

SYSTEMES A TEMPS DISCRET
Commande numérique des procédés

Dimitri Peaucelle

7 avril 2003

Avant-propos

Ce document est conçu comme un support de cours destiné à des élèves ingénieurs. Il a été rédigé en particulier en vue d'un enseignement de 15 heures à l'ENSA (Ecole Nationale des Sciences Appliquées) située sur le pôle technologique de l'Université Ibn Zohr, Agadir, Maroc.

L'objectif de ce cours est d'aborder certains aspects de la commande numérique des systèmes et ne se veut en aucun cas exhaustif. Les pré-requis concernent des aspects mathématiques tels que la manipulation de fonctions et de suites, le calcul intégral et les séries, la transformée de Laplace; ainsi qu'une bonne connaissance de l'Automatique des systèmes linéaires à temps continu. Partant de procédés physiques modélisées par des fonctions de transfert en p (variable de Laplace) nous aborderons successivement la modélisation de systèmes discrets et échantillonnés, leur analyse et pour finir la synthèse de lois de commande numériques.

Le premier chapitre est entièrement dédié à la modélisation. Il présente dans un premier temps la modélisation de signaux à temps discret avant d'introduire la notion de fonction de transfert en z . Il porte une attention particulière aux systèmes discrets obtenus par échantillonnage de procédés continus et qui sont au centre de la problématique de la commande numérique.

Les deux chapitres suivants portent sur la description et l'analyse des comportements temporels d'un système à temps discret. Le chapitre 2 commence par décrire et calculer les réponses d'un système à la donnée d'une entrée. Le chapitre 3 quant à lui, s'intéresse à la notion primordiale en Automatique de stabilité. Il propose des résultats théoriques pour analyser cette propriété.

Par la suite, deux chapitres sont consacrés à la synthèse de lois de commande. Le chapitre 4 considère le cas le plus élémentaire d'une loi de commande statique constituée de simples gains. Le chapitre 5 aborde une technique dite de discrétisation. Elle consiste à transposer les méthodes de synthèse spécifiques aux systèmes à temps continu pour la commande numérique de systèmes échantillonnés.

Il est important de préciser que ce document doit beaucoup au polycopié de cours réalisé par Bernard Pradin à l'INSA de Toulouse, [9]. De plus il s'inspire d'ouvrages précédents tels que [1] [3] [4] [6] [7] [2] [5] [8].

Toulouse, 7 avril 2003

Dimitri Peaucelle

Bibliographie

- [1] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *Analyse et Régulation des Processus Industriels. Tome 1 : Régulation continue*. Technip, France, 1993.
- [2] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *Analyse et Régulation des Processus Industriels. Tome 2 : Régulation numérique*. Technip, France, 1993.
- [3] B. d'Andréa Novel and M. Cohen de Lara. *Commande Linéaire des Systèmes Dynamiques*. Masson, France, 1994.
- [4] E. Dieulesaint and D. Royer. *Automatique Appliquée : 1. Systèmes linéaires de commande à signaux analogiques*. Masson, France, 1987.
- [5] E. Dieulesaint and D. Royer. *Automatique Appliquée : 2. Systèmes linéaires de commande à signaux échantillonnés*. Masson, France, 1990.
- [6] R.C. Dorf and R.H. Bishop. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New-York, 1995.
- [7] G.F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New-York, 1994.
- [8] D. Jaume, S. Thelliez, and M. Vergé. *Commande des Systèmes Dynamiques par Calculateur*. Eyrolles, France, 1991.
- [9] B. Pradin. *SYSTEMES A TEMPS DISCRET - Commande numérique des procédés*. INSA Toulouse, France, 1999.

Chapitre 1

Modèles des systèmes à temps discret

On examine ici des modèles qui peuvent être utilisés pour représenter des systèmes à temps discret, mono entrée mono sortie. Dans un premier temps, ces modèles sont présentés dans leur généralité. Une attention particulière est ensuite portée aux systèmes à temps discrets obtenus par échantillonnage, en vue de la commande par ordinateur, de systèmes à temps continu.

1.1 Signal à temps discret

1.1.1 Introduction

L'Automatique des systèmes à temps continu repose sur une représentation mathématique des échanges d'énergies, de forces, d'informations en tant que *fonctions* du temps à valeurs réelles (éventuellement espace vectoriel de \mathbb{R}):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto x(t) \end{array} \right.$$

Cette représentation ne tient pas compte de l'ensemble des réalités des échanges de signaux rencontrés en pratique. En particulier, l'emploi accru de calculateurs numériques conduit à considérer des signaux, dit à temps discret, qui n'admettent des valeurs qu'à certains instants régulièrement espacés. Mathématiquement ils sont représentés par des *suites*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ k \mapsto x_k \end{array} \right.$$

Sans entrer dans les détails, notons que les outils mathématiques associés aux suites sont aussi riches que ceux employés dans le cas de fonctions. Un grand nombre de notions primordiales ont leur équivalent telles que l'intégration ($\int_{t=0}^T$) qui correspond dans le cas de séquences discrètes à l'opérateur somme ($\sum_{k=0}^N$), et la transformée de Laplace ($\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$) dont l'équivalent discret appelée transformée en z ($Z[x_k] = X(z)$) est décrite dans ce qui suit.

