INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Travaux Dirigés d'Automatique $n^o 2$

Corrigé

Octobre 2003

Exercice 1
Même si lors de la séance de TD, les calculs ont été fait avec $d(t) = 0$ pour simplifier les propos, dans ce corrigé les résultats sont donnés avec $d(t) \neq 0$. Le corrigé donne ainsi une illustration de modélisation multivariable.
1. Le système mécanique est décrit par les équations :

$$\frac{d(mv(t))}{dt} = u(t) \qquad \frac{dy(t)}{dt} = v(t)$$

En choisissant le vecteur d'état $x' = [\, y \;\; \dot{y} \,]$ (position, vitesse de l'engin) le modèle d'état est :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u+d) \\ y & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x & + & 0\,(u+d) \end{array} \right.$$

Le système s'écrit aussi :

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m} u(t)$$

Sa fonction de transfert est:

$$G(p) = \frac{1}{p^2}$$

Remarque : la représentation d'état est sous forme compagne de commande (voir annexe A.3.1 du poly).

A l'aide du logiciel MATLAB :

- Définir le système avec `g=ss(A,B,C,D)` ou `G=tf(num,den)`.
- Vérifier que les modèles sont équivalents avec `tf(g)` par exemple.

2. Pour étudier la stabilité du système bouclé en fonction de K, on peut déterminer sa fonction de transfert et analyser le polynôme caractéristique (dénominateur de la fonction de transfert). $Y(p)$, la transformée de Laplace de $y(t)$, s'exprime en fonction de $Y_c(p)$ et $D(p)$ de la façon suivante:

$$Y(p) = G(p)(U(p) + D(p))$$

$$Y(p) = KG(p)(Y_c(p) - Y(p)) + G(p)D(p)$$

$$Y(p)(1 + KG(p)) = KG(p)Y_c(p) + G(p)D(p)$$

$$Y(p) = \frac{KG(p)}{1+KG(p)} Y_c(p) + \frac{G(p)}{1+KG(p)} D(p)$$

$$Y(p) = \frac{K}{p^2+K} Y_c(p) + \frac{1}{p^2+K} D(p)$$

De cette expression, on tire le polynôme caractéristique dont les racines sont $\pm j\sqrt{K}$. Les deux pôles sont imaginaires purs, donc le système est en limite de stabilité et présente un comportement oscillatoire en régime transitoire (d'autant plus oscillatoire que K est élevé).

On retrouve le même résultat en traçant le lieu d'Evans sous MATLAB : `rlocus(g)`.
3. La représentation d'état du procédé donnée en **1.** est utilisée pour déterminer celle du système en boucle fermée sachant que u est remplacé par $K(y_c - y)$:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \dot{x} & = & A_c x & + & B_c(u+d) \\ y & = & Cx & & \\ u & = & K(y_c - y) & & \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllllll} \dot{x} & = & (A_c - B_c K C)x & + & B_c K y_c & + & B_c d \\ y & = & Cx & & & & \end{array} \right.$$

ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{bmatrix} x & + & \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} y_c & + & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d \\ y & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x & & & & \end{array} \right.$$

Ici le système admet plusieurs entrées (d et y_c) dont les actions sur le système ne sont pas identiques.
Le logiciel MATLAB ne manipule pas les équations symboliques. C'est pourquoi ce modèle dépendant d'un élément non choisi K n'est pas possible à obtenir. Pour un choix de valeur de K le modèle peut être obtenu, la démarche est légèrement complexe, nous ne la détaillons pas ici.
4. $G(z)$, la transformée en z du procédé (précédé du bloqueur d'ordre zéro) échantillonné est donnée par la formule suivante :

$$G(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right]$$

ce qui, après simplification, compte tenu de la valeur de $T = 2s$, donne :

$$G(z) = \frac{2(z+1)}{(z-1)^2}$$

Une représentation d'état possible du procédé qui conserve la notion de position et vitesse sur les composantes de l'état est obtenue par les formules :

$$A_d = e^{A_c T} \ , \ B_d = \int_0^T e^{A_c \alpha} B d\alpha \ , \ C_d = C_c \ , \ D_d = D_c$$

Les calculs de ces matrices a été vu en cours. On trouve :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} (u_k + d_k) \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k \end{cases}$$

Soit pour $T = 2s$:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} (u_k + d_k) \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k \end{cases}$$

Le premier état de ce modèle (x_{1_k}) correspond à la position du véhicule échantillonnée à $T = 2s$ et le deuxième état (x_{2_k}) correspond à la vitesse.

