonnage ce pôle devient  $z_i = e^{p_i T}$ , pôle du système discret ( $T$  est la cadence du système discret).

Dans notre cas on connaît les pôles du système discret. Ils peuvent donc être vus comme issus d'un échantillonnage d'un système continu dont les pôles vérifient :

$$z_{1,2} = e^{p_{1,2} T} \quad \text{avec} \quad p_{1,2} = p_R \pm i p_I$$

On a donc la relation suivante :

$$\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{p_R T} (\cos(p_I T) \pm i \sin(p_I T))$$

Si on écrit l'égalité des modules de ces deux nombres complexes on obtient :

$$(e^{p_R T})^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow p_R = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -0.1438$$

La partie réelle des pôles est négative, le système continu est stable. L'égalité des arguments donne :

$$\tan(p_I T) = \frac{\sqrt{2}/2}{1/2} \Rightarrow p_I = \frac{1}{T} \arctan(\sqrt{2}) = 0.9553$$

La partie imaginaire des pôles est non nulle, le système continu à un comportement oscillant en régime transitoire. Les oscillations sont caractérisées par le coefficient d'amortissement,  $\xi$ , et la pulsation propre,  $\omega_n$ , telles que ( $\omega_p$  est la pulsation propre non amortie) :

$$p_R = -\xi\omega_n \quad p_I = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \omega_p$$

Pour le système considéré on trouve:

$$\xi = 0.1489 \quad \omega_n = 0.9661 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le système est fortement oscillant (amortissement faible) et l'oscillation se fait à la période,  $T_{\text{OSC}} = 2\pi/\omega_p = 6.6\text{s}$ , c'est à dire un peu plus de 6 périodes d'échantillonnage. De plus, la constante de temps du système est  $\tau = 1/\xi\omega_n = 6.95\text{s}$ . En réponse à un échelon le système converge à 95% de valeur finale en  $3\tau$  soit environ 21 périodes d'échantillonnage. Ces résultats se retrouvent sur le réponse indicielle du système donnée sur la figure 1.

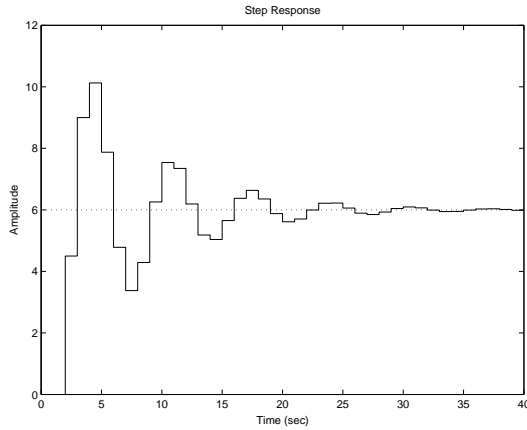


Figure 1: Réponse indicielle du procédé

#### 4. Matrices de passage aux formes compagnes

##### a. Forme compagne de commande

La matrice de passage  $M_c$  se définit comme suit. Si  $x$  est le vecteur d'état dans la base initiale et  $\tilde{x}$  le vecteur d'état dans la base compagne de commande, alors  $x = M_c \tilde{x}$  et  $M_c$  se décompose colonne par colonne :

$$M_c = [ m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_n ]$$

Pour construire  $M_c$  il est nécessaire de connaître les matrices  $A$  et  $B$  de la base initiale, ainsi que les coefficients du polynôme caractéristique :

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P_A(z) = z^2 + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = z^2 - z + 3/4$$

Les colonnes de  $M_c$  sont calculées par récurrence :

$$\begin{aligned} m_n &= B \\ m_{n-1} &= Am_n + a_{n-1}B \\ m_{n-2} &= Am_{n-1} + a_{n-2}B \\ &\vdots \\ m_1 &= Am_2 + a_1B \end{aligned}$$

Ce qui donne dans le cas de l'exemple :

$$M_c = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad M_c^{-1} = \frac{1}{4.5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Dans la base compagne de commande le système s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}u_k = (M_c^{-1}AM_c)\tilde{x}_k + (M_c^{-1}B)u_k \\ y_k = \tilde{C}\tilde{x}_k = (CM_c)\tilde{x}_k \end{cases}$$