Il est possible sous certaines hypothèses de représenter les signaux à temps discret comme des signaux à temps

continu dont les valeurs sont nulles à tout instant sauf à certains instants périodiquement répartis. Soit $T > 0$ cette période qui peut être quelconque à ce stade. Dans certains cas T est appelée la cadence du signal. Le signal à temps discret peut être confondu par analogie avec le signal à temps continu suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \begin{cases} x^*(t) = x_k & \text{si } t = kT \quad : k \in \mathbb{N} \\ x^*(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Nous verrons par la suite que cette représentation correspond à la modélisation du processus d'échantillonnage.

1.1.2 Définition de la transformée en z

La transformée de Laplace pour les signaux continus s'écrit :

$$X(p) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt$$

Dès lors, avec ce qui précède il est possible de définir la transformée de Laplace d'un signal discret à la donnée d'une période T :

$$X^*(p) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \int_0^{+\infty} x^*(t)e^{-pt} dt$$

En ce cas, le signal X^* étant non nul que pour certaines valeurs discrètes du temps on trouve :

$$X^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e^{-pkT}$$

C'est à partir de ce résultat que la transformée en z des signaux discrets a été proposée.

On appelle transformée en z de la séquence $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la série entière définie par :

$$X(z) = Z[\{x_k\}] = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k}$$

Des exemples de transformées en z fréquemment utilisées sont données dans le tableau 1.1 de la page 5.

1.1.3 Propriétés de la transformée en z

La transformée en z est une simple variante de la transformée de Laplace et elle conserve ses propriétés à quelques modifications près. Voici les principales propriétés :

– **Linéarité**

Pour les signaux à temps continu on rappelle que :

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]$$

De même, on a pour la transformée en z :

$$\mathcal{Z}[\alpha \{f_k\} + \beta \{g_k\}] = \alpha \mathcal{Z}[\{f_k\}] + \beta \mathcal{Z}[\{g_k\}]$$

– **Produit de convolution**

La transformée de Laplace du produit de convolution $(f * g)(t)$ défini par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

est donnée par :

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(p) G(p)$$

Dans le cas des signaux à temps discret la convolution se définit par :

$$(f * g)_k = \sum_{l=0}^k f_l g_{k-l} = \sum_{l=0}^k f_{k-l} g_l$$

et sa transformée en z est :

$$\mathcal{Z}[\{f * g\}_k] = F(z) G(z)$$

– **Théorème du retard**

On désigne par $f(t - a)$ le signal identique à $f(t)$ mais retardé de la durée a . On a :

$$\mathcal{L}[f(t - a)] = e^{-ap} \mathcal{L}[f(t)] = e^{-ap} F(p)$$

De même, si f_{k-l} est le signal à temps discret f_k retardé de l périodes :

$$\mathcal{Z}[\{f_{k-l}\}] = z^{-l} \mathcal{Z}[\{f_k\}] = z^{-l} F(z)$$

Ce résultat permet de signaler que l'opérateur z^{-1} s'apparente à l'opérateur "retard d'une période".

– **Théorème de l'avance**

Si f_{k+l} correspond au signal f_k avancé de l périodes et tel que $f_j = 0$ pour tout $j < 0$, alors on a la relation suivante :

$$\mathcal{Z}[\{f_{k+l}\}] = z^l \left(\mathcal{Z}[\{f_k\}] - \sum_{i=0}^{l-1} f_i z^{-i} \right)$$

– **Théorème de la sommation**

Pour les signaux à temps continu on parle de théorème de l'intégration et il s'écrit :

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{p} F(p)$$

Pour les signaux à temps discret on a :

$$\mathcal{Z} \left[\left\{ \sum_{l=0}^k f_l \right\} \right] = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}[\{f_k\}] = \frac{z}{z-1} F(z)$$

– **Théorème de la valeur initiale**

La valeur initiale d'un signal à temps continu se déduit de sa transformée de Laplace comme suit :

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

La version discrète de ce théorème est donnée par :

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

– **Théorème de la valeur finale**

Si $pF(p)$ est une fraction rationnelle dont les racines du dénominateur sont à partie réelle négative alors le signal $f(t)$ converge pour $t \rightarrow +\infty$ et on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

De même, si $\frac{z-1}{z} F(z)$ est une fraction rationnelle dont les racines du dénominateur sont dans le cercle unité alors le signal f_k converge pour $k \rightarrow +\infty$ et on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

1.1.4 Exemples de transformées en z

Exemple 1.1

Soit le signal discret tel que :

$$\delta_0 = 1, \quad \forall k \neq 0 \quad \delta_k = 0$$

Le calcul de sa transformée en z est relativement direct. En appliquant la définition on trouve :

$$\mathcal{Z}[\{\delta_k\}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k z^{-k} = \delta_0 z^0 = 1$$

Remarque : Le signal δ_k définit ici est usuellement désigné sous l'appellation de l'impulsion unitaire ou encore dirac. Sa transformée en z vaut 1. ◁

Exemple 1.2

A partir de l'exemple précédent et des propriétés de la transformée en z les relations suivantes sont obtenues.

