INSA de Toulouse, spécialité AEI 4ème année

Corrigé de l'examen d'Automatique

Mercredi 17 Janvier 2001

1. Modélisation d'un processus échantillonné.

1.a. Fonction de transfert.
A la donnée de la fonction de transfert du système continu, la fonction de transfert du processus échantillonné se calcule par la transformée en z en tenant compte du bloqueur:

$$G(z) = \mathcal{Z}[B_o(p)G(p)] = \frac{z-1}{z}\ \mathcal{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right]$$

Pour calculer la transformée en z, on décompose en éléments simples la fonction en p:

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$$

En utilisant le tableau des transformées, il vient:

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_e}} - \frac{T_e z e^{-T_e}}{(z-e^{-T_e})^2}\right]$$

Ce qui conduit à:

$$G(z) = \frac{(1-(1+T_e)e^{-T_e})z + (e^{-T_e}+T_e-1)e^{-T_e}}{(z-e^{-T_e})^2}$$

Pour un choix de $T_e = 1s$ on trouve donc:

$$G(z) = \frac{z(1-2e^{-1}) + e^{-2}}{(z-e^{-1})^2}$$

1.b. Forme compagne de commande.
La forme compagne de commande est définie entièrement à la donnée des coefficients des polynômes du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert. On développe donc $G(z)$:

$$G(z) = \frac{z(1-2e^{-1}) + e^{-2}}{z^2 - 2e^{-1}z + e^{-2}}$$

et on en déduit la représentation d'état:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-2} & 2e^{-1} \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} e^{-2} & 1-2e^{-1} \end{bmatrix} x_k \end{aligned}$$

1.c. Forme de Jordan.
Pour obtenir la forme de Jordan on décompose en éléments simples la fonction de transfert:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{(z-e^{-1})(1-2e^{-1}) + e^{-1}(1-2e^{-1}) + e^{-2}}{(z-e^{-1})^2} \\ &= \frac{(1-2e^{-1})}{z-e^{-1}} + \frac{(1-e^{-1})e^{-1}}{(z-e^{-1})^2} \end{aligned}$$

On en déduit la représentation d'état:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} e^{-1} & 1 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} (1-e^{-1})e^{-1} & 1-2e^{-1} \end{bmatrix} x_k \end{aligned}$$

2. Analyse d'un système discret.

On adopte les notations classiques:

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & 1 & \alpha \\ 0 & 0.3 & -0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

2.a. L'observabilité du système est caractérisée par le rang de la matrice de Kalman:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & \alpha \\ 0.09 & 0.4\alpha & -0.4 \end{bmatrix}$$

Le système est observable si et seulement si la matrice $\mathcal{O}$ est de rang plein. Etant donnée la structure de cette matrice, l'observabilité est équivalente à ce que les lignes de la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0.4\alpha & -0.4 \end{bmatrix}$$

ne soient pas proportionnelles l'une de l'autre.
La condition d'observabilité du système est donc:

$$\frac{1}{0.4\alpha} \neq \frac{\alpha}{-0.4} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 \neq -1$$

Cette condition est toujours vérifiée. Le système est observable pour tout α.

2.b. La commandabilité du système est caractérisée par le rang de la matrice de Kalman:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & -0.4 \\ 0 & -0.4 & -0.24 \\ 1 & 0.3 & -0.07 \end{bmatrix}$$

Le système est commandable si et seulement si la matrice $\mathcal{C}$ est de rang plein. Etant donnée la structure de cette matrice, la commandabilité est équivalente à ce que les lignes de la matrice:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -0.4 \\ -0.4 & -0.24 \end{bmatrix}$$

ne soient pas proportionnelles l'une de l'autre.
La condition de commandabilité du système est donc:

$$\frac{\alpha}{-0.4} \neq \frac{-0.4}{-0.24} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq -\frac{2}{3}$$

Le système est commandable si et seulement si $\alpha \neq -\frac{2}{3}$.