Le résultat se retrouve en utilisant le logiciel MATLAB et la fonction "continuous to discrete":

`gd=c2d(g,2,'zoh')` : si `g` est un modèle dans l'espace d'état alors `gd` également. Même comportement avec les fonctions de transfert. `2` est la période d'échantillonage. `'zoh'` indique que le système est précédé d'un bloqueur d'ordre zéro.

5. On peut déterminer $Y(z)$, la transformée en z de y_k, en fonction de $Y_c(z)$ et $D(z)$:

$$Y(z) = G(z)(U(z) + D(z))$$

$$Y(z) = KG(z)(Y_c(z) - Y(z)) + G(z)D(z)$$

$$Y(z)(1 + KG(z)) = KG(z)Y_c(z) + G(z)D(z)$$

$$Y(z) = \frac{KG(z)}{1+KG(z)} Y_c(z) + \frac{G(z)}{1+KG(z)} D(z)$$

$$Y(z) = \frac{2K(z+1)Y_c(z) + 2(z+1)D(z)}{z^2 + 2(K-1)z + (2K+1)}$$

Ce résultat se retrouve également en utilisant les équations récurrentes. Celle du système en boucle ouverte s'écrit facilement, en utilisant les coefficients du numérateur et du dénominateur de $G(z)$:

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 2u_{k+1} + 2d_{k+1} + 2u_k + 2d_k$$

En reportant l'équation du bouclage $u_k = K(y_{c_k} - y_k)$ dans l'équation précédente, on obtient l'équation récurrente en boucle fermée :

$$y_{k+2} + 2(K-1)y_{k+1} + (2K+1)y_k = 2K(y_{c_{k+1}} + y_{c_k}) + 2(d_{k+1} + d_k)$$

ce qui permet de retrouver immédiatement l'expression de $Y(z)$.

La représentation d'état du système échantillonné bouclé est déterminée en reportant l'équation de bouclage $u_k = K(y_{c_k} - y_k) = Ky_{c_k} - KCx_k$ dans l'équation d'état du système échantillonné en boucle ouverte. On trouve :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1-2K & 2 \\ -2K & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 2K \\ 2K \end{bmatrix} y_{c_k} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} d_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k \end{cases}$$

Autre solution : pour une valeur de K donnée fixée le calcul de la boucle fermée peut se faire à l'aide de MATLAB. (voir question **3.**)

La stabilité des systèmes linéaires à temps discret est équivalente à l'appartenance des pôles au disque unité. Une façon d'étudier la stabilité de la boucle fermée est de tracer le lieu d'Evans du système discret $G(z)$ et étudier pour quelles valeurs de K les pôles appartiennent au disque unité. Le logiciel MATLAB permet cette opération:

```
>>rlocus(gd);
>>zgrid;
```

Au résultat on observe que le système bouclé n'est pas stabilisable par une rétroaction telle que $K \geq 0$.

6. Le système continu bouclé de la figure 1 admet comme fonction de transfert (on considère que la perturbation est nulle) :

$$H(p) = \frac{K}{p^2 + K}$$

La transformée en z du procédé (précédé d'un bloqueur d'ordre zéro) échantillonné est :

$$H(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{H(p)}{p}\right]$$

ce qui pour l'échantillonnage considéré ($T = 2s$) conduit à:

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+K}\right]$$

$$= \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z(z - \cos(2T\sqrt{K}))}{z^2 - 2z\cos(T\sqrt{K}) + 1} \right)$$

En utilisant le logiciel MATLAB $H(z)$ est obtenue à la donnée de K fixé et de $G(p)$:

```
>>h=feedback(g*K,1);
>>hd=c2d(h,2,'zoh');
```

On remarque en faisant

```
>>pzmap(hd);zgrid;
```

que les pôles de $H(z)$ sont tous situés sur le cercle unité. La discrétisation de $H(p)$ dont les pôles sont sur l'axe imaginaire (limite de stabilité en continu) renvoie un système dont les pôles sont sur le cercle unité (limite de stabilité en discret).

Exercice 2

1. De manière immédiate, en utilisant les coefficients de l'équation récurrente, on trouve :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

2. On peut facilement donner trois représentations d'état de ce système discret.

2.1. Forme canonique de commande avec matrice d'évolution "compagne horizontale"

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k \end{cases}$$

2.2. Forme canonique d'observation avec matrice d'évolution "compagne verticale"

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k \end{cases}$$

2.3. Forme diagonale

Il faut d'abord extraire les pôles du système (c'est-à-dire les racines du dénominateur de la fonction de transfert) et écrire la décomposition en éléments simples de $G(z)$:

$$z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

On en déduit une réalisation où la matrice d'état est diagonale :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_k \end{cases}$$

3. On calcule la réponse de ce système de trois manières, à partir de l'équation récurrente puis de la fonction de transfert et enfin de la représentation d'état.