Premièrement considérons le dirac retardé :

$$f_h = 1, \quad \forall k \neq h \quad f_k = 0$$

On remarque que $f_k = \delta_{k-h}$, donc d'après le théorème du retard :

$$\mathcal{Z}\{f_k\} = \mathcal{Z}\{\delta_{k-h}\} = z^{-h} \mathcal{Z}\{\delta_k\} = z^{-h}$$

Considérons maintenant un signal du type échelon :

$$\forall k \geq 0 \quad e_k = 1$$

On remarque que $e_k = \sum_{j=0}^k \delta_k$, donc d'après le théorème de la sommation :

$$\mathcal{Z}\{e_k\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{j=0}^k \delta_k\right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \frac{z}{z-1}$$

Prenons en suivant le signal du type rampe :

$$\forall k \geq 0 \quad r_k = k$$

Il est possible de constater que $r_k = -e_k + \sum_{j=0}^k e_k$, donc en combinant la linéarité de la transformée en z et le théorème de la sommation on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{r_k\} &= -\mathcal{Z}\{e_k\} + \mathcal{Z}\left\{\sum_{j=0}^k e_k\right\} \\ &= -\mathcal{Z}\{e_k\} + \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}\{e_k\} \\ &= \left(-1 + \frac{z}{z-1}\right) \mathcal{Z}\{e_k\} \\ &= \frac{1}{z-1} \mathcal{Z}\{e_k\} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

◁

Exemple 1.3 Considérons le signal suivant :

$$\forall k \geq 0 \quad f_k = a^k$$

Par définition, sa transformée en z se calcule comme suit :

$$\mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (a/z)^k$$

Il s'agit d'une série géométrique connue :

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\} = \frac{1}{1-a/z} = \frac{z}{z-a}$$

La limite de la suite a^k est très bien connue. Elle existe uniquement si $|a| < 1$. Cette condition correspond bien à

l'énoncé du théorème de la valeur finale. En effet, $\frac{z-1}{z} F(z) = \frac{z-1}{z-a}$ est une fraction rationnelle dont la racine unique du dénominateur est a . Dire que cette racine est dans le disque unité revient à $|a| < 1$. La limite de la suite se calcule alors comme suit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a^k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z-a} = 0$$

◁

1.2 Signal échantillonné

1.2.1 Introduction

Ce cours s'intitule "Commande Numérique des Procédés" car l'objet principal concerne l'utilisation de calculateurs numériques utilisés en temps réel pour commander, piloter, guider... des procédés physiques qui par essence sont le plus souvent à temps continu. La problématique est alors de représenter les interactions entre des signaux physiques modélisés par des fonctions avec des signaux assimilables par des calculateurs numériques qui se présentent sous forme de suites.

Sans entrer dans les détails du fonctionnement des différents éléments, la commande par ordinateur, ou processeur, d'un procédé nécessite la mise en œuvre d'un certain nombre d'éléments (figure 1.1) :

- un actionneur, ou organe de commande qui reçoit les ordres du processeur à travers un convertisseur numérique-analogique,
- un capteur, ou organe de mesure qui transmet au processeur les informations recueillies sur le procédé, à travers un convertisseur analogique-numérique.

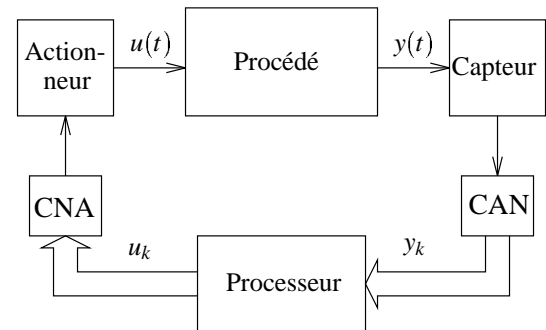


FIG. 1.1 – Structure générale d'une commande de procédé par ordinateur

1.2.2 Conversion analogique numérique

D'un point de vue modélisation, l'ensemble capteur convertisseur analogique-numérique peut être assimilé à une prise d'échantillons de la sortie continue $y(t)$ à période fixe T (période d'échantillonnage). Si l'on fait l'hypothèse que le temps de codage est négligeable (échantillonnage instantané) et qu'il n'y a pas d'erreur de quantification, on peut représenter l'opération de conversion analogique-numérique selon le schéma de la figure 1.2.