2.c. La stabilité du système est caractérisée par l'appartenance des pôles au disque unité. On s'intéresse donc au module des valeurs propres de A. A est une matrice bloc triangulaire supérieure dont la diagonale est composée des deux blocs suivants:

$$A_1 = -0.3 \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.4 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont donc les valeurs propres de A_1 et celles de A_2. La première est réelle $\lambda_1 = -0.3$ et de module inférieur à l'unité. Les secondes sont complexes (on reconnaît une forme canonique telle que $\lambda_{1,2} = 0.3 \pm 0.4i$), le carré de leur module se trouve immédiatement par le calcul du déterminant de A_2:

$$|\lambda_{1,2}|^2 = det(A_2) = 0.25$$

Le module de toutes les valeurs propres est donc inférieur à l'unité. Le système est stable pour toute valeur de α.

3. Analyse d'une boucle de régulation.

3.a. Fonction de transfert de la boucle.

Soient $G(z)$ et $F(z)$ les fonctions de transfert de la chaîne d'action et de la chaîne de rétroaction:

$$G(z) = K\frac{z+0.9}{z-0.2} \qquad F(z) = \frac{z-1.5}{z+0.2}$$

La fonction de transfert de la boucle fermée est obtenue par:

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)F(z)}$$

Après calcul on trouve:

$$H(z) = K\frac{z^2+1.1z+0.18}{(1+K)z^2-0.6Kz-0.04-1.35K}$$

3.b. Stabilité de la boucle fermée.

La stabilité de la boucle fermée est caractérisée par l'appartenance des racines du dénominateur au disque unité. On remarque que le critère de Jury est applicable à la condition que le polynôme ait un coefficient positif devant le terme de plus haut degré ($a_n > 0$). Pour pouvoir appliquer le critère de Jury dans le cas le plus général (pour le corrigé on ne considère pas uniquement le cas $K > 0$) on modifie donc la fonction de transfert comme suit:

$$H(z) = \frac{K}{1+K}\,\frac{z^2+1.1z+0.18}{z^2-\frac{0.6K}{1+K}z+\frac{-0.04-1.35K}{1+K}}$$

Soit $P(z)$ le polynôme du dénominateur:

$$P(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 = \frac{-0.04-1.35K}{1+K} - \frac{0.6K}{1+K}z + z^2$$

D'après le critère de Jury, le système est asymptotiquement stable si et seulement si:

$$\begin{cases} a_o + a_1 + a_2 > 0 \\ a_o - a_1 + a_2 > 0 \\ a_2 - a_o > 0 \end{cases}$$

Ces conditions s'écrivent:

$$\begin{cases} \frac{-0.04-1.35K}{1+K} - \frac{0.6K}{1+K} + 1 > 0 \\ \frac{-0.04-1.35K}{1+K} + \frac{0.6K}{1+K} + 1 > 0 \\ 1 - \frac{-0.04-1.35K}{1+K} > 0 \end{cases}$$

Pour les résoudre il est nécessaire de faire alternativement l'hypothèse $K+1>0$ puis $K+1<0$.
Pour commencer on va rechercher des domaines appartenant à $K > -1$, qui assurent la stabilité de la boucle fermée. Avec cette hypothèse, les conditions du critère de Jury deviennent:

$$\begin{cases} -0.04-1.35K-0.6K+1+K > 0 \\ -0.04-1.35K+0.6K+1+K > 0 \\ 1+K-(-0.04-1.35K) > 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à:

$$\text{si } K > -1 \quad \begin{cases} K < \frac{0.96}{0.95} = 1.0105 \\ K > -\frac{0.96}{0.25} = -3.84 \\ K > -\frac{1.04}{2.35} = -0.4426 \end{cases}$$

Si maintenant on pose l'hypothèse $K < -1$, les conditions du critère de Jury deviennent:

$$\begin{cases} -0.04-1.35K-0.6K+1+K < 0 \\ -0.04-1.35K+0.6K+1+K < 0 \\ 1+K-(-0.04-1.35K) < 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit à:

$$\text{si } K < -1 \quad \begin{cases} K > \frac{0.96}{0.95} = 1.0105 \\ K < -\frac{0.96}{0.25} = -3.84 \\ K < -\frac{1.04}{2.35} = -0.4426 \end{cases}$$

Ces conditions ne peuvent être remplies simultanément donc seule la première hypothèse est valide et les conditions de stabilité de la boucle fermée sont à rechercher dans l'intersection des contraintes suivantes:

$$\begin{cases} K > -1 \\ K < 1.0105 \\ K > -3.84 \\ K > -0.4426 \end{cases}$$

Le système est stable pour tout $-0.4426 < K < 1.0105$.

