INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Travaux Dirigés d'Automatique $n^o 1$

Corrigé

Septembre 2003

Exercice 1

1. Les pôles du système (racines du dénominateur de la fonction de transfert) sont:

$$p_i = 0 \pm j\pi$$

Ce qui correspond à un coefficient d'amortissement nul ($Re(p_i) = 0 = -\zeta\omega_n$) et à une pulsation propre égale à π ($|Im(p_i)| = \pi = \omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$). La réponse du système à une entrée indicielle (échelon) est donc un signal sinusoïdal non amorti de période $2\pi/\pi = 2s$:

$$y(t) = a + A\sin(\pi t + \phi)$$

2. La définition des différents modèles sous MATLAB se fait comme suit:

```
>> Fc = tf(1,[1,0 pi^2])
Transfer function:
    1
----------
s^2 + 9.87

>> Fd01 = c2d(Fc,0.01,'zoh')
Transfer function:
 5e-05 z + 5e-05
-----------------
z^2 - 1.999 z + 1
Sampling time: 0.01

>> Fd15 = c2d(Fc,0.15,'zoh')
Transfer function:
0.01104 z + 0.01104
-------------------
 z^2 - 1.782 z + 1
Sampling time: 0.15
```

Ainsi de suite pour les autres modlèles. Les réponses indicielles de ces différents systèmes sont obtenues en appliquant la commande `step(F..)`. Les réponses sont tracées (avec la réponse du système continu sur la figure 1.

Pour $T_s = 0.01s$, l'échantillonnage est faible devant la périodicité du signal, l'effet de la discrétisation n'est pas visible. Pour $T_s = 2s$ la discrétisation est réglée sur la période d'oscillation et peut donner la fausse impression que le système ne fait qu'annuler les signaux. $Ts = 1s$ est la période d'échantillonnage la plus grande admissible par le théorème de Shannon. Elle conserve l'information sur la période du signal de départ.

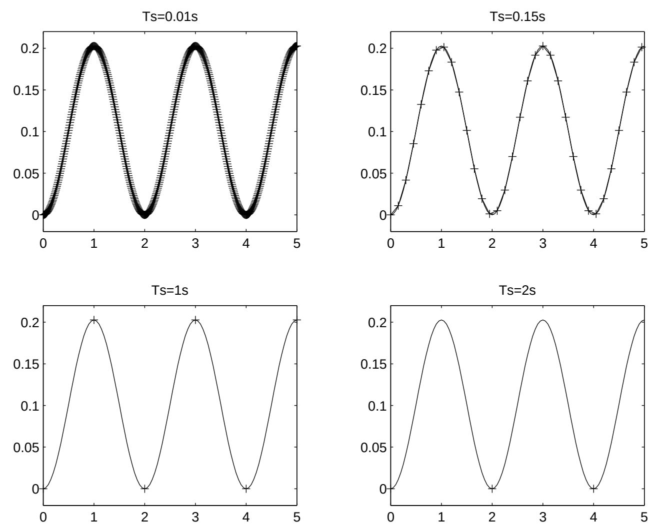

Figure 1: Réponses des systèmes échantillonnés

Exercice 2

1. Dans une première étape on commence par définir le système étudié dans l'environnement MATLAB. Plusieurs possibilités sont envisageables, ici on choisi de n'effectuer aucun calcul littéral. On commence par définir le premier système ("système amont" situé avant les perturbation):

```
>> f1=tf(1,[1 2])
Transfer function
  1
-----
s + 2
```

Puis on définit le second système `f2=tf(1,[1 1 2])` et enfin le système complet est donné par `f=f2*f1`. Le lieu d'Evans est tracé avec la commande `rlocus(f)` et il est représenté sur la figure 2.

