INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Examen d'Automatique - Commande Numérique des Procédés

Corrigé

Documents et calculatrice autorisés.
Sujet volontairement long (3 problèmes) pour couvrir plusieurs aspects du cours (barème ≥ 20).
Quasiment toutes les questions peuvent être traitées séparément les unes des autres.
On trouve une annexe avec quelques résultats numériques utiles.

4 Janvier 2005

Premier problème

Soit le système mécanique donné par l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t)$$

où $u(t)$ est une force qui commande le système. On dispose pour ce système d'un capteur de position $y(t) = x(t)$.

1 - Donner une représentation d'état du système en faisant le choix de

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

comme vecteur d'état.

Réponse :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X \end{cases}$$

2 - On souhaite commander le système à l'aide d'un calculateur. Donner la représentation d'état du système échantillonné (convertisseur numérique-analogique modélisé par un bloqueur d'ordre zéro) à la période T.

Réponse : On applique les formules d'échantillonnage pour les modèles dans l'espace d'état et en utilisant le calcul de l'exponentielle donnée en annexe on trouve :

$$\begin{cases} X_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} 1-\cos(T) \\ \sin(T) \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X_k \end{cases}$$

3 - Choisir une période d'échantillonnage parmi les trois suivantes :

$$T_1 = \pi/4 \ s \quad , \quad T_2 = \pi/2 \ s \quad , \quad T_3 = \pi \ s$$

et garder cette valeur pour la suite de la première partie.

Donner la fonction de transfert du système échantillonné. Le système est-il stable ?

Réponse : En utilisant la formule $C(zI - A)^{-1}B$ et le calcul de l'inversion matricielle donnée en annexe (avec $a = cos(T)$ et $b = sin(T)$) on trouve :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(1-\cos(T))(z+1)}{z^2 - 2\cos(T)z + 1} \quad , \quad \textit{pôles:} \cos(T) \pm j\sin(T)$$

Si on prend T_1 pour avoir la période d'échantillonnage la plus courte, les pôles sont $\sqrt{2}/2(1 \pm j)$ ce qui caractérise un mode oscillant juste stable car le module des pôles est 1.

Si on prend T_2 en respectant au plus juste les critères du théorème de Shannon et en limitant la cadence de numérisation, les pôles sont $\pm j$ ce qui caractérise un mode oscillant juste stable car le module des pôles est 1.

Pour un choix de T_3, pour se simplifier les calculs, les pôles sont -1 et -1 et la fonction de transfert devient $\frac{2}{z+1}$. Le système est juste stable. La simplification zéros/pôles implique une perte de commandabilité ou d'observabilité.

4 - On envisage une commande proportionnelle en boucle fermée de la forme

$$u_k = k_p(y_{ck} - y_k)$$

où y_{ck} est un signal de consigne. Caractériser les valeurs de k_p pour lesquelles le système de boucle fermée est stable.

Réponse : La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{k_p(1-\cos(T))(z+1))}{z^2 - (k_p - (2+k_p)\cos(T))z + 1 + k_p(1-\cos(T))}$$

Le critère de Jury appliqué au polynôme caractéristique de ce système, donne:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= (2 + 2k_p)(1 - \cos(T)) > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 &= 2(1 + \cos(T)) > 0 \\ |a_2| - a_0 &= -k_p(1 - \cos(T)) > 0 \end{aligned}$$

Les pôles sont de module strictement plus petit que 1 si et seulement si $-1 < k_p < 0$ et $T \neq 0$ $[\pi]$.

Pour les périodes d'échantillonnage $T_1 = \pi/4$ et $T_2 = \pi/2$, le système est stabilisable, il y a suffisamment d'échantillons pour réguler la dynamique du système. Pour $T_3 = \pi$ les pôles sont de modules égaux à un dans l'intervalle $-1 < k_p < 0$ et de module plus grand que 1 ailleurs. Le système n'est pas asymptotiquement stabilisable par cette loi de commande.

5 - On prend $k_p = -1$, en considérant que les conditions initiales sont nulles, calculer les quatre premiers échantillons de la réponse impultionnelle de la boucle fermée.