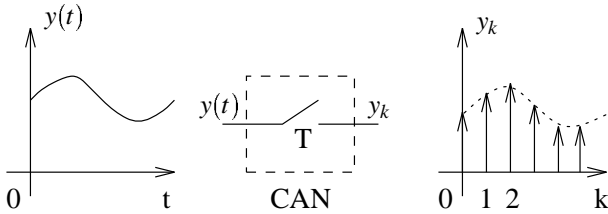


FIG. 1.2 – Convertisseur analogique-numérique

Mathématiquement, l'opération d'échantillonnage peut être assimilée à la modulation du signal continu $y(t)$ par un train d'impulsions unitaires de période T noté δ_T (parfois appelé également peigne de Dirac) :

$$y^*(t) = y(t)\delta_T(t) \quad \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Il vient :

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y(t)\delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k\delta(t - kT)$$

où $y^*(t)$ est un signal à temps continu égal à $y(t)$ aux instants $t = kT$ et zéro ailleurs et où $y_k = y(kT)$ est la valeur de l'échantillon de $y(t)$ à l'instant kT . Le signal échantillonné est représenté par la séquence des valeurs $y(kT)$ mesurées avec la période T :

$$\{y(kT)\} \equiv \{y_k\}$$

L'échantillonnage conduit à une perte d'information au regard du signal continu. Cette perte d'information est d'autant plus grande que la fréquence $f = 1/T$ est petite. Idéalement il faudrait donc échantillonner à une fréquence infinie, cependant, le choix de la période d'échantillonnage dépend du type de procédé et des possibilités offertes par les outils numériques. En tout état de cause, l'échantillonnage doit respecter le **théorème de Shannon** qui précise que la fréquence d'échantillonnage $f = 1/T$ doit être au moins égale à deux fois la plus grande fréquence contenue dans le spectre du signal que l'on veut échantillonner.

Le tableau 1.1 de la page 5 donne une collection de signaux continus classiques ainsi que leurs transformées de Laplace et leurs représentations après échantillonnage.

1.2.3 Conversion numérique analogique

Le processeur calculant la commande à appliquer au procédé travaille de manière séquentielle et génère des valeurs numériques u_k avec la même période T que celle qui a été choisie pour l'échantillonnage. L'opération de conversion numérique-analogique la plus courante consiste à produire un signal de commande $u(t)$ en escalier à partir des valeurs u_k selon le schéma de la figure 1.3.

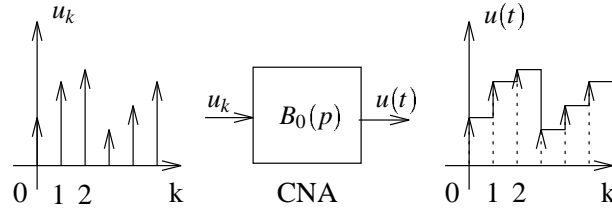


FIG. 1.3 – Convertisseur numérique-analogique

Le modèle mathématique que l'on associe alors à la conversion numérique analogique est le bloqueur d'ordre zéro dont la fonction de transfert $B_0(p)$ peut être facilement calculée. En effet, c'est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle représentée sur la figure 1.4.

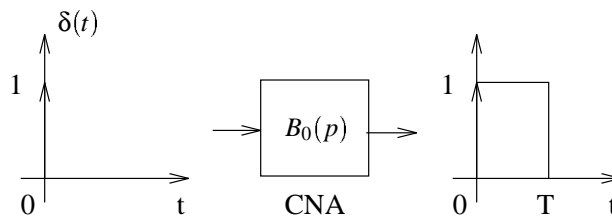


FIG. 1.4 – Bloqueur d'ordre zéro

La réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro est de la forme :

$$\Gamma(t) - \Gamma(t - T)$$

où $\Gamma(t)$ représente l'échelon de position unitaire. Il vient donc :

$$B_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-Tp}}{p} = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

Transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$	Signal continu $f(t)$	Signal échantillonné f_k	Transformée en z $F(z) = \mathcal{Z}[f_k]$
1	$\delta(t)$	$f_0 = 1, \forall k \neq 0 \quad f_k = 0$	1
e^{-ap}	$\delta(t - a)$		
e^{-hTp}	$\delta(t - hT)$	$f_h = 1, \forall k \neq h \quad f_k = 0$	z^{-h}
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t)$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	kT	$T \frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{2}{p^3}$	t^2	$k^2 T^2$	$T^2 \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}	$kT e^{-akT}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
		a^k	$\frac{z}{z-a}$
		$(-a)^k$	$\frac{z}{z+a}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

TAB. 1.1 – Signaux échantillonnés et leurs transformées de Laplace

1.3 Système à temps discret

Un système à temps discret se définit comme un opérateur entre deux signaux à temps discret. Considérons le système représenté sur la figure 1.5, où u_k représente le terme général de la séquence d'entrée et y_k le terme général de la séquence de sortie. Un modèle entrée-sortie, appelé aussi modèle externe, ne fait intervenir que les variables d'entrée u_k et de sortie y_k .

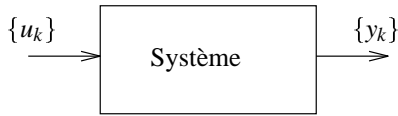


FIG. 1.5 – *Système à temps discret*

Nous allons aborder dans ce cours deux types de modèles externes, complémentaires l'un de l'autre, que sont les équations récurrentes et les fonctions de transfert.