Où les matrices  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont celles de la forme compagne de commande :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3/4 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et la matrice  $\tilde{C}$  doit être calculée :

$$\tilde{C} = [ 4.5 \quad 0 ]$$

##### a. Forme compagne d'observation

La matrice de passage  $M_o$  se définit comme suit. Si  $x$  est le vecteur d'état dans la base initiale et  $\check{x}$  le vecteur d'état dans la base compagne d'observation, alors  $M_o x = \check{x}$  et  $M_o$  se décompose ligne par ligne :

$$M_o = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$$

Pour construire  $M_o$  il est nécessaire de connaître les matrices  $A$  et  $C$  de la base initiale, ainsi que les coefficients du polynôme caractéristique. Les lignes de  $M_o$  sont calculées par récurrence :

$$\begin{aligned} m_n &= C \\ m_{n-1} &= m_n A + a_{n-1} C \\ m_{n-2} &= m_{n-1} A + a_{n-2} C \\ &\vdots \\ m_1 &= m_2 A + a_1 C \end{aligned}$$

Ce qui donne dans le cas de l'exemple :

$$M_o = \begin{bmatrix} 2 & -2.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_o^{-1} = \frac{1}{4.5} \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dans la base compagne d'observation le système s'écrit :

$$\begin{cases} \check{x}_{k+1} = \check{A}\check{x}_k + \check{B}u_k = (M_o A M_o^{-1})\check{x}_k + (M_o B)u_k \\ y_k = \check{C}\check{x}_k = (C M_o^{-1})\check{x}_k \end{cases}$$

Où les matrices  $\check{A}$  et  $\check{C}$  sont celles de la forme compagne d'observation et la matrice  $\check{B}$  doit être calculée :

$$\check{B} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2 Commande par retour d'état

### 1. Modes à l'origine

La synthèse d'un retour d'état se fait en quatre étapes :

a) Polynôme caractéristique du système en boucle ouverte.

$$P_A(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = z^2 - z + 3/4$$

b) Polynôme caractéristique désiré en boucle fermée.

Si on souhaite réaliser une commande telle que le système réagisse le plus rapidement possible à une sollicitation extérieure, il faut placer les pôles de façon à minimiser leur module (le module d'un pôle d'un système à temps discret caractérise la rapidité de convergence du mode associé). Sans aucune autre contrainte sur les pôles cela implique de choisir des pôles nuls :

$$P_{A-BL_1}(z) = (z-0)^n = z^n = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

c) Loi de retour d'état dans la base de commande.

On déduit de ces polynômes la loi de commande par retour d'état réalisable si on était dans la base compagne de commande :

$$\begin{aligned} \tilde{L}_1 &= [ \alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \dots \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} ] \\ &= [ -3/4 \quad 1 ] \end{aligned}$$

d) Loi de retour d'état dans la base initiale.

La loi de retour d'état s'écrit dans une base ou une autre comme suit :

$$u_k = -L_1 x_k + l_c y_{ck} = -\tilde{L}_1 \tilde{x}_k + l_c y_{ck}$$

Ce qui donne :

$$L_1 = \tilde{L}_1 M_c^{-1} = [ 1/2 \quad -1/2 ]$$

Le système bouclé par ce retour d'état s'écrit :

$$x_{k+1} = (A - BL_1)x_k + Bl_c y_{ck} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} l_c \\ -l_c \end{bmatrix} y_{ck}$$

Son polynôme caractéristique est  $P_{A-BL_1}(z) = z^2$  comme désiré.

## 2. Modes trois fois plus amortis

On reprend la procédure de synthèse :

a) Polynôme caractéristique du système en boucle ouverte.

$$P_A(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = z^2 - z + 3/4$$

b) Polynôme caractéristique désiré en boucle fermée.

On souhaite modifier les pôles de façon à avoir une pulsation propre quasiment identique à celle de la boucle ouverte ( $\omega_n - 1 \text{rads}^{-1}$ ), et on souhaite que le système converge plus rapidement avec un amortissement  $\xi = 0.425$ . Dans ce cas, la constante de temps du système sera :

$$\tau = 1/\xi\omega_n = 2.35s$$

Ces spécifications se traduisent par des pôles d'un système continu "virtuel":

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -0.425 \pm i 0.9052$$

et imposent les pôles suivants pour le système bouclé discret :

$$z_{1,2} = e^{p_{1,2}T} = 0.4037 \pm i 0.5142$$

Le polynôme caractéristique désiré est :

$$P_{A-BL_2}(z) = z^2 - 0.8074z + 0.4274 = \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

c) Loi de retour d'état dans la base de commande.