Réponse : Pour un gain de retour proportionnel $k_p = -1$, le système en boucle fermée devient

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{(\cos(T)-1)(z+1))}{(z+1)(z+cos(T))}$$

En simplifiant le pôle -1 qui est juste stable on a la relation récurrente :

$$y_{k+1} = -cos(T)y_k + (cos(T)-1)y_{ck}$$

et donc pour les différents choix de période d'échantillonnage en prenant $y_{c0} = 1$ puis $y_{ck} = 0$ pour tout $k \neq 0$:

	T_1	T_2	T_3
y_1	$\frac{\sqrt{2}-2}{2}$	-1	-2
y_2	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	0	-2
y_3	$\frac{\sqrt{2}-2}{4}$	0	-2
y_4	$\frac{\sqrt{2}-1}{4}$	0	-2

Second problème

Soit le système

$$G(p) \quad : \quad \begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X \end{cases}$$

On place un second système en série tel que

$$Q(p) = \frac{1}{p} Y(p)$$

6 - Montrer que le système obtenu admet la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{X}_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} X_a + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_a \end{cases}$$

Réponse : Il faut prendre le vecteur d'état :

$$X_a = \begin{pmatrix} q \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

7 - Calculer un correcteur par retour d'état

$$u = -KX_a$$

pour ce système, qui place les pôles en -1, -2 et -3.

Réponse :

$$P_A(p) = p^3 + p \quad , \quad P_{A-BK}(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6$$

Ce qui donne, car nous sommes dans la base compagne de commande :

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

8 - En adoptant la notation suivante

$$K = \begin{bmatrix} k_q & k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

pour le gain de retour d'état, choisir parmi les trois schémas suivants lequel permet une régulation du système $G(p)$ qui assure des pôles en boucle fermée égaux à -1, -2 et -3 ainsi qu'une précision entrée-sortie pour des signaux indiciels.

Figure 1:

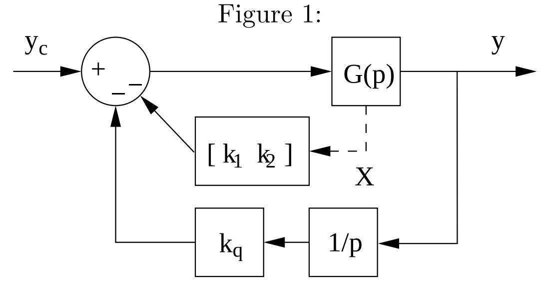


Figure 2:

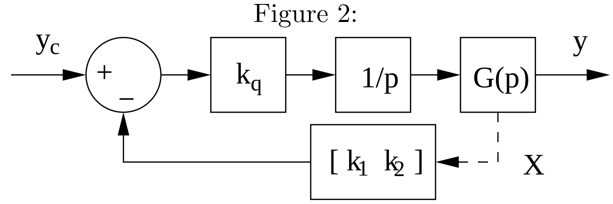
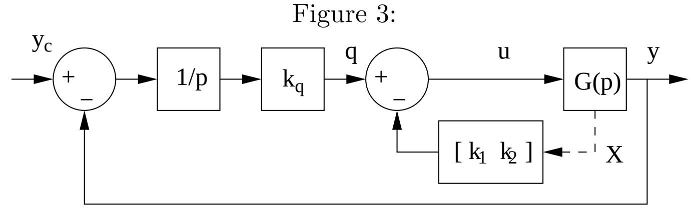


Figure 3:



Réponse : Seuls les schémas 1 et 3 permettent le placement de pôles souhaité. Le schéma de la figure 3 assure une intégration dans la chaîne d'action du système *(intégrale de l'erreur entre la consigue y_c et la sortie y) il permet donc la précision du système bouclé.*

9 - On souhaite réaliser la régulation du schéma de la figure 3 à l'aide de calculateurs numériques :

$$U(z) = F(z)(Y_c(z) - Y(z)) - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} X(z)$$

où $X(z)$ et $Y(z)$ sont respectivement l'état et la sortie du système $G(p)$ échantillonné à la cadence $T = \pi/4s$ (convertisseur numérique-analogique modélisé par un bloqueur d'ordre zéro).

Par un choix de méthode de discrétisation, donner une fonction de transfert $F(z)$ qui permet l'approximation numérique de la loi de commande du schéma de la figure 3.

Réponse : $F(z)$ est la discrétisation de l'opérateur k_q/p ce qui donne respectivement par les méthodes de discrétisation avant, arrière, Tustin :

$$\frac{Tk_q}{z-1} \quad , \quad \frac{Tk_q z}{z-1} \quad , \quad \frac{Tk_q(z+1)}{2(z-1)}$$

10 - Donner une représentation d'état pour la fonction de transfert $Q(z) = F(z)(Y_c(z) - Y(z))$ sous la forme :

$$\begin{cases} v_{k+1} = A_q v_k + B_q(y_{ck} - y_k) \\ q_k = C_q v_k + D_q(y_{ck} - y_k) \end{cases}$$

Réponse : Les opérateurs $F(z)$ obtenus par discrétisation s'écrivent respectivement :

$$\frac{Tk_q}{z-1} \quad , \quad \frac{Tk_q}{z-1} + Tk_q \quad , \quad \frac{Tk_q}{z-1} + Tk_q/2$$

On pose dans chaque cas

$$V(z) = \frac{1}{z-1}(Y_c(z) - Y(z))$$

ce qui donne les représentations d'état suivantes de l'opérateur $F(z)$ (pour chaque discrétisation respectivement) :

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k + y_{ck} - y_k \\ q_k = Tk_q v_k \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} v_{k+1} = v_k + y_{ck} - y_k \\ q_k = Tk_q(v_k + y_{ck} - y_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k + y_{ck} - y_k \\ q_k = Tk_q(v_k + 1/2 y_{ck} - 1/2 y_k) \end{cases}$$

C'est à dire dans tous les cas $A_q = 1$, $B_q = 1$, $C_q = Tk_q = 3\pi/2$ et respectivement pour les trois discrétisations :

$$D_q = 0 \quad , \quad D_q = 3\pi/2 \quad , \quad D_q = 3\pi/4$$

11 - La représentation d'état du système $G(p)$ échantillonné est telle que :

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + Bu_k \\ y_k = CX_k \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'état X_k n'étant pas mesuré, proposer un observateur dynamique pour ce système avec des dynamiques les plus rapides possibles. On note H la matrice de gain de l'observateur.

Réponse : Le modèle d'état est cohérent avec ce qui a déjà été fait dans la question 2. On recherche un observateur de la forme :

$$\hat{X}_{k+1} = (A - HC)\hat{X}_k + Bu_k + Hy_k$$

Pour le calcul de H on procède par étapes. Premièrement le polynôme caractéristique du système à observer :

$$P_A(z) = z^2 - \sqrt{2}z + 1$$

Deuxièmement, le polynôme caractéristique souhaité pour l'observateur (pôles à zéro pour avoir une réponse pile en au maximum deux échantillons) :

$$P_{A-HC}(z) = z^2$$

Troisièmement, le gain de l'observateur dans la base compagne d'observation :

$$\breve{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Quatrièmement le calcul de la matrice de changement de base vis à vis de la base compagne d'observation :

$$M_o = \begin{bmatrix} CA + a_1 C \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cinquièmement, le calcul du gain de l'observateur :

$$H = M_o^{-1}\breve{H} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

où M_o^{-1} est donnée en annexe.

12- On note $\hat{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$. Donner en fonction des matrices A, B, C, H, k_q, $\hat{K}$, A_q, B_q, C_q et D_q une représentation d'état littérale du correcteur numérique qui calcul u_k en fonction de y_{ck} et y_k, obtenu à l'issue des différentes étapes (questions 6, 7, 8, 9, 11).

Réponse : La commande sur le système s'écrit $u_k = q_k - \hat{K}\hat{X}_k$ où l'on a remplacé la valeur non mesurée de l'état X_k par la valeur reconstruite par l'observateur $\hat{X}_k$. On pose le vecteur d'état du correcteur

$$X_k^c = \begin{pmatrix} v_k \\ \hat{X}_k \end{pmatrix}$$

ce qui donne après quelques manipulations le correcteur suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} X^c_{k+1} = A^c X^c_k + B^c_1 y_{ck} + B^c_2 y_k \\ u_k = C^c X^c_k + D_q y_{ck} - D_q y_k \end{array} \right.$$

avec les matrices

$$A^c = \left[\begin{array}{c|c} A_q & 0 \\ \hline BC_q & A - HC - B\hat{K} \end{array} \right]$$

$$B^c_1 = \left[\begin{array}{c} B_q \\ BD_q \end{array} \right] \quad , \quad B^c_1 = \left[\begin{array}{c} -B_q \\ H - BD_q \end{array} \right]$$