3.c. Algorithme de commande.

L'algorithme de commande est une équation récurrente qui permet en temps réel de calculer la commande u_k à appliquer à la donnée des consignes $\{y_c\}$ et des mesures $\{y\}$ connues pour les instants précédents. Cet algorithme correspond à l'équation récurrente dont la transformée de Laplace en z s'écrit:

$$U(z) = KY_c(z) - KF(z)Y(z) = KY_c(z) - K\frac{z-1.5}{z+0.2}Y(z)$$

ou encore:

$$(z+0.2)U(z) = K(z+0.2)Y_c(z) - K(z-1.5)Y(z)$$

En appliquant la transformée en z inverse à cette équation, on trouve:

$$u_{k+1} + 0.2u_k = Ky_{c_{k+1}} + 0.2Ky_{c_k} - Ky_{k+1} + 1.5Ky_k$$

Pour être appliqué, cet algorithme suppose de calculer u_k en fonction des échantillons aux instants précédents, soit:

$$u_k = -0.2u_{k-1} + Ky_{c_k} + 0.2Ky_{c_{k-1}} - Ky_k + 1.5Ky_{k-1}$$

4. Retour d'état et discrétisation.

4.a. Analyse du système continu.

La représentation d'état est dans la forme canonique de commande, donc le polynôme caractéristique du système est:

$$p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

Les pôles du système sont donc tous deux égaux à $p_{1,2} = -1$. Ils sont situés dans le demi-plan gauche. Le système est stable.

On construit la matrice de commandabilité:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est de rang plein. Le système est commandable. On construit la matrice d'observabilité:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est de rang plein. Le système est observable.

4.b. Retour d'état.

On souhaite imposer les pôles de la boucle fermée tels que:

$$p_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -6 \pm j8$$

Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée s'écrit donc:

$$P_d(p) = p^2 + 12p + 100 = p^2 + \alpha_1 p + \alpha_o$$

or le polynôme caractéristique du système est:

$$P(p) = p^2 + 2p + 1 = p^2 + a_1 p + a_o$$

Donc le gain du retour d'état dans la base compagne de commande se calcule comme suit:

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \alpha_o - a_o & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 & 10 \end{bmatrix}$$

Comme le modèle se trouve dans la base canonique de commande il n'y a pas à changer de base:

$$L = \tilde{L} = \begin{bmatrix} 99 & 10 \end{bmatrix}$$

4.c. Observateur dynamique.

On recherche un observateur dynamique pour ce système. Son équation d'état s'écrit:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - HC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Hy(t)$$

La matrice H est choisie de façon à placer les pôles de l'observateur. On désire que les constantes de temps de cet observateur soient égales à $\tau = 0.1s$. On peut donc choisir des pôles réels tels que:

$$p_d = -\frac{1}{\tau} = -10$$

Le polynôme caractéristique désiré pour l'observateur est donc:

$$P_d(p) = p^2 + 20p + 100 = p^2 + \beta_1 p + \beta_o$$

or le polynôme caractéristique de A est:

$$P(p) = p^2 + 2p + 1 = p^2 + a_1 p + a_o$$

Donc le gain de l'observateur dans la base compagne d'observation se calcule comme suit:

$$\breve{H} = \begin{bmatrix} \beta_1 - a_1 \\ \beta_o - a_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 99 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage à la forme canonique d'observation se calcule comme suit:

$$\breve{M}^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ C(A - a_1 I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Le gain de l'observateur s'obtient donc comme suit:

$$H = \breve{M}\breve{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 \\ 99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 63 \end{bmatrix}$$

4.d. Fonction de transfert du correcteur complet.

