INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Travaux Dirigés d'Automatique $n^o 3$

Corrigé

Octobre 2003

1. La transformée en p de l'équation différentielle décrivant la partie mécanique du système est :

$$(mp^2 + bp)Y(p) = \Gamma(p)$$

Donc la fonction de transfert du système éléctro-mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{p(mp+b)} \cdot \frac{1}{p+a} \\ &= \frac{1}{p(p+\ln(5))(p+\ln(10))} = \frac{U(p)}{Y(p)} \end{aligned}$$

2. Pour étudier la stabilité du système bouclé en fonction de K, on détermine sa fonction de transfert :

$$Y(p) = \frac{KG(p)}{1+KG(p)} Y_c(p)$$

Ensuite, on analyse son polynôme caractéristique (dénominateur de la fonction de transfert) :

$$p(p+a)(p+b) + K = p^3 + (a+b)p^2 + abp + K$$

La table de Routh de ce polynôme s'écrit :

$$\begin{array}{lll} p^3 & 1 & ab \\ p^2 & a+b & K \\ p^1 & \dfrac{(a+b)ab - K}{a+b} & \\ p^0 & K & \end{array}$$

Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que les coefficients du polynôme et les coefficients de la première colonne de la table de Routh soient strictement de même signe. Le système bouclé est donc stable si et seulement si :

$$(a+b)ab = (\ln(5) + \ln(10))\ln(5)\ln(10) = 14.5 > K > 0$$

Ce résultat se retrouve de façon approximative à l'aide du lieu d'Evans. Dans le logiciel MATLAB les commandes qui suivent permettent d'obtennir la figure 1. On lit directement sur la courbe la valeur approximative du gain limite.

```
>> G=zpk([],[0 -log(5) -log(10)],1)

Zero/pole/gain:
      1
-------------
s (s+1.609) (s+2.303)

>> rlocus(G);
```

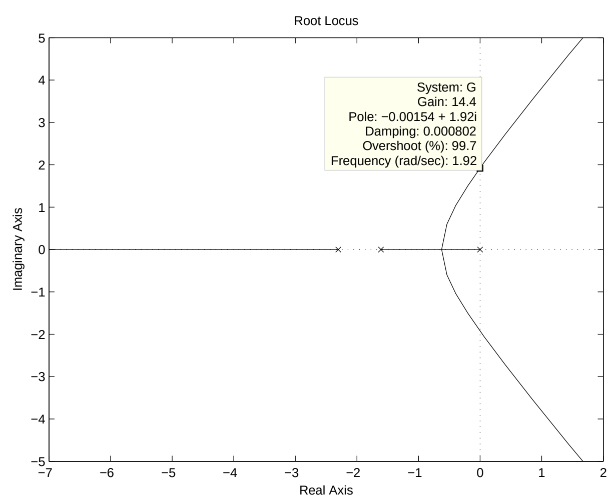

Figure 1: Lieu d'Evans du système continu

3. La première étape est de donner une modélisation du système discret représenté en pointillés dont le signal discret d'entrée est l'entrée du bloqueur d'ordre zéro et le signal discret de sortie est la sortie de l'échantillonneur de période T :

$$G(z) = \mathcal{Z}[B_o(p)G(p)] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{p^2(p+a)(p+b)}\right]$$

On réalise la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2(p+a)(p+b)} &= \frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{a+b}{a^2b^2}\cdot\frac{1}{p} \\ &+ \frac{1}{(-a)^2(-a+b)}\cdot\frac{1}{p+a} + \frac{1}{(-b)^2(-b+a)}\cdot\frac{1}{p+b} \end{aligned}$$

Cette décomposition en éléments simples peut être réalisée à l'aide de MATLAB comme suit. Premièrement on définit le polynôme dénominateur à la donnée de ses racines :

```
>> den=poly([0 0 -log(5) -log(10)])

den =
    1.0000    3.9120    3.7059         0         0
```

et le numérateur comme suit, `num=[1]`. Ensuite on applique la fonction `residue` à la fraction rationnelle :

```
>> [R,P,K]=residue(num,den)
R =
   -0.2721
    0.5570
   -0.2849
    0.2698
P =
   -2.3026
   -1.6094
         0
         0
K =
     []
```

Le vecteur `R` correspond aux résidus dans l'ordre des pôles rangés dans le vecteur `P`, et le vecteur `K` est le terme direct (nul dans ce cas). Dans le cas de pôles multiples (ici `0`), les résidus sont dans l'ordre croissant du degré du dénominateur.
La transformée en $\mathcal{Z}$ de chaque élément de la décomposition en éléments simples est obtennue grâce à la table de conversion :