$$C^c = \left[\begin{array}{c|c} C_q & -\hat{K} \end{array} \right]$$

L'application numérique donne

$$A^c = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ (2-\sqrt{2})\frac{3\pi}{4} & 9\frac{\sqrt{2}}{2} - 10 & 7\frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \\ \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} & -11\frac{\sqrt{2}}{2} & -5\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right]$$

$$B^c_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ (1-\frac{\sqrt{2}}{2})D_h \\ \frac{\sqrt{2}}{2}D_h \end{array} \right] \quad , \quad B^c_2 = \left[\begin{array}{c} -1 \\ \sqrt{2} - (1-\frac{\sqrt{2}}{2})D_h \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}D_h \end{array} \right]$$

$$C^c = \left[\begin{array}{ccc} \frac{3\pi}{2} & -10 & -6 \end{array} \right]$$

On remarque que les pôles de ce correcteur sont (valeurs propres de A^c) :

$$-0.73 \quad , \quad -6.44 \quad , \quad 1$$

Le pôle en 1 est celui de l'intégrateur, les deux autres correspondent à la combinaison observateur + retour d'état et n'ont pas de raison d'être stables. Par contre, ce devrait être le cas de la boucle fermée. Si on boucle ce correcteur avec le système $G(z)$ on trouve une représentation d'état dont la matrice des dynamiques s'écrit :

$$\left[\begin{array}{cc} A - BD_qC & BC^c \\ B^c_2 C & A^c \end{array} \right]$$

et les pôles de la boucle fermée sont par exemple pour le cas de discrétisation avant :

$$-5.6420 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0.44 \pm j0.32$$

Les pôles nuls sont ceux imposés à l'observateur, parmi les autres l'un n'est pas stable. La discrétisation du correcteur de la figure 3, n'a pas donné les résultats escomptés. Il faut dire que la discrétistion d'un retour d'état était une idée saugrenue qui n'a pas de raison de donner des résultats à moins que la période d'échantillonnage soit vraiment faible. Si maintenant on refait tous les calculs avec $T = 0.1s$, alors on trouve pour la boucle fermée les pôles suivants :

$$0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0.8993 \quad , \quad 0.8572 \quad , \quad 0.5830$$

qui sont quasiment exactement les deux pôles nuls de l'observateur et les trois pôles imposés par le retour d'état $e^{-T} = 0.9048$, $e^{-2T} = 0.8187$, $e^{-3T} = 0.7408$.

Troisième problème

Soit le système

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

13 - Calculer la fonction de transfert de ce système échantillonné à la période T (convertisseur numérique-analogique modélisé par un bloqueur d'ordre zéro).

Réponse : On applique les formules d'échantillonnage pour les fonctions de transfert pour obtennir :

$$\begin{array}{rcl} G(z) & = & \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right] \\ & = & \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right] \\ & = & \frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z(z-cos(T))}{z^2 - 2\cos(T)z + 1}\right] \\ & = & \frac{(1-\cos(T))(z+1)}{z^2 - 2\cos(T)z + 1} \end{array}$$

C'est d'ailleurs ce que nous avions déjà calculé dans la question 3.

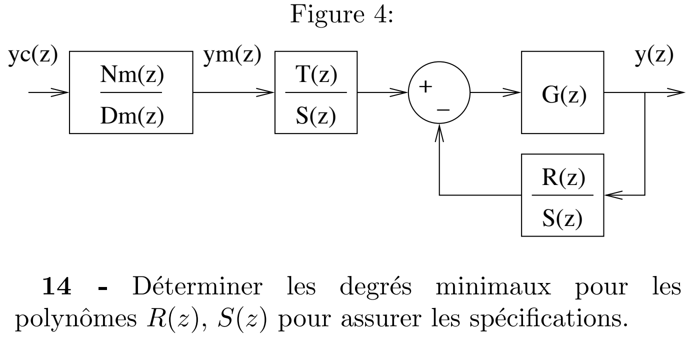
Et choisir en première approximation pour $T = 1s$ la fonction de transfert suivante :

$$\frac{0.5z + 0.5}{z^2 - 1.1z + 1}$$

Réponse : C'est le résultat si on arrondi tous les coefficients à 1 chiffre derrière la virgule.

On souhaite calculer un correcteur sous forme R.S.T. comme indiqué sur la figure 4 qui assure les spécifications suivantes :
- Rejet de perturbations du type échelon en entrée du système.
- Dynamique de régulation de constante de temps $\tau_r = 1/ln(2)\ s$
- Dynamique de poursuite de constante de temps $\tau_p = 10s$ légèrement oscillante avec un amortissement $\zeta_p = 0.7$.

Figure 4:



14 - Déterminer les degrés minimaux pour les polynômes $R(z)$, $S(z)$ pour assurer les spécifications.

Réponse : De façon à assurer la précision en présence de perturbations du type échelon, on place un intégrateur dans le régulateur ce qui revient à imposer $S(z) =$

$S_1(z)(z-1)^q$ avec $q=1$. *La boucle de régulation doit avoir une dynamique convergente de constante de temps* τ_r *ce qui conduit à imposer un pôle dominant réel* $e^{-T/\tau_r}=0.5$. *Le polynôme caractéristique de la boucle fermée se factorise sous la forme* $P(z)=P_{dom}(z)P_{aux}(z)=(z-0.5)P_{aux}(z)$ *où les racines de* P_{aux} *sont de module très inférieur à* 0.5. *D'après les formules vues en cours, le degré minimal pour* $R(z)$ *est* 2, *il est de* 1 *pour* $S_1(z)$ *:*

$$R(z)=r_0+r_1z+r_2z^2 \quad , \quad S(z)=(s_0+s_1z)(z-1)$$

et le polynôme P_{aux} *doit être choisi de degré 3.*

15 - Calculer les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ qui assurent les spécifications en régulation.

Réponse : De façon classique on prend $P_{aux}(z)=z^3$, *les pôles auxiliaires sont infiniment rapides en comparaison du pôle dominant.* R *et* S *se déduisent de l'équation diophantine :*

$$\begin{aligned}(s_0+s_1z)(z-1)(z^2-1.1z+1)\\ +(r_0+r_1z+r_2z^2)(0.5z+0.5)\\ =(z-0.5)z^3\end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant ce qui est donné en annnexe la solution unique

$$R(z)=1.52-2.7z+1.68z^2 \quad , \quad S(z)=(0.76+z)(z-1)$$

16 - Choisir un polynôme $T(z)$ ainsi qu'un pré-filtre $\dfrac{N_m(z)}{D_m(z)}$ pour assurer les spécifications en poursuite.

Réponse : La fonction de transfert en poursuite s'écrit

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)}=\frac{N_m(z)T(z)(0.5z+0.5)}{D_m(z)z^3(z-0.5)}$$

$T(z)$ *est de degré au plus* 2 *(degré de* $S(z)$*), il est possible de choisir*

$$T(z)=z(z-0.5)$$

de façon à compenser les modes stables de la régulation pour qu'ils n'apparaissent pas sur le transfert de poursuite. Pour ajuster les modes du transfert de poursuite on choisit le polynôme $D_m(z)$. *Les modes à imposer sont tels que :*

$$z_{1,2}p=e^{-T/\tau_p\pm jT\omega_p}$$

avec $\omega_p=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ *et* $\zeta\omega_n=1/\tau_p$. *L'application numérique donne en première approximation*

$$z_{1,2}=0.9+0.09j$$

et

$$D_m(z)=(z-z_1)(z-z_2)=z^2-1.8z+0.82$$

Reste à choisir $N_m(z)$ *de degré inférieur ou égal à* $D_m(z)$ *pour que l'opérateur soir causal. Sans aucune spécification sur le gain statique on peut prendre par exemple* $N_m(z)=z^2$ *pour compenser tous les pôles sauf ceux imposés pour la poursuite. Si l'on souhaite également assurer un gain statique unitaire sur le transfert de poursuite il est aussi possible de prendre*

$$N_m(z)=0.02z^2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to 1}\frac{Y(z)}{Y_c(z)}=1$$

$\boxed{\textbf{ANNEXE}}$

$$\exp\begin{bmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}z-a & -b\\ b & z-a\end{bmatrix}^{-1} =\frac{1}{z^2-2az+a^2+b^2}\begin{bmatrix}z-a & b\\ -b & z-a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \sqrt{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0.5 & 0 & 0\\ 2.1 & -1 & 0.5 & 0.5 & 0\\ -2.1 & 2.1 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 1 & -2.1 & 0 & 0 & 0.5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-0.5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.76\\1.\\1.52\\-2.7\\1.68\end{pmatrix}$$