On déduit de ces polynômes la loi de commande par retour d'état réalisable si on était dans la base compagne de commande :

$$\tilde{L}_2 = [ -0.3226 \quad 0.1926 ]$$

d) Loi de retour d'état dans la base initiale.

$$L_2 = \tilde{L}_2 M_c^{-1} = [ 0.0570 \quad -0.1360 ]$$

## 3. Commandes MATLAB pour le même calcul.

Ce dernier résultat peut-être facilement obtenu par MATLAB grâce à la fonction place.

```
>> A=[ 1.5 -1;1.5 -0.5];B=[1;-1];
>> Poles=[ 0.4037+0.5142j , 0.4037-0.5142j ];
>> L2=place(A,B,Poles);
```

L2 =

$$0.0570 \quad -0.1360$$

Le retour  $L_1$ , quant à lui, ne peut être déterminé par place. En effet, cette fonction ne permet pas de placer des pôles dont l'ordre de multiplicité excède le nombre d'entrées. Pour le calcul de  $L_1$ , notre système étant mono-entrée, il convient d'utiliser la fonction acker qui est une alternative pour la même chose :

```
>> L1=acker(A,B,[0 0])
```

L1 =

$$0.5000 \quad -0.5000$$

## 3 Pré-commande

Une pré-commande peut-être appliquée au système bouclé de façon à avoir un gain statique unitaire en boucle fermée. Ceci garanti au système d'être précis en réponse à des échelons sur  $y_c$ . Pour autant, comme nous l'avons déjà vu, ceci ne garantit pas que le système rejette des perturbations additives sur  $u$ . Pour remplir cette dernière spécification, il faudrait introduire un intégrateur dans la chaîne d'action, ce qui n'est pas le but du TD.

Sans le détailler, les pré-commandes s'obtiennent à l'aide de la formule suivante :

$$l_c = 1/C(I - A + BL)^{-1}B$$

Appliqué aux deux lois de commande précédentes :

$$l_{c1} = \frac{1}{4.5} \quad l_{c2} = 0.1378$$

## 4 Observateur

En général, l'état du système n'est pas directement accessible. En vue d'effectuer un retour d'état, il donc est nécessaire de calculer un observateur.

### 1. Modes à l'origine

La synthèse de l'observateur se fait en quatre étapes :

a) *Polynôme caractéristique du système.*

$$P_A(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = z^2 - z + 3/4$$

b) *Polynôme caractéristique désiré de l'observateur.*

Si on souhaite réaliser un observateur dont l'état converge vers celui du système le plus rapidement possible, il faut placer les pôles de façon à minimiser leur module. Sans aucune autre contrainte sur les pôles, cela implique de choisir des pôles nuls :

$$P_{A-H_1C}(z) = (z-0)^n = z^n = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

c) *Gain de l'observateur dans la base d'observation.*

On déduit de ces polynômes le gain de l'observateur nécessaire si on était dans la base compagne d'observation :

$$\check{H}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 \\ \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) *Gain de l'observateur dans la base initiale.*

Les équations de l'observateur s'écrivent dans une base ou une autre comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= (A - H_1C)\hat{x}_k + Bu_k + H_1y_k \\ \check{\hat{x}}_{k+1} &= (\check{A} - \check{H}_1\check{C})\check{\hat{x}}_k + \check{B}u_k + \check{H}_1y_k \end{aligned}$$

Étant donné les règles de changement de base, on a :

$$H_1 = M_o^{-1}\check{H}_1 = \begin{bmatrix} 7/18 \\ 11/18 \end{bmatrix}$$

### 2. Modes réglés sur ceux du retour d'état

Dans certains cas on souhaite pas nécessairement avoir un observateur le plus rapide possible mais de régler les modes de l'observateur sur ceux du système bouclé par le retour d'état. Ainsi le système complet (système + retour d'état + observateur) a tous ces pôles sélectionnés pour les mêmes spécifications. Sans refaire tous les détails des calculs, pour placer les pôles sur ceux qui garantissent un amortissement de  $\xi = 0.425$  et une pulsation propre  $\omega_n = 1rad/s$ , on trouve :

$$\check{H}_2 = \begin{bmatrix} -0.3226 \\ 0.1926 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0.0355 \\ 0.1575 \end{bmatrix}$$

### 3. Commandes MATLAB pour le même calcul.

Le calcul d'un gain d'observateur (placer les valeurs propres de  $A - HC$ ) et le calcul d'un gain de retour d'état (placer les valeurs propres de  $A - BL$ ) sont des problèmes assez similaires. Plus précisément, placer les valeurs propres de  $A - HC$  revient à placer ceux de sa transposée  $A^T - C^T H^T$  ce qui est exactement