En regardant ce lieu, on s'aperçoit qu'à partir d'une certaine valeur K_{lim} les deux pôles imaginaires du système bouclé deviennent instables. On peut en "cliquant" sur la courbe récupérer

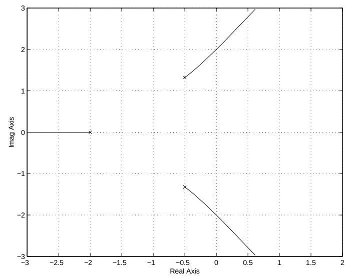

Figure 2: Lieu d'Evans du système

une valeur approximative : $K_{lim} \simeq 8$. On peut vérifier que cette valeur est correcte en construisant la boucle fermée et en calculant les pôles:

```
>> g=feedback(8*f,1);
>> pole(g)
ans =

  -3.0000
  -0.0000 + 2.0000i
  -0.0000 - 2.0000i
```

2. Les simulations pour $T_s = 0.01s$ ne montrent pas de différence avec ce qui est attendu au vu de l'analyse du système continu. Instabilité pour $K > K_{lim}$, convergence vers un point d'équilibre pour $K < K_{lim}$. Dans tous les cas le système est oscillant car deux pôles sont complexes.
3. L'échantillonnage se fait à une période relativement faible au regard de la réponse oscillante du signal et modifie fortement les conditions de stabilité du système évaluées sur le système continu. On en déduit que l'échantillonnage a une forte influence sur le comportement dynamique du système bouclé. Les limites de stabilité et les temps de réponse dépendent de la valeur de T_s. Sur la figure 3, est représentée la sortie continue du système pour $K = 3$ et $T_s = 0.01s,\ 0.5s,\ 1s$.

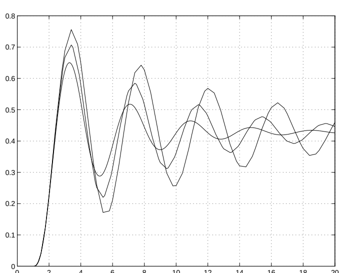

Figure 3: $K = 3$ et diverses périodes T_s

4. On a simulé des réponses en envisageant une consigne en échelon d'amplitude 1 survenant à $t = 1s$ et une perturbation de type échelon survenant à l'instant $t = 20s$ et d'amplitude $0.1,\ 0.3,\ -0.2$. Les réponses du système sont données sur la figure 4.
On constate que le système ne rejoint aucunement la consigne et la réponse dépend fortement de la perturbation. Ceci traduit que le gain statique du système bouclé n'est pas unitaire et on ne trouve pas d'integrateur situé en amont de la perturbation dans la chaîne d'action. L'erreur du système en réponse à un échelon est finie et l'erreur est infinie en réponse à des signaux d'ordre supérieurs (voir cours de 3ème année).

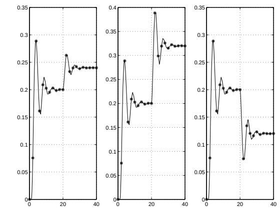

Figure 4: $K = 1$ et $T_s = 2$: réponses avec perturbations

5. D'après la théorie des système continus, pour améliorer la précision du système il suffit de placer un intégrateur dans la chaîne d'action du système. Ici on suppose que la rétroaction est entièrement réalisée par des moyens numériques. L'entrée de la fonction de transfert $1/(p+2)$ est commandée par un convertisseur numérique/analogique traitant les données issues d'un calculateur. Il est donc plus aisé d'envisager un intégrateur numérique. Les simulations avec SIMULINK montrent que l'effet correctif en précision de l'intégrateur est obtenu comme pour le cas des systèmes continus. Par contre pour différents choix de discrétisation de l'intégrateur (différents modèles mathématiques d'intégrateurs discrets) les réponses ne sont pas identiques (voir figure 5).

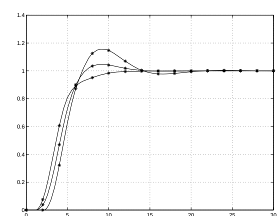

Figure 5: réponses avec perturbations et intégrateurs