L'équation dynamique de l'observateur proposé est:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - HC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Hy(t)$$

La loi de contrôle par retour d'état est appliquée à la donnée de l'état estimé calculé par l'observateur:

$$u(t) = -L\hat{x}(t) + v(t)$$

On en déduit que le correcteur complet vérifie les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - HC - BL)\hat{x}(t) + Bv(t) + Hy(t) \\ u(t) &= -L\hat{x}(t) + v(t) \end{aligned}$$

On choisit les notations suivantes pour cette représentation d'état:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_o\hat{x}(t) + B_1 v(t) + B_2 y(t) \\ u(t) &= C_o\hat{x}(t) + D_1 v(t) + D_2 y(t) \end{aligned}$$

et l'application numérique donne:

$$A_o = \begin{bmatrix} -18 & 1 \\ -163 & -12 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 18 \\ 63 \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} -99 & -10 \end{bmatrix} \qquad D_1 = 1 \qquad D_2 = 0$$

La fonction de transfert de ce correcteur s'écrit alors:

$$U(p) = R_1(p)V(p) + R_2(p)Y(p)$$

avec:

$$R_1(p) = C_o(pI - A_o)^{-1}B_1 + D_1$$
$$R_2(p) = C_o(pI - A_o)^{-1}B_2 + D_2$$

On commence par le calcul de l'inverse de $(pI - A_o)$:

$$(pI - A_o)^{-1} = \frac{1}{p^2 + 30p + 379} \begin{bmatrix} p+12 & 1 \\ -163 & p+18 \end{bmatrix}$$

et on en déduit:

$$R_1(p) = \frac{-10p-279}{p^2+30p+379} + 1 = \frac{p^2+20p+100}{p^2+30p+379}$$
$$R_2(p) = \frac{-2412p-9621}{p^2+30p+379}$$

On remarque que ce correcteur a la structure d'un correcteur R.S.T. continu avec :

$$R(p) = p^2 + 30p + 379$$
$$S(p) = -2412p - 9621$$
$$T(p) = p^2 + 20p + 100$$

Si on calcule la fonction de transfert de la boucle de régulation on retrouve les pôles que nous avons imposés:

Pôles dominants : $-6 + j8 \quad -6 - j8$
Pôles auxiliaires : $-10 \quad -10$

et on remarque que les racines de $T(p)$ permettent de compenser les deux pôles auxiliaires.

4.e. Discrétisation de la commande.
La méthode de discrétisation permet d'obtenir des modèles discrets dont le comportement est analogue à celui du système continu à partir duquel ils sont calculés. La discrétisation avant consiste à approximer l'opérateur dérivée p par la méthode d'Euler:

$$R_{1d}(z) = R_1(\frac{z-1}{T}) \qquad R_{2d}(z) = R_2(\frac{z-1}{T})$$

Après application numérique on trouve:

$$R_{1d}(z) = \frac{z^2 - 1.8z + 0.81}{z^2 - 1.7z + 0.7379} \qquad R_{2d}(z) = \frac{-24.12z + 23.16}{z^2 - 1.7z + 0.7379}$$

4.f. Pré-commande.
La fonction de transfert du système est:

$$Y(p) = G(p)U(p) = \frac{1}{(p+1)^2}U(p)$$

Donc d'après l'exercice 1, la fonction de transfert de ce processus échantillonné est:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{(1-(1+T)e^{-T})z + (e^{-T} + T - 1)e^{-T}}{(z - e^{-T})^2}$$

En tenant compte de la pré-commande, la loi de contrôle s'écrit:

$$U(z) = l_c R_{1d}(z) Y_c(z) + R_{2d}(z) Y(z)$$

On en déduit que la boucle fermée vérifie:

$$Y(z) = l_c G(z) R_{1d}(z) Y_c(z) + G(z) R_{2d}(z) Y(z)$$

c'est à dire que la fonction de transfert est:

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{l_c R_{1d}(z) G(z)}{1 - R_{2z}(z) G(z)} = H(z)$$

Le gain statique de cette fonction de transfert est obtenu par la limite suivante:

$$G_o = \lim_{z \to 1} H(z) = H(1) = \frac{l_c R_{1d}(1) G(1)}{1 - R_{2z}(1) G(1)}$$

On calcule donc les gains statiques de chaque fonction de transfert:

$$G(1) = 1 \qquad R_{1d}(1) = 0.2639 \qquad R_{2d}(1) = -25.3298$$

On en déduit donc:

$$G_o = \frac{l_c 0.2639}{1 + 25.3298} = l_c * 0.01002286382730$$

Donc pour avoir un gain statique unitaire: $l_c \simeq 100$.