équivalent à un retour d'état appliqué au système composé de  $A^T$  et  $C^T$ . Compte tenu de cette dualité, les calculs de  $H_1$  et  $H_2$  peuvent être retrouvés par MATLAB, en utilisant les fonctions `place` et `acker`:

```
>> C=[1 1];
>> H2=place(A',C',Poles)'
```

```
H2 =
    0.0355
    0.1575
```

```
>> H1=acker(A',C',[0 0])'
```

```
H1 =
    0.3889
    0.6111
```

## 5 Simulations

### 1. Équations du système bouclé

Le système en boucle ouverte satisfait les équations :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

L'observateur quant a lui satisfait les équations :

$$\hat{x}_{k+1} = (A - HC)\hat{x}_k + Bu_k + Hy_k$$

Il convient de remplacer dans ces deux équations la loi de commande et la loi de mesure :

$$\begin{aligned} u_k &= l_c y_{ck} - L\hat{x}_k + d_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned}$$

pour obtenir :

$$x_{k+1} = Ax_k - BL\hat{x}_k + Bl_c y_{ck} + Bd_k$$

$$\hat{x}_{k+1} = (A - HC - BL)\hat{x}_k + Bl_c y_{ck} + Bd_k + HCx_k$$

Ces équations correspondent exactement avec le modèle donné dans l'énoncé.

### 2. Simulations avec SIMULINK

Pour faire les simulations on construit le schéma SIMULINK de la figure 2.

Ce choix de schéma permet de définir directement le modèle complet. Les matrices du système sont éventuellement définies dans l'environnement MATLAB comme suit:

```
>> Ag=[A -B*L1;H1*C A-H1*C-B*L1];
>> Bg=[B*lcl B;B*lcl B];
>> Cg=[C zeros(1,2);eye(2) -eye(2)];
>> Dg=zeros(3,2);
```

et spécifiées pour le bloc SIMULINK dans la fenêtre correspondante. Dans cette même fenêtre il est possible de donner des conditions initiales au système. Dans notre cas, nous avons

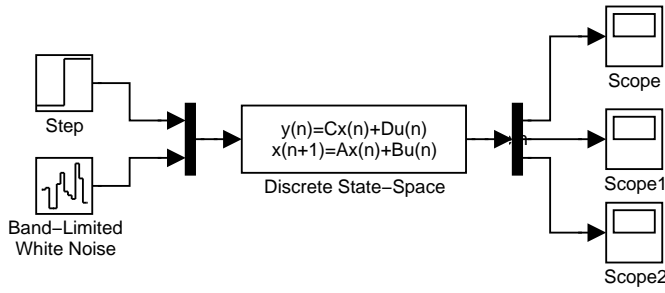


Figure 2: Schéma SIMULINK

choisi un vecteur de conditions initiales tel que  $[1 \ 2 \ 0 \ 0]$  qui signifie que l'état initial du système est choisi tel que  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et l'état de l'observateur est choisi nul. Enfin, les simulations sont faites avec avec un échelon de consigne de valeur 2 déclenché à l'instant  $t = 10$  et un bruit blanc de perturbation dont la puissance est réglée à 0.001. Les réponses observées pour le système sont données sur les figures 3, 4 et 5. Les différentes figures correspondent à des choix de  $L$  et  $H$  différents.