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{0.2698Tz}{(z-1)^2} - \frac{0.2849z}{z-1} + \frac{0.557z}{z-e^{-T\ln(5)}} - \frac{0.2721z}{z-e^{-T\ln(10)}}\right]$$

En rammennnant tous les termes sur le même dénominateur, on trouve une fonction de transfert de la forme suivante :

$$G(z) = \frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{z^2+a_2z^2+a_1z+a_0} = \frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{(z-1)^2(z-0.2)(z-0.1)}$$

dont il est plus aisé de calculer les coeficients à l'aide de MATLAB comme suit :

```
>> T=1;
>> G_d=c2d(G,T,'zoh')

Zero/pole/gain:
0.06917 (z+1.577) (z+0.09003)
-----------------------------
    (z-1) (z-0.2) (z-0.1)

Sampling time: 1
>> tf(Gd)

Transfer function:
0.06917 z^2 + 0.1153 z + 0.009819
---------------------------------
  z^3 - 1.3 z^2 + 0.32 z - 0.02

Sampling time: 1
```

Pour plus de simplicité dans la suite des calculs on considère l'approximation :

$$\begin{array}{lll} b_2 = 0.07 & b_1 = 0.1 & b_0 = 0.01 \\ a_2 = -1.3 & a_1 = 0.32 & a_0 = -0.02 \end{array}$$

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée s'écrit :

$$\begin{aligned} P(z) &= z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 + K(b_2z^2 + b_1z + b_0) \\ &= \alpha_3z^3 + \alpha_2z^2 + \alpha_1z + \alpha_0 \end{aligned}$$

D'après le critère de Jury le système est stable si et seulement si :

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.18K > 0$$
$$-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 2.64 + 0.02K > 0$$
$$\alpha_3 - |\alpha_0| = 1 - |-0.02 + 0.01K| > 0$$
$$\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_0^2 + \alpha_3^2 = 0.7056 - 0.114K + 6\cdot 10^{-4}K^2 > 0$$

De ces inégalités on déduit les conditions suivantes:

$$\begin{array}{c} K > 0 \\ K > -132 \\ -98 < K < 102 \\ K < 6 \ \text{ ou } \ K > 180 \end{array}$$

Les valeurs limites de stabilité sont donc $0 < K < 6$.
On retrouve ce résultat à l'aide du lieu d'Evans tracé avec MATLAB :

```
>> rlocus(G_d)
>> zgrid
```

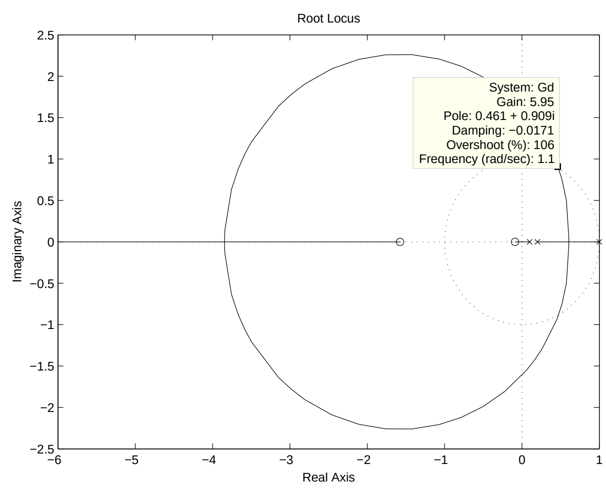

Figure 2: Lieu d'Evans du système échantillonnée

4. Calcul du régulateur analogique

On recherche un régulateur de la forme proportionnel avec avance de phase :

$$R(p) = K\frac{1+\alpha\tau p}{1+\tau p}$$

Le gain proportionnel K permet de régler la précision du système bouclé et l'avance de phase permet d'améliorer la marge de phase. On commence par déterminer le gain K. L'erreur en sortie, $\varepsilon(t)$, comparée à la consigne est telle que :

$$\mathcal{E}(p) = Y_c p - K\frac{1+\alpha\tau p}{1+\tau p}\cdot\frac{1}{p(p+a)(p+b)}\ \mathcal{E}(p)$$

$$\mathcal{E}(p) = \frac{(1+\tau p)p(p+a)(p+b)}{(1+\tau p)p(p+a)(p+b)+K(1+\alpha\tau p)}Y_c(p)$$

