INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Examen d'Automatique - Commande Numérique des Procédés

Corrigé

13 Janvier 2004

1ère partie

1.a Le système se caractérise par trois équations différentielles du premier ordre. C'est un système d'ordre trois ($n = 3$) pour lequel on prend par exemple $x^T = (T\ v\ h)$ comme état. Seules les hélices sont employées donc le système n'a qu'une entée, w. La mesure est faite par le capteur d'altitude $y = h$. Il en résulte le modèle :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2f & 0 & 0 \\ f^2 & -f & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

On remarque d'après la forme triangulaire de la matrice que les pôles du système sont :

$$-2f \quad , \quad -f \quad , \quad 0$$

Le système est en limite de stabilité (tous les pôles stables, partie réelle négative, sauf un de partie réelle nulle).

1.b Considérons la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ f^2 & -f & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a toutes ses lignes indépendante. C'est donc une matrice d'ordre $n = 3$. D'après le critère de Kalman, le système est observable.

Considérons la matrice :

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -f & f^2 \\ 0 & 1 & -f \end{bmatrix}$$

Cette matricce a une ligne nulle et les deux autres indépendantes. C'est donc une matrice d'ordre $2 \neq n$. D'après le critère de Kalman le système n'est pas commandable. Les équations montrent d'ailleurs que l'évolution de la température ne peut aucunement être influencée par l'action sur les hélices.

1.c Pour $u = 0$ et en considérant les conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation de la température donne :

$$pT(p) = -2fT(p) \quad \Rightarrow \quad T(p) = 0$$

C'est à dire que pour des conditions initiales nulle, rien ne peut influencer la températue. On retrouve que cet état n'est pas commandable.

Sachant que $T(p) = 0$, la transformée de Laplace de l'évolution de la vitesse donne :

$$pv(p) = -fv(p) + w(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{v(p)}{w(p)} = \frac{1}{p+f}$$

La transformée de Laplace de l'équation de l'évolution de la hauteur s'écrit :

$$ph(p) = v(p) \quad \Rightarrow \quad \frac{h(p)}{v(p)} = \frac{1}{p}$$

La fonction de transfert du système est donc :

$$\frac{h(p)}{w(p)} = \frac{1}{p(p+f)}$$

1.d La fonction de transfert du système échantillonné est donnée par la formule suivante :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right]$$

On réalise la décomposition en éléments simples :

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{-1/f^2}{p} + \frac{1/f}{p^2} + \frac{1/f^2}{p+f}$$

D'après les tables de transformée on trouve donc :

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{-z/f^2}{z-1} + \frac{Tz/f}{(z-1)^2} + \frac{(1-e^{-Tf})/f}{z-e^{-Tf}}\right]$$

L'application numérique pour $T = 2$ et $f = \ln(\sqrt{2})$ conduit en première approximation la fonction de transfert de l'énoncé. On remarque que le dénomiteur est exact. Les pôles du système échantillonné sont exactement :

$$e^{-Tf} = e^{-2\ln(\sqrt{2})} = e^{\ln(1/2)} = 1/2 \quad , \quad e^0 = 1$$

L'un des deux pôles est stable (de module inférieur à 1) et l'autre est en limite de stabilité.

1.e Pour le retour proportionnel de la figure 3, la fonction de transfert de la boucle fermée s'écrit :

$$\frac{kG(z)}{1+kG(z)} = \frac{1.6kz + 1.3k}{z^2 + (1.6k - 1.5)z + (0.5 + 1.3k)}$$

D'après le critère de Jury ce système est stable si les trois inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{array}{lcl} (0.5+1.3k)+(1.6k-1.5)+1>0 & & k>0 \\ (0.5+1.3k)-(1.6k-1.5)+1>0 & \Rightarrow & k<10 \\ 1-(0.5+1.3k)>0 & & k<0.5/1.3 \end{array}$$

Le système est stabilisable par retour proportionnel si et seulement si $0<k<5/13$.

1.f On procède par approximation numérique à la cadente $T=2s$. Parmis les méthodes d'approximation du correcteur continu on peut envisager :
- l'approximation avant $K_1(z)=K(\frac{z-1}{T})=\frac{z+1}{z+3}$
- l'approximation arrière $K_2(z)=K(\frac{z-1}{Tz})=\frac{3z-1}{5z-3}$
- l'approximation Tustin $K_3(z)=K(\frac{2(z-1)}{T(z+1)})=\frac{2z}{3z+1}$

ou l'approximation pôles/zéros $K_4(z)=\frac{1-e^{-2T}}{1-e^{-T}}\frac{1}{2}\frac{z-e^{-T}}{z-e^{-2T}}$

1.g Pour le choix de correcteur $K_1(p)$, la boucle fermée est donnée par :

$$\frac{K(z)G(z)}{1+K(z)G(z)}=\frac{1.6z^2+2.9z+1.3}{z^3+3.1z^2-1.1z+2.8}$$

Si on applique le critère de Jury au polynôme dénominateur, on constate que le système bouclé est instable (l'une des inégalités est violée).

Si on fait de même pour $K_2(p)$ on obtient également un système bouclé instable. Pour le choix $K_3(p)$ la boucle fermée est stable.

1.h En considérant les pôles et les zéros de $K_3(z)G(z)$, le schéma 5 correspond au choix $kK_3(p)$. Le système est stabilisable pour des valeurs de k comprises entre 0 et une valeur limite (pour laquelle les pôles complexes intersectent le cercle unité). D'après la question précédente cette valeur limite est suppérieure à 1.

En considérant les pôles et les zéros de $K_2(z)G(z)$, le schéma 6 correspond au choix $kK_2(p)$. Le système est stabilisable pour des valeurs de k comprises entre 0 et une valeur limite (pour laquelle les pôles complexes intersectent le cercle unité). D'après la question précédente cette valeur limite est inférieure à 1.

En considérant les pôles et les zéros de $K_1(z)G(z)$, le schéma 7 correspond au choix $kK_1(p)$. Le système n'est pas stabilisable, pour toute valeur de k un pôle est hors du cercle unité.

2ème partie

2.a Il n'y a aucune spécification autre que les spécifications de dynamique de régulation et de poursuite. La seule restriction sur le régulateur porte sur les dénominateurs des polynômes dénominateurs pour le transfert correspondants.

On souhaite une régulation caractérisée par τ_1 et ω_p ce qui correspond au pôle d'un système à temps continu :

$$p_r=-\frac{1}{\tau_1}+j\omega_p$$

et pour un système discret cadencé à $T=2s$:

$$z_r=e^{-T/\tau_1}(\cos(T\omega_p)+j\sin(T\omega_p))=-1/2$$

Il faut donc imposer au moins un pôle à la boucle de régulation $z_r=-1/2$. D'après les équations vues en cours il suffit donc de choisir des polynômes R et S de degrés 1 :

$$R(z)=r_1z+r_0 \quad , \quad S(z)=s_1z+s_0$$

et il est nécessaire de choisir deux autres pôles pour la boucle de régulation. On prend ces pôles plus rapides que la dynamique de régulation souhaitée. Par exemple, on prend deux pôles nuls. Soit $N(z)$ le numérateur de $G(z)$ et $D(z)$ le dénominateur. L'équation diophantine de ce problème de régulation s'écrit :

$$S(z)D(z)+R(z)N(z)=(z-z_r)z^2$$

En identifiant les polynômes on trouve les valeurs de $R(z)$ et $S(z)$ données dans l'énoncé.

On a donc les fonctions de transfert suivantes :

$$\frac{y(z)}{q(z)}=\frac{S(z)N(z)}{(z-z_r)z^2} \quad , \quad \frac{y(z)}{y_m(z)}=\frac{T(z)N(z)}{(z-z_r)z^2}$$

La causalité impose que le polynôme $T(z)$ soit de degré au plus égal à 1. On choisit de compenser le mode de régulation $z-z_r$. D'où le choix de l'énoncé $T(z)=z-z_r=z+1/2$.

Le transfert de poursuite s'écrit :

$$\frac{y(z)}{y_c(z)}=\frac{N_m(z)N(z)}{D_{m(z)}z^2}$$

On souhaite une poursuite non oscillante de constante de temps τ_2. Pour cela on choisi le polynôme :

$$D_m(z)=z-e^{-T/\tau_2}=z-\frac{1}{10}$$

Le polynôme $N_m(z)$ peut être choisi librement de degré inférieur à celui de $D_m(z)$. On peut par exemple compenser un pôle nul du dénominateur. Si on veut un gain statique unitaire en poursuite on peut prendre :

$$N_m(z)=\frac{D_m(1)\cdot 1}{N(1)}z=\frac{9}{20}z$$

On trouve bien que le transfert de poursuite est de gain statique unitaire :

$$\frac{y(z\to 1)}{y_c(z\to 1)}=1$$

2.b Par construction du régulateur on a :

$$\frac{y(z)}{q(z)}=\frac{(z+\frac{5}{6})(z+1)}{(z+\frac{1}{2})z^2} \quad , \quad \frac{y(z)}{y_m(z)}=\frac{z+1}{z^2}$$

2.c Le choix de $T(z)$ et $S(z)$ implique :

$$(z+\frac{5}{6})q(z)=(z+\frac{1}{2})y_m(z)$$

En appliquant la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse et après manipulation des équtions on trouve l'algorithme :

$$q_k=-\frac{5}{6}q_{k-1}+y_{m_k}+\frac{1}{2}y_{m_{k-1}}$$

2.d Les conditions initiales ($k<0$) sont toutes nulles. Les premiers échantillons sont calculés par récurrence :

$$\begin{aligned} q_0 &= y_{m_0} = 1 \\ q_1 &= -\tfrac{5}{6}+1+\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3} = 0.667 \\ q_2 &= -\tfrac{5}{6}\tfrac{2}{3}+1+\tfrac{1}{2} = \tfrac{17}{18} = 0.944 \\ q_3 &= -\tfrac{5}{6}\tfrac{17}{18}+1+\tfrac{1}{2} = \tfrac{77}{108} = 0.713 \end{aligned}$$

La réponse est oscillante en accord avec le pôle $-\frac{1}{2}$.
Les sorties du système se calculent de même en utilisant l'équation récurrente :

$$y_k = y_{m_{k-1}} + y_{m_{k-2}}$$

ce qui donne :

$$y_0 = 0 \ , \ y_1 = 1 \ , \ y_2 = 2 \ , \ y_3 = 2$$

Ce transfert caractérisé par deux pôles nuls converge en deux échantillons vers sa valeur finale.

3ème partie

3.a De même que dans la première question mais en considérant uniquement l'entrée u on a la représentation d'état suivante et en prenant $f=1$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

3.b Par application de la transformée de Laplace aux différentes équations, on trouve la fonction de transfert :

$$\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{h(p)}{v(p)}\frac{v(p)}{T(p)}\frac{T(p)}{u(p)} = \frac{1}{p}\frac{f^2}{p+f}\frac{1}{p+2f} = \frac{1}{p^3+3p^2+2p}$$

On en déduit la représentation d'état dans la base compagne d'observation :

$$\dot{x}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_o$$

3.c Matrice de passage à la base compagne d'observation est donnée par $x_o = M_o x$ avec :

$$M_o = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} m_3 &= C \\ m_2 &= m_3 A + a_2 C \\ m_1 &= m_2 A + a_1 C \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On remarque que :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M_o = I$$

Donc on a bien la relation de l'énoncé.

3.d Le polynôme du système est donné par :

$$p^3+3p^2+2p$$

On souhaite imposer tous les pôles de l'observateur pour qu'ils soient non-oscillant de constante de temps $\tau = 1s$. On choisit donc le polynôme suivant pour l'observateur :

$$(p+1/\tau)^3 = p^3+3p^2+3p+1$$

Dans la base compagne d'observation le gain de l'observateur est donné par :

$$\breve{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans la base originale du système le gain s'ecrit :

$$H = M_o^{-1}\breve{H} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'observateur est caractérisé par les équations :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A-HC)\hat{x} + Bu + Hy \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$