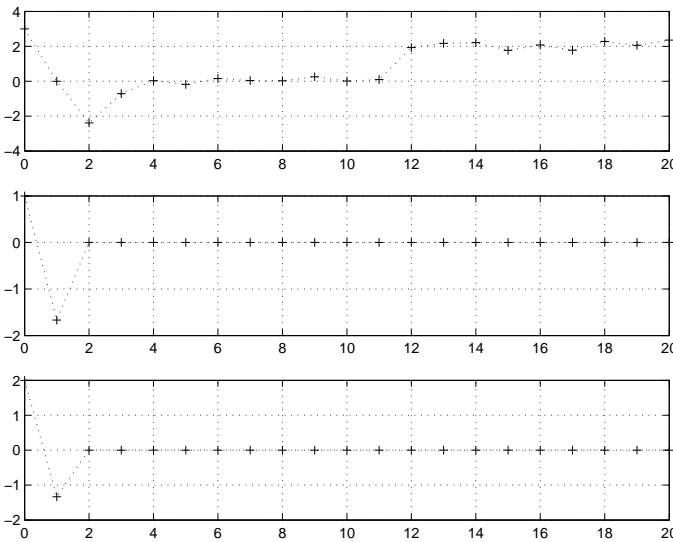


Figure 3: Réponses du système pour  $L_1$  et  $H_1$

De l'observation de ces courbes, on constate que l'état estimé par l'observateur converge toujours vers l'état réel du système (erreur converge vers zéro). L'écart initial entre l'état réel et l'état estimé dépend des conditions initiales choisies. De plus, la vitesse de convergence dépend du choix des pôles de l'observateur. Quand on prend  $H_1$ , les pôles sont à zéro et l'observateur converge pile en deux itérations; par contre pour  $H_2$  la convergence est plus lente et légèrement oscillante (comme spécifié). Pour finir, on constate qu'une fois que l'observateur a convergé, l'estimation colle parfaitement à l'état réel du système mal grès les perturbations et les consignes appliquées au système.

Pour ce qui est de la sortie du système, on observe qu'elle

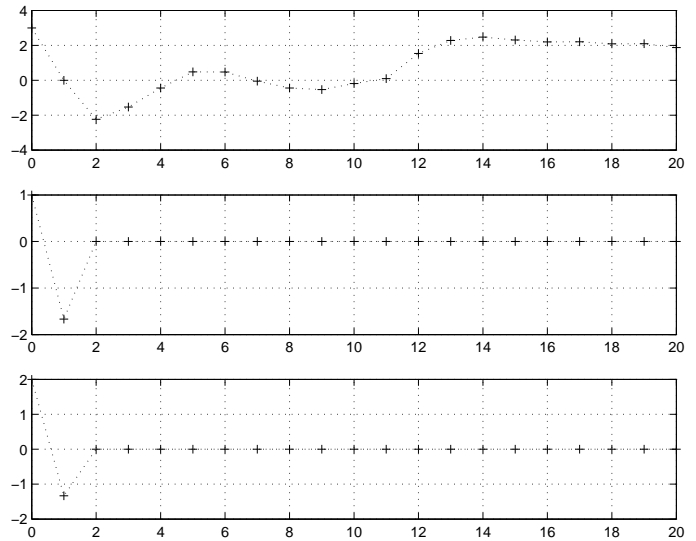


Figure 4: Réponses du système pour  $L_2$  et  $H_1$

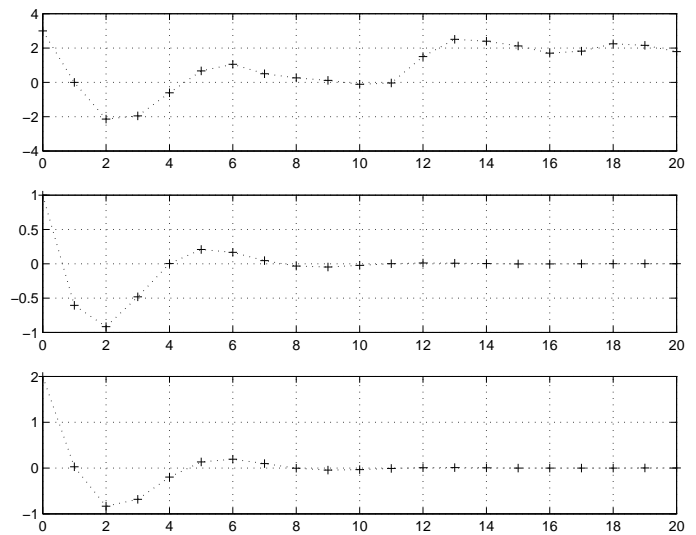


Figure 5: Réponses du système pour  $L_2$  et  $H_2$

respecte la consigne d'entrée. La sortie converge vers zéro quand la consigne est nulle et converge vers 2 quand on applique l'échelon. La précision du système est donc assurée. De plus, on note que dans un premier temps le système converge vers zéro une fois que l'observateur a convergé et que le retour d'état a fait son effet. Ceci se traduit par une convergence en 4 itérations pour le premier cas et des convergences oscillantes à peu près aussi rapides pour les deux autres (dans le dernier cas l'observateur et le retour d'état ont les mêmes dynamiques et c'est ce qui imprime la dynamique globale sans que les temps de réponse s'ajoutent). Dans un deuxième temps, la réponse du système converge vers l'échelon de consigne exactement comme spécifié par le placement de pôles du retour d'état. Les dynamiques ne sont plus influencées par l'observateur qui assure en temps réel le suivi de  $x$  par son estimée  $\hat{x}$ .