D'après le théorème de la valeur finale on a :

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t) \ = \ \lim_{p\to 0}\ p\mathcal{E}(p)$$

Pour une consigne en vitesse ($y_c(t)$ est une rampe de pente γ) on a $Y_c(p) = \frac{\gamma}{p^2}$ et

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t) &= \lim_{p\to 0}\frac{\gamma(1+\tau p)(p+a)(p+b)}{(1+\tau p)p(p+a)(p+b)+K(1+\alpha\tau p)}\\ &= \gamma ab/K = \gamma\ln(5)\ln(10)/K\end{aligned}$$

L'erreur en vitesse est inférieure à 100% si $\gamma\ln(5)\ln(1)/K < \gamma$. On prend $K = 4 > 3.7059$.
Remarque : cette valeur de gain stabilise la boucle fermée (voir question **2.**). Pour avoir des erreurs en vitesse plus faibles, il faut augmenter K au risque de déstabiliser le système.
Maintenant, on calcule le correcteur par avance de phase. Pour cela on commence par déterminer la marge de phase du système bouclé avec le gain $K = 4$ choisi :

```
>> margin(G_c*4)
```

La marge de phase est $\phi_M = 40.2^o$ (voir figure 3) alors qu'on désire une marge égale à $\phi_D = 45^o$, ce qui conduit à une avance de phase souhaitable égale à :

$$\phi_A = (\phi_D - \phi_M)h$$

où h est un paramètre choisi arbitrairement ($h > 1.2$). Ici on prend $h = 2$, ce qui donne $\phi_A \simeq 10^o$ et permet de calculer α :

$$\alpha = \frac{1+\sin(\phi_A)}{1-\sin(\phi_A)} \simeq 1.4$$

Attention, la fonction `sin` *de* MATLAB *n'accepte comme argument que des valeurs en radians.*
(`10*2*pi/360`$\simeq 0.17$*rad)*
A partir de la figure 3, on détermine la pulsation ω_m pour laquelle le gain du système en boucle ouverte $4G(p)$ est $-10\log(\alpha) \simeq -1.5$. On prend une valeur approchée (supérieure) $\omega_m = 1\ rad\cdot s^{-1}$, ce qui permet de déduire τ :

$$\tau = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}} \simeq 0.8$$

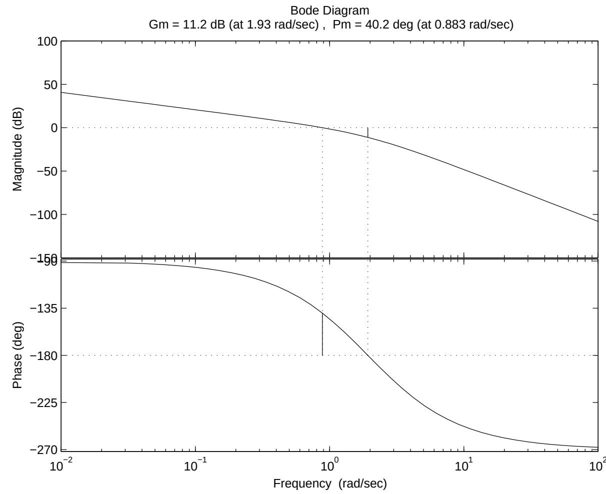

Figure 3: Diagramme de Bode du système $KG(p)$

Attention, la fonction `log` *de* MATLAB *correspond au logarithme népérien. Pour le logarithme décimal utiliser* `log10`*.*
On obtient donc :

$$R(p) = 4\frac{1+1.12p}{1+0.8p}$$

Le diagramme de Bode de $G(p)R(p)$ est donné sur la figure 4. La marge de phase est 44.8^o ce qui est assez proche de la valeur désirée (45^o).

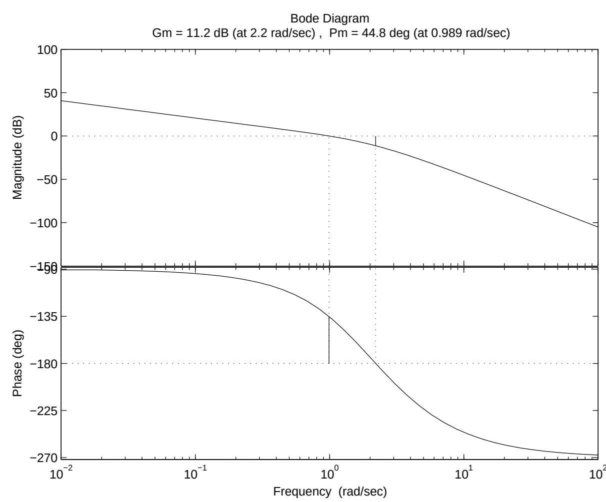

Figure 4: Diagramme de Bode du système $G(p)R(p)$

Calcul de régulateurs numériques par discrétisation.
La discrétisation du régulateur analogique suppose un choix de méthode mathématique pour l'approximation du comportement continu en un phénomène discret. L'idée est d'approximer la loi de dérivation ($\dot{u} = y$) et donc le paramètre p de Laplace, par une loi discrète. Les trois approximations usuelles sont :

- Discrétisation avant.
  Dans ce cas la dérivation s'écrit en discret :
  $$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=kT} \simeq \frac{u_{k+1} - u_k}{T} = y_k$$
  soit une approximation de la forme $p = \frac{z-1}{T}$.
  Appliquée au correcteur $R(p)$ cette discrétisation donne :
  $$R_1(z) = \frac{4.48z - 4.48}{0.8z + 0.2}$$

- Discrétisation arrière.
  Dans ce cas la dérivation s'écrit en discret :
  $$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=kT} \simeq \frac{u_k - u_{k-1}}{T} = y_k$$
  soit une approximation de la forme $p = \frac{z-1}{Tz}$.
  Appliquée au correcteur $R(p)$ cette discrétisation donne :
  $$R_2(z) = \frac{8.48z - 4.48}{1.8z - 0.8}$$

- Approximation de Tustin.
  Dans ce cas la dérivation est approximmée en prenant la moyenne des approximations précédement envisagées :
  $$\frac{u_k - u_{k-1}}{T} = \frac{y_k + y_{k-1}}{2}$$
  soit une approximation de la forme $p = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$.
  Appliquée au correcteur $R(p)$ cette discrétisation donne :
  $$R_3(z) = \frac{12.96z - 4.96}{2.6z + 0.6}$$

  Dans l'environnement MATLAB l'opération se fait ainsi :

```
>> R=K*tf([alpha*tau 1],[tau 1]);
>> T=1;
>> R_d=c2d(R,T,'tustin')

Transfer function:
4.985 z - 1.908
---------------
  z - 0.2308

Sampling time: 1
```

Attention : la discrétisation (ce qui est fait ici pour déduire un correcteur discret approximant le fonctionnement d'un correcteur continu) est totalement différent de l'échantillonnage (opération physique comme celle de la question **2.***). Malheureusement* MATLAB *confond les deux opérations; la fonction* `c2d` *permet soit le calcul des systèmes échantillonnés (avec des bloqueurs d'ordre 0 et 1) soit le calcul de l'approximation de Tustin. Les autres types de discrétisation ne sont pas proposés.*

Tracé des réponses
Le tracé des réponses à un échelon se font par les commandes suivantes :

```
>> Gbf=feedback(Gd*R_d,1);
>> step(Gbf);
```

Les réponses dépendent du type de discrétisation adopté (voir TD 1, exercice 2, question 5).
Sur la figure 5, les erreurs de sortie en réponse à une rampe sont tracées pour les boucles fermées obtenues avec les trois correcteurs. On retrouve l'erreur en vitesse qui converge vers une valeur inférieure à 1. C'est à dire que l'erreur est inférieure à la valeur de la pente de la rampe initiale donc inférieure a 100%.

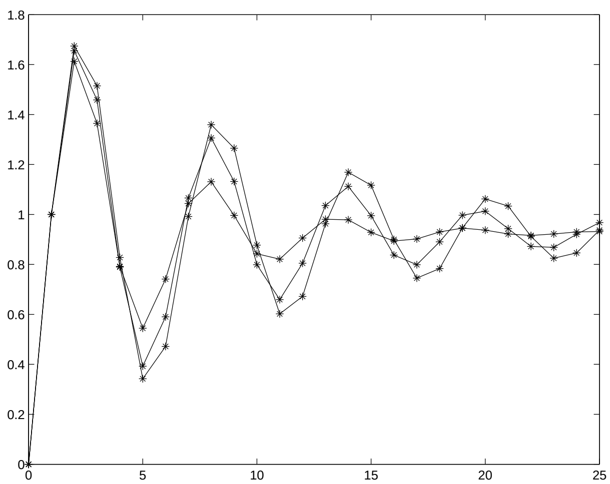

Figure 5: Erreur de la réponse à une rampe