1.3.1 Equation récurrente

La modélisation initiale d'un système à temps discret conduit souvent à l'écriture d'une équation récurrente entre différents termes des séquences d'entrée et de sortie. La forme générale d'une équation récurrente linéaire peut être donnée par :

$$\begin{aligned} a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k \\ = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k \end{aligned} \quad (1.1)$$

Par hypothèse $a_n \neq 0$ et n est appelé l'ordre du système. Le système est dit *causal* si les sorties dépendent uniquement des événements passés. Pour cela il doit obligatoirement vérifier $m \leq n$. Dans ce cas, il est possible d'écrire l'algorithme qui détermine la sortie du système à la donnée des entrées/sorties précédentes :

$$\begin{aligned} a_n y_k = -a_{n-1} y_{k-1} - \dots - a_1 y_{k-n-1} - a_0 y_{k-n} \\ + b_m u_{k+m-n} + \dots + b_1 u_{k-n-1} + b_0 u_{k-n} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Cette formulation de l'équation récurrente est bien adaptée au calcul numérique. C'est la forme sous laquelle seront présentés les algorithmes de commande des procédés. Le système est entièrement défini et l'équation récurrente peut être résolue si l'on précise les conditions "initiales" : $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$.

1.3.2 Fonction de transfert en z

De la même manière que l'on associe à un système à temps continu, une fonction de transfert, par application

de la transformation de Laplace à son équation différentielle, on peut associer à un système à temps discret, une fonction de transfert en z , par application de la transformation en z à son équation récurrente (cf. Transformation en z dans la section 1.1.2). Sous l'hypothèse que les conditions "initiales" sont nulles ($y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = u_0 = u_1 = \dots = u_{m-1} = 0$) il vient la relation suivante :

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n) Y(z) \\ = (b_0 + b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m) U(z) \end{aligned}$$

soit encore :

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} U(z)$$

avec :

$$\frac{N(z)}{D(z)} = G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n}$$

qui est définie comme la **fonction de transfert** en z du système.

Dans le cas général où les conditions initiales sont non nulles la représentation en z du système s'écrit plus exactement :

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} U(z) + \frac{I(z)}{D(z)}$$

où le polynôme $I(z)$ ne dépend que des conditions initiales. Il influe sur la sortie du système sans modifier le comportement dû au signal d'entrée $U(z)$.

La factorisation du numérateur et du dénominateur conduit à la **forme pôles, zéros, gain** suivante :

$$G(z) = \frac{b_m}{a_n} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

avec :

$$p_{i=1, \dots, n} : \text{pôles} \quad z_{j=1, \dots, m} : \text{zéros} \quad k = \frac{b_m}{a_n} : \text{gain}$$

Par définition les **pôles** du système sont les racines du polynôme dénominateur et les **zéros** du système sont les racines du polynôme numérateur. Les uns et les autres sont par défaut des nombres soit réels soit complexes.

Certains auteurs préfèrent une **formulation en z^{-1}** de la fonction de transfert. On peut l'obtenir à partir de la formulation en z comme suit :

$$G(z) = \frac{b_m}{a_n} z^{m-n} \frac{1 + b_{m-1}^* z^{-1} + \dots + b_0^* z^{-m}}{1 + a_{n-1}^* z^{-1} + \dots + a_0^* z^{-n}} \quad (1.3)$$

avec les notations suivantes :

$$b_j^* = \frac{b_j}{b_m} \quad a_i^* = \frac{a_i}{a_n}$$

Elle correspond à l'équation (1.2) par opposition à (1.1). Son intérêt est de représenter le système au plus près de sa réalité physique dans le sens où z^{-1} représente l'opérateur "retard" qui est physiquement réaliste tandis que z suppose de prévoir les instants futurs. Bien entendu, les formulations en z et z^{-1} sont équivalentes. L'écriture (1.3) fait apparaître non seulement le gain, les pôles, les zéros mais également un retard pur z^{m-n} entre une excitation en entrée du système et son effet sur la sortie.

Notons également que, comme dans le cas des systèmes à temps continu, le dénominateur de la fonction de transfert est appelé également **polynôme caractéristique** du système. Son degré n correspond à l'**ordre du système** et ses racines sont les pôles du système :

$$\begin{aligned} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \\ = a_n (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) \end{aligned}$$

1.4 Système échantillonné

1.4.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans la section 1.2, la commande par ordinateur, ou processeur, d'un procédé nécessite la mise en œuvre de conversions numérique-analogique et analogique-numérique (voir figure 1.1). La modélisation conduit donc à considérer simultanément dans la boucle un (ou plusieurs) organes à temps continu et un (ou plusieurs) éléments à temps discret. Alors qu'il est mal aisé de faire l'analyse des systèmes à temps discret en tant que systèmes à temps continu dont les entrées sorties sont non nulles uniquement par instants, la démarche inverse se révèle être très riche.

Ainsi, l'analyse d'un système commandé par ordinateur numérique passe par la définition d'un système à temps discret, comprenant le procédé commandé de nature généralement continue, et les convertisseurs numérique-analogique et analogique-numérique, que l'on peut respectivement assimiler au bloqueur d'ordre zéro et à l'échantillonneur, selon le schéma de la figure 1.6.

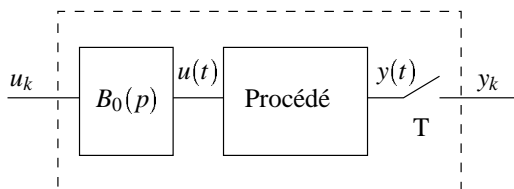


FIG. 1.6 – Procédé échantillonné

Les modèles entre u_k et y_k sont du type de ceux présentés précédemment. La suite de cette section s'intéressera aux techniques de détermination du modèle échantillonné

à temps discret obtenu à la donnée du modèle continu du procédé.

Avant cela il est important de revenir sur le choix de la période d'échantillonnage. Le **théorème de Shannon** précise que la fréquence d'échantillonnage $f = 1/T$ doit être au moins égale à deux fois la plus grande fréquence contenue dans le spectre du signal que l'on veut échantillonner. Ce résultat est exploitable uniquement à la donnée d'un signal. Cependant, le signal de sortie d'un système $y(t)$ n'est pas connu dans la problématique considérée.

Le véritable problème envisagé est celui de l'échantillonnage en sortie d'un procédé dont on connaît, par exemple, sa fonction de transfert mais la sortie du système est inconnue car elle dépend du signal d'entrée $u(t)$ qui n'est pas précisé. La méthode consiste alors à analyser les fréquences transmises par le système. En traçant le diagramme de Bode il est possible de déterminer la fréquence de coupure f_c du système et donc d'indiquer que toutes les fréquences supérieures à f_c dans le spectre du signal de sortie seront atténuées.

Théorème 1.1 *En pratique, il est recommandé de choisir la fréquence d'échantillonnage dans une fourchette de l'ordre de 6 à 24 fois la fréquence de coupure du procédé.*

Exemple 1.4

Ainsi, pour un procédé d'ordre 1 :

$$G(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

la fréquence de coupure est $f_c = 1/(2\pi\tau)$. La fréquence d'échantillonnage $f = 1/T$ sera choisie telle que :

$$\frac{6}{2\pi\tau} < \frac{1}{T} < \frac{24}{2\pi\tau}$$

soit approximativement :

$$\frac{\tau}{4} < T < \tau$$

◁

Exemple 1.5 Considérons cet autre système :

$$G(p) = \frac{p - 1}{p^3 + 2p^2 + 10.25p + 9.25}$$

Son diagramme de Bode est donné sur la figure 1.7. La fréquence de coupure est approximativement de $\omega_c = 5 \text{ rad/s}$ ou encore $f_c = \omega_c/2\pi$. Le critère de Shannon impose donc de choisir :

$$2\pi/(24 * 5) < T < 2\pi/(6 * 5) \Rightarrow 0.05 < T < 0.2$$

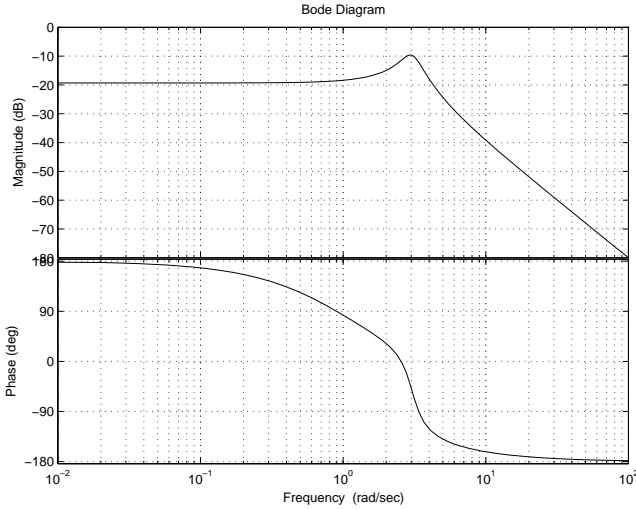


FIG. 1.7 – Diagramme de Bode du procédé

Nous choisissons $T = 0.2s$ pour observer le comportement quand l'échantillonnage implique la plus grande perte d'information. L'effet de cette période d'échantillonnage est observée sur des exemples de signaux en sortie du système. Nous avons tracé deux telles réponses sur la figure 1.8 pour une entrée impulsionnelle et une entrée en échelon. On observe que la période d'échantillonnage rend correctement compte de la réalité du signal à temps continu. Il n'y a pas de perte significative de l'information contenue dans le signal.

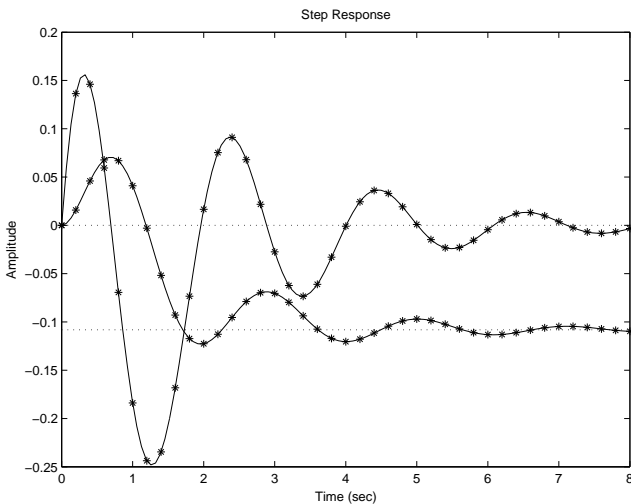


FIG. 1.8 – Sorties à temps continu et échantillonnées

Les observations peuvent également se faire avec $T = 0.05s$, quand l'échantillonnage devient élevé au regard des fréquences non-atténuées par le système. Pour ce cas nous avons fait un grossissement des premiers instants des réponses du système (voir figure 1.9). On constate

que l'échantillonnage est très dense en comparaison des dynamiques observées. Tout échantillonnage plus rapide demanderait des vitesses de capacité de traitement non nécessaires.

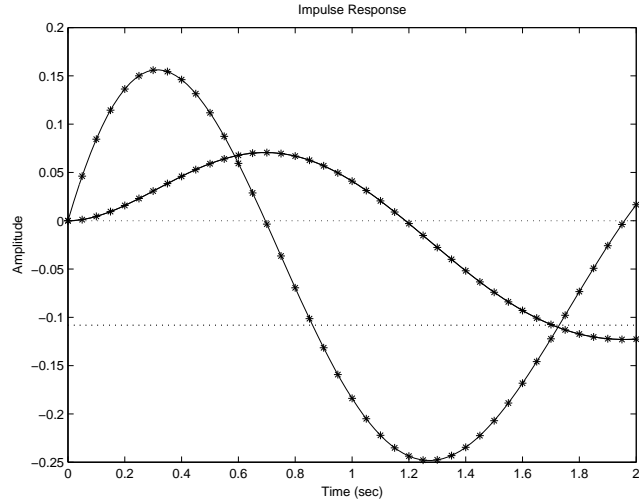


FIG. 1.9 – Sorties à temps continu et échantillonnées

◁

1.4.2 Fonction de transfert échantillonnée

Dans cette sous-section, la méthode de calcul qui permet à la donnée d'une fonction de transfert d'un système à temps continu de déduire le modèle en z du système à temps discret obtenu par échantillonnage est exposée. Elle se résume au théorème suivant.

Théorème 1.2 Soit un procédé continu modélisé par une fonction de transfert $G_c(p)$. Ce procédé, échantillonné suivant le schéma de la figure 1.6 admet une fonction de transfert en z telle que:

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(p)B_o(p)] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{G_c(p)}{p} \right]$$

Avant de procéder à la preuve de ce résultat il convient de détailler l'écriture $\mathcal{Z}[H(p)]$ où $H(p)$ est une fonction de transfert d'un système continu. Cette notation recouvre l'opération suivante:

$$H(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) \xrightarrow{T} h_k \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z)$$

A la donnée d'une fonction de transfert $H(p)$ il convient en premier lieu de calculer sa réponse impulsionnelle $h(t)$, puis d'échantillonner ce signal, $\{h_k\} \equiv \{h(kT)\}$, et enfin

de calculer sa transformée en $Z(h_k) = H(z)$. Cette procédure est détaillée par la suite sur des exemples et un tableau de conversion est fourni (tableau 1.2 page 10).

Preuve du théorème 1.2

Appelons $u^*(t)$ le signal à temps continu constitué des échantillons $u_k = u(kT)$ du signal de commande et qui vaut zéro partout ailleurs :

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \delta(t - kT)$$

La transformée de Laplace de ce signal s'écrit :

$$U^*(p) = \int_0^{+\infty} u^*(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k e^{-kTp}$$

Par définition des fonctions de transfert les signaux continus $U(p)$ et $Y(p)$ vérifient :

$$U(p) = B_0(p)U^*(p) \quad Y(p) = G_c(p)U(p)$$

Ainsi en posant $H(p) = G_c(p)B_0(p)$:

$$Y(p) = H(p)U^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} H(p)u_k e^{-kTp}$$

ce qui en appliquant le théorème du retard donne :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1} [H(p)e^{-kTp}] u_k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} h(t - kT)u_k \end{aligned}$$

avec $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)]$. Après échantillonnage, $y_l = y(lT)$, le signal à temps discret de sortie vérifie donc :

$$y_l = \sum_{k=0}^{+\infty} h_{l-k}u_k$$

qui est la convolution discrète des séquences $\{u_k\}$ et $\{h_k\}$. Il vient donc $Y(z) = G(z)U(z)$ avec :

$$G(z) = Z[H(p)] = Z[G_c(p)B_0(p)]$$

En introduisant l'expression de la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro :

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Tp}}{p} G_c(p) \right]$$

Les propriétés des transformations de Laplace et en z permettent d'écrire :

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G_c(p)}{p} \right] = \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{G_c(p)}{p} \right]$$

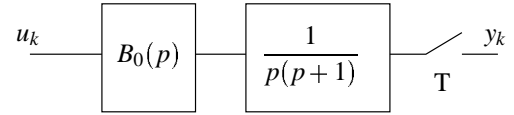


FIG. 1.10 – Système échantillonné

Exemple 1.6

Considérons le système échantillonné représenté sur la figure 1.10 et pour lequel on veut calculer la fonction de transfert en z .

La fonction de transfert continue étant :

$$G_c(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

la fonction de transfert échantillonnée est donnée par :

$$G(z) = Z[B_0(p)G_c(p)] = \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{G_c(p)}{p} \right]$$

avec la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{G_c(p)}{p} = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

En utilisant le tableau 1.1, il vient :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[-\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right]$$

soit :

$$G(z) = K \frac{(z-b)}{(z-1)(z-a)} \quad \begin{cases} K = e^{-T} - 1 + T \\ a = e^{-T} \\ b = 1 - \frac{T(1-e^{-T})}{e^{-T} - 1 + T} \end{cases}$$

Application numérique :

Soit $T = 1s$. Il vient :

$$G(z) = 0.3679 \frac{z + 0.7183}{(z-1)(z-0.3679)}$$

◁

1.4.3 Propriétés du modèle échantillonné

Suite aux formules du tableau 1.2 de la page 10 qui permettent de déterminer le modèle à temps discret d'un système continu échantillonné, nous pouvons mettre en avant quelques propriétés fondamentales de cette opération :

- Un système linéaire continu reste linéaire après échantillonnage.

Système continu $G_c(p)$	Décomposition en elt. simples $\frac{G_c(p)}{p}$	Transformée en z $Z\left[\frac{G_c(p)}{p}\right]$	Système échantillonné $G(z) = Z[G_c(p)B_0(p)]$
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$	1
$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T}{z-1}$
$\frac{b}{p+a}$	$\frac{b/a}{p} - \frac{b/a}{p+a}$	$\frac{b}{a} \frac{z}{z-1} - \frac{b}{a} \frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{b}{a} \cdot \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{b_1p+b_0}{\tau p+1}$	$\frac{b_0}{p} + \frac{b_1-\tau b_0}{\tau p+1}$	$\frac{b_0z}{z-1} + \frac{(b_1/\tau-b_0)z}{z-e^{-T/\tau}}$	$\frac{b_1/\tau(z-1)-b_0(1-e^{-T/\tau})}{z-e^{-T/\tau}}$
$\frac{1}{p(\tau p+1)}$	$\frac{-\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau^2}{\tau p+1}$	$\frac{-\tau z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{\tau z}{z-e^{-T/\tau}}$	$\frac{(\tau e^{-T/\tau} - \tau + T)z + \tau - (\tau + T)e^{-T/\tau}}{(z-1)(z-e^{-T/\tau})}$
$\frac{(p_1-p_2)p}{(p-p_1)(p-p_2)}$	$\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2}$	$\frac{z}{z-e^{p_1T}} - \frac{z}{z-e^{p_2T}}$	$\frac{(e^{p_1T} - e^{p_2T})(z-1)}{(z-e^{p_1T})(z-e^{p_2T})}$
$\frac{(p_1-p_2)p_1p_2}{(p-p_1)(p-p_2)}$	$\frac{p_1-p_2}{p} + \frac{p_2}{p-p_1} - \frac{p_1}{p-p_2}$	$\frac{(p_1-p_2)z}{z-1} + \frac{p_2z}{z-e^{p_1T}} - \frac{p_1z}{z-e^{p_2T}}$	$\frac{b_1z+b_0}{(z-e^{p_1T})(z-e^{p_2T})}$ $b_1 = p_2 - p_1 + (2p_2 - p_1)e^{p_1T}$ $+ (p_2 - 2p_1)e^{p_2T}$ $b_0 = (p_1 - p_2)e^{(p_1+p_2)T}$ $+ p_1e^{p_2T} + p_2e^{p_1T}$

TAB. 1.2 – Calcul des fonctions de transfert des systèmes échantillonnés

- L'ordre du système est conservé.
- Les pôles du système échantillonné se déduisent des pôles du système continu comme suit:

$$p_{di} = e^{p_{ci}T} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

où p_{ci} sont les pôles du système continu, p_{di} les pôles du système échantillonné et T la période d'échantillonnage.

- La période d'échantillonnage T conditionne fortement le modèle du système échantillonné.
- L'échantillonnage du produit de deux fonctions de transfert n'est pas égal au produit de leurs modèles échantillonnés respectifs. Cette dernière remarque est très importante. Le calcul d'un système échantillonné n'a de sens que s'il correspond à un transfert entre un bloqueur d'ordre zéro et un échantillonneur (voir l'exercice 1.3).

1.5 Exercices

Exercice 1.1

On souhaite modéliser l'évolution du cheptel d'un éleveur de bovins. Soit :

- x_{1k} : le nombre de vaches de 1 an,
- x_{2k} : le nombre de vaches de 2 ans,
- x_{3k} : le nombre de vaches de 3 ans et plus,

ces valeurs représentant des nombres moyens au cours de l'année k .

Les vaches de 1 an ne se reproduisent pas. Les vaches de deux ans produisent en moyenne 0.8 veau par an, celles de trois ans et plus 0.4 veau par an. D'autre part, seules celles de trois ans et plus meurent de causes naturelles avec un taux moyen de 30 % par an.

Enfin l'éleveur s'autorise à acheter ou vendre uniquement des vaches de trois ans et plus. Soit u_k le nombre de vaches achetées ($u_k > 0$) ou bien vendues ($u_k < 0$) au cours de l'année k .

1. Etablir les équations récurrentