INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Examen d'Automatique - Commande Numérique des Procédés

Corrigé

4 Février 2003

Exercice 1

1.a Echantillonnage.

Premièrement on calcule le système continu $H(p)$ obtenu par la rétroaction de $F(p)$ sur $G(p)$:

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{G(p)}{1+F(p)G(p)} \\ &= \frac{p(p+38.08)}{(p+1)(p+38.08)+p(p-21.16)} \\ &= \frac{p(p+38.08)}{2p^2+17.92p+38.08} \\ &= \frac{0.5p(p+38.08)}{p^2+8.96p+19.04} \end{aligned}$$

Le calcul de $H(z)$ se fait de la façon suivante:

$$H(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)H(p)] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{H(p)}{p}]$$

Pour faire ce calcul il est nécessaire de faire la décomposition en éléments simples de $H(p)/p$ et donc de déterminer les racines du polynôme $p^2+8.96p+19.04$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \sqrt{8.96^2-4*19.04} = 2.03 \\ p_1 &= \tfrac{1}{2}(-8.96-2.03) = -5.50 \\ p_2 &= \tfrac{1}{2}(-8.96+2.03) = -3.47 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \frac{H(p)}{p} &= \frac{0.5p+19.04}{(p+5.50)(p+3.47)} \\ &= \tfrac{0.5(-5.50)+19.04}{(-5.50+3.47)}\tfrac{1}{p+5.50} + \tfrac{0.5(-3.47)+19.04}{(-3.47+5.50)}\tfrac{1}{p+3.47} \\ &= \frac{-8.02}{p+5.50} + \frac{8.53}{p+3.47} \end{aligned}$$

L'opération d'échantillonnage à la période $T=0.2$ conduit à :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z-1}{z}\left[-8.02\frac{z}{z-e^{-T5.50}} + 8.53\frac{z}{z-e^{-T3.47}}\right] \\ &= \frac{z-1}{z}\left[-8.02\frac{z}{z-0.33} + 8.53\frac{z}{z-0.50}\right] \\ &= \frac{(z-1)(-8.02(z-0.50)+8.53(z-0.33))}{(z-0.33)(z-0.50)} \end{aligned}$$

En multipliant en haut et en bas par 6 on trouve donc en première approximation :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(z-1)(-24(2z-1)+17(3z-1))}{(3z-1)(2z-1)} \\ &= \frac{3z^2+4z-7}{6z^2-5z+1} \end{aligned}$$

1.b Réponse temporelle.

Les pôles de $H(p)$ sont $1/2=0.5$ et $1/3=0.33$. Ils sont de module strictement inférieur à l'unité, le système est donc asymptotiquement stable. La réponse à un échelon unitaire de $H(p)$ est donc convergente et converge vers le gain statique. Ce gain statique se calcule comme suit :

$$H(z=1) = \frac{3+4-7}{6-5+1} = 0$$

pour tout signal d'entrée du type échelon, le système $H(p)$ converge vers 0.

Le temps de convergence se caractérise par la constante de temps du mode le plus lent. Le mode le plus lent est donné par le pôle de module le plus grand, ici $1/2=0.5$. Sa constante de temps vérifie la relation suivante (analogie avec les systèmes continus) :

$$0.5 = e^{-T/\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = 0.29s$$

1.c Représentation d'état.

La représentation modale d'un système donné par sa fonction de transfert se déduit de la décomposition en éléments simple :

$$\begin{aligned} H(z)-\frac{1}{2} &= \frac{3z^2+4z-7-3z^2+2.5z-0.5}{6z^2-5z+1} \\ &= \frac{6.5z-7.5}{(2z-1)(3z-1)} \\ &= \frac{6.5/2-7.5}{(2z-1)(3/2-1)} + \frac{6.5/3-7.5}{(2/3-1)(3z-1)} \\ &= \frac{-8.5}{2z-1} + \frac{16}{3z-1} \end{aligned}$$

On définit, par exemple, les états suivants :

$$x_1(z) = \frac{-8.5}{2z-1} \qquad\qquad x_2(z) = \frac{16}{3z-1}$$
$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$
$$2x_{1_{k+1}} - x_{1_k} = -8.5u_k \qquad 3x_{1_{k+1}} - x_{1_k} = 16u_k$$

La sortie de mesure se d'éfinit comme suit :

$$\tilde{Y}(z) = (H(z) - \frac{1}{2})U(z) = Y(z) - \frac{1}{2}U(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

Ce qui conduit au modèle d'état :

$$\begin{aligned} X_{k+1} = & \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} -4.25 \\ 5.33 \end{bmatrix} u_k \\ \tilde{y}_k = & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} X_k \end{aligned}$$

On en déduit donc, sans modifier les équations de l'évolution de létat, que la sortie du système $H(z)$ suit la règle suivante :

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} X_k + \frac{1}{2} u_k$$

1.d Retour proportionnel.

Pour évaluer les retours proportionnels admissibles on commence par calculer le modèle bouclé global :

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{KH(z)}{1+KH(z)} \\ &= \frac{K(3z^2+4z-7)}{6z^2-5z+1+K(3z^2+4z-7)} \\ &= \frac{K(3z^2+4z-7)}{(6+3K)z^2+(4K-5)z+1-7K} = \frac{N(z)}{D(z)} \end{aligned}$$

Pour appliquer le critère de Routh, il est nécessaire de faire en premier lieu une transformation en w du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} &(1-w)^2 D(\tfrac{1+w}{1-w}) \\ &\quad = (6+3K)(1+w)^2 + (4K-5)(1-w)(1+w) \\ &\qquad + (1-7K)(1-w)^2 \\ &\quad = (12-8K)w^2 + (10+20K)w + 2 \end{aligned}$$

Le critère de Routh pour les polynômes du second degré se résume à tester si tous les coefficients du polynôme sont de même signe :

$$\begin{aligned} 12-8K > 0 &\Rightarrow K < 3/2 \\ 10+20K > 0 &\Rightarrow K > -1/2 \\ 2 > 0 &\Rightarrow \text{oui} \end{aligned}$$

Le système $M(z)$ est asymptotiquement stable si :

$$-1/2 < K < 3/2$$

Exercice 2

2.a Discrétisation.

Dès lors que $F(p)$ est un correcteur pour le système $G(p)$ de la figure 1 et à condition que la période d'échantillonnage soit suffisamment faible, on peut estimer que des versions discrètes de $F(p)$ obtenues par approximation seront appropriées pour le système $G(p)$ échantillonné. Les trois approximations vues en cours sont :

- Discrétisation avant ($p \simeq \frac{z-1}{T}$) qui donne :

$$F_1(z) = F(\frac{z-1}{T}) = \frac{z-1-0.2*21.16}{z-1+0.2*28.08} = \frac{z-5.23}{z+6.62}$$

- Discrétisation arrière ($p \simeq \frac{z-1}{Tz}$) qui donne :

$$F_2(z) = F(\frac{z-1}{Tz}) = \frac{z-1-0.2*21.16z}{z-1+0.2*28.08z} = \frac{3.23z+1}{1-8.62z}$$

- Discrétisation Tustin ($p \simeq \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$) qui donne :

$$\begin{aligned} F_3(z) = F(\tfrac{2(z-1)}{T(z+1)}) &= \frac{2z-2-0.2*21.16(z+1)}{2z-2+0.2*28.08(z+1)} \\ &= -\frac{2.23z+6.23}{9.62z+5.62} \end{aligned}$$

2.b Réponses temporelles.

Le comportement temporel de chacun de ces correcteurs à temps discret se caractérise par leur pôles respectifs:

F_1 Ce correcteur a comme pôle $z_1 = -6.62$ qui est de module supérieur à 1 et à partie réelle négative. En réponse à un échelon il renvoie donc un signal divergent et oscillant à la période d'échantillonnage.

F_2 Ce correcteur a comme pôle $z_2 = 1/8.62 = 0.12$ qui est de module inférieur à 1 et à partie réelle positive. En réponse à un échelon il renvoie donc un signal convergent non-oscillant.

F_3 Ce correcteur a comme pôle $z_3 = -5.62/9.62 = -0.59$ qui est de module inférieur à 1 et à partie réelle négative. En réponse à un échelon il renvoie donc un signal convergent et oscillant à la période d'échantillonnage.

De plus, on peut remarquer que le système F_2 converge plus vite que le système F_3 car il a un pôle dont le module est le plus faible ($0.12 < 0.59$).

Les différences très importantes entre les trois correcteurs obtenus par discrétisation tiennent de la période d"échantillonnage choisie pour $G(p)$. En effet, l'approximation mathématique par une équation récurrente à la période $T = 0.2s$ du système $F(p)$ qui a une constante de temps $\tau = 1/38.08 \simeq 0.03s$ est forcément problématique.

2.c Algorithme de commande.

D'après le schéma bloc on a :

$$u(z) = K(z)c(z) - K(z)y(z) - F(z)y(z)$$

Ainsi en supposant $c(z) = 0$ on trouve :

$$\begin{gathered} u(z) = \left(-\tfrac{2}{3z-1} - \tfrac{3z+1}{1-9z}\right)y(z) \\ \Downarrow \\ (3z-1)(1-9z)u(z) = (-2(1-9z) - (3z+1)(3z-1))y(z) \\ \Downarrow \\ (27z^2 - 12z + 1)u(z) = (9z^2 - 18z + 1)y(z) \\ \Downarrow \\ (27 - 12z^{-1} + z^{-2})u(z) = (9 - 18z^{-1} + z^{-2})y(z) \end{gathered}$$

En appliquant maintenant la transformée en $\mathcal{Z}$ inverse à cette équation, on a :

$$\begin{gathered} 27u_k - 12u_{k-1} + u_{k-2} = 9y_k - 18y_{k-1} + y_{k-2} \\ \Downarrow \\ u_k = \tfrac{1}{27}(12u_{k-1} - u_{k-2} + 9y_k - 18y_{k-1} + y_{k-2}) \end{gathered}$$

Exercice 3

3.a Modèle.

Par définition le stock correspond à la différence entre ce qui est disponible pendant une semaine, moins ce qui a été consommé :

$$s_{k+1} = s_k + a_k - c_k$$

En ajoutant cette équation aux deux autres données dans l'énoncé et en considérant le vecteur d'état X_k composé des signaux s_k, a_k et c_k dans l'ordre, on retrouve exactement le modèle d'état proposé.

3.b Equilibre.

A l'équilibre $X_{k+1} = X_k = X_e$, ce qui correspond aux équations suivantes :

$$\begin{array}{lcr} s_e = s_e + a_e - c_e & \Rightarrow & a_e = c_e \\ a_e = -\alpha s_e + a_e + \alpha S_{nom} & \Rightarrow & s_e = S_{nom} \\ c_e = \beta a_e + C_{nom} & \Rightarrow & (1-\beta)c_e = C_{nom} \end{array}$$

Ainsi l'équilibre est possible uniquement si $\beta \neq 1$. Sous cette condition il est tel que :

$$s_e = S_{nom} \qquad a_e = c_e = \frac{C_{nom}}{1-\beta}$$

3.c Stabilité.

Le polynôme caractéristique du système est donné par :

$$P(z) = \det\left(zI - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Le calcul du déterminant donne :

$$P(z) = z^3 - 2z^2 + (\alpha+1)z - \alpha\beta = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$$

On applique le critère de Jury à ce polynôme :

$$\begin{array}{rr} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = & \alpha(1-\beta) > 0 \\ a_3 - a_2 + a_1 - a_0 = & 3 + \alpha(1+\beta) > 0 \\ a_3 - |a_0| = & 1 - |\alpha\beta| > 0 \\ a_0a_2 - a_1a_3 - a_0^2 + a_3^2 = & \alpha(2\beta - 1 - \alpha\beta^2) > 0 \end{array}$$

Ce critère est maintenant évalué pour les différents choix de α et β. Voici les cas dans lesquels le système n'est pas asymptotiquement stable :

- $(\alpha = 1, \beta = 1)$ car alors $\alpha(1-\beta) = 0$.
- $(\alpha = 2, \beta = 0.5)$ car alors $1 - |\alpha\beta| = 0$.
- $(\alpha = 1, \beta = 0.5)$ car alors $\alpha(2\beta - 1 - \alpha\beta^2) = -0.25$.
- $(\alpha = 0.7, \beta = 0.4)$ car alors $\alpha(2\beta - 1 - \alpha\beta^2) = -0.22$.

Les deux autres cas correspondent à des situations asymptotiquement stables. En effet, pour $(\alpha = 0.1, \beta = 0.7)$ on trouve :

$$\begin{array}{cc} \alpha(1-\beta) = 0.03 & 3 + \alpha(1+\beta) = 3.17 \\ 1 - |\alpha\beta| = 0.93 & \alpha(2\beta - 1 - \alpha\beta^2) = 0.04 \end{array}$$

et pour $(\alpha = 0.4, \beta = 0.9)$ on a :

$$\begin{array}{cc} \alpha(1-\beta) = 0.04 & 3 + \alpha(1+\beta) = 3.76 \\ 1 - |\alpha\beta| = 0.64 & \alpha(2\beta - 1 - \alpha\beta^2) = 0.19 \end{array}$$

3.d Réponse temporelle.

La réponse temporelle de la figure 3 fait apparaître que le comportement temporel dominant du système est oscillatoire et très lentement convergent. Le mode dominant du système est donc un mode oscillant associé à un pôle complexe dont le module est proche de l'unité. Plus précisément, le mode est oscillant à une période d'environ 7 semaines.

On peut remarquer que ce fonctionnement du magasin ne permet pas d'amortir rapidement des aléas (perturbations) qui peuvent intervenir dans l'entreprise. De plus, le phénomène fortement oscillatoire peut conduire à des situations où le stock deviendrait négatif ou du moins trop faible pour satisfaire les besoins de l'entreprise. Il convient d'améliorer la situation à l'aide d'une commande par retour d'état.

3.e Retour d'état.

Le calcul du retour d'état demande tout d'abord de vérifier si le système est commandable.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & AB^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

On constate que rang$\mathcal{C} = 3$, d'après le théorème de Kalman, le système est commandable. Il existe une loi de commande par retour d'état qui permet de placer les pôles du système.

Le calcul de cette loi de commande se fait en 5 étapes :

- Polynôme caractéristique du système en boucle ouverte :

$$P_A(z) = det(zI - A) = z^3 - z^2 = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

- On souhaite avoir le système le plus rapide possible. C'est à dire, que ses pôles aient le module le plus faible ($= 0$). Polynôme caractéristique souhaité du système en boucle fermée est donc :

$$P_{A-BK}(z) = z^3 = z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

- Dans la base canonique de commande la loi de commande par retour d'état est donc de la forme :

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 & \alpha_1 - a_1 & \alpha_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de passage à la base compagne de commande :

$$M_c = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} m_3 &= B \\ m_2 &= Am_3 + a_2 B \\ m_1 &= Am_2 + a_1 B \end{aligned}$$

  Ce qui donne :

$$M_c = \begin{bmatrix} -0.8 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -0.8 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -25/4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

- Gain de retour d'état dans la base du modèle :

$$K = \tilde{K} M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

3.f Réponse temporelle.

Etant donné les équations du système on calcule directement de façon itérative les échantillons. La première semaine on a :

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 340 \end{pmatrix}$$

La seconde semaine l'état devient :

$$\begin{pmatrix} s_2 \\ a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 340 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 500 \\ 260 \end{pmatrix}$$

Et la troisième semaine on trouve :

$$\begin{pmatrix} s_3 \\ a_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 500 \\ 260 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Au delà, cette valeur de l'état est inchangée. Ceci est garanti par le fait que le système commandé par la loi de retour d'état a tous ses pôles à zéro : l'état converge pile vers l'équilibre en $n = 3$ échantillons.

3.g Observateur.

Le calcul de l'observateur nécessite tout d'abord de vérifier que le système est observable :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}$$

On constate que $\text{rang}\, O = 3$, d'après le théorème de Kalman, le système est observable.

Le calcul de l'observateur se fait en 5 étapes :

- Polynôme caractéristique du système en boucle ouverte :

$$P_A(z) = det(zI - A) = z^3 - z^2 = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

- On souhaite avoir un observateur dont les pôles sont à zéro :

$$P_{A-HC}(z) = z^3 = z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0$$

- Dans la base canonique d'observation le gain de l'observateur est donc de la forme :

$$\breve{H} = \begin{bmatrix} \beta_0 - a_0 \\ \beta_1 - a_1 \\ \beta_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de passage à la base compagne d'observation :

$$M_o = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} m_3 &= C \\ m_2 &= m_3 A + a_2 C \\ m_1 &= m_2 A + a_1 C \end{aligned}$$

  Ce qui donne :

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5/4 & 0 & 0 \\ -5/4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Gain de l'observateur dans la base du modèle :

$$H = M_o^{-1} \breve{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'observateur s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1} &= (A - HC)\hat{X}_k + Bu_k + Hy_k \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \hat{X}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_k \end{aligned}$$