3.1. Application directe de l'équation récurrente

Celle-ci implique :

$$y_{k+2} = u_k + 3y_{k+1} - 2y_k$$

Sachant que $u_k = 1 \forall k \geq 0$ et que $u_k = 0 \forall k < 0$, pour les échantillons correspondant à $k \in \{-2;-1;0;1;2;3\}$, on trouve respectivement :

$$y_0 = 0; y_1 = 0; y_2 = 1; y_3 = 4; y_4 = 11; y_5 = 26$$

S'il est difficile d'affirmer directement que y_k s'exprime explicitement en fonction k, quel que soit $k \geq 0$, on peut néanmoins supposer, à la vue des premières valeurs, que :

$$y_k = -(k+1) + 2^k \forall k \geq 0$$

On peut démontrer cette affirmation par récurrence. On suppose que la propriété est vraie aux rangs k et $k+1$. on a alors pou tout $K \geq 0$:

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 3y_{k+1} - 2y_k + u_k \\ y_{k+2} &= 3(2^{k+1} - (k+2)) - 2(2^k - (k+1)) + 1 \\ y_{k+2} &= (2+1)2^{k+1} - 3k - 6 - 2^{k+1} + 2k + 2 + 1 \\ y_{k+2} &= 2^{k+2} + 2^{k+1} - 2^{k+1} + 2k - 3k - 6 + 2 + 1 \\ y_{k+2} &= 2^{k+2} - (k+3) \end{aligned}$$

Ce raisonnement est valable $\forall k \geq 0$, c'est-à-dire $\forall u_k = 1$, donc la formule est valable $\forall k \geq 0$.

3.2. A partir de la fonction de transfert

On peut utiliser la fonction de transfert $G(z)$ décomposée en éléments simples pour donner l'expression de y_k, sachant que :

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

La décomposition en éléments simples de $Y(z)/z$ permet de déduire une expression de $Y(z)$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{-z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

Cette expression de $Y(z)$ est favorable à l'utilisation de la transformée inverse de la transformée en z et de ses propriétés (cf tableau, page 93 du poly). On obtient :

$$y_k = -(k+1) + 2^k$$

Pour les valeurs de $k = 0, \ldots, 4$, on retrouve les mêmes valeurs de y_k et surtout, la supposition du §3.2 est vérifiée comme elle le sera à nouveau dans le §3.3

3.3. A partir de l'équation d'état

On peut se contenter, en utilisant les valeurs successives de u_k, de calculer pour chaque k, la valeur de x_{k+1} et d'en déduire celle de y_{k+1}. Cependant, on peut aussi exprimer y_k directement en fonction de k car :

$$\begin{cases} x_k &= A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B u_j \\ y_k &= C x_k \end{cases}$$

Application numérique à partir de la forme diagonale avec $x_0 = 0$:

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 1^{k-1-j} & 0 \\ 0 & 2^{k-1-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_j \right\}$$

Pour $u_j = 1 \forall j \geq 0$, on a :

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sum_{j=0}^{k-1}(1^{k-1-j}) \\ \sum_{j=0}^{k-1}(2^{k-1-j}) \end{bmatrix}$$

Comme $\sum_{j=0}^{k-1}(1^{k-1-j})$ est une somme de k termes tous égaux à 1 et par un changement d'ordre de comptage sur la somme des 2^{k-1-j}, on a :

$$y_k = -k + \sum_{j=0}^{k-1} 2^j$$

Le terme de droite représente la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2, donc on en déduit :

$$y_k = -k + \frac{2^k - 1}{2-1} = 2^k - 1 - k$$

3.3. Résolution partielle avec MATLAB

On commence par définir le système discret avec par exemple une période $T = 0.5s$:

```
>>G=tf(1,[1 -3 2],1);
```

puis on utilise la fonction `step` :

```
>> y=step(G,0:0.5:5)

y =
           0
           0
           1
           4
          11
          26
          57
         120
         247
         502
        1013
```

Ici l'argument `0:0.5:5` désigne un vecteur dont les éléments vont de 0 à 5 et échelonnés tous les 0.5. On obtient ainsi les 11 premières valeurs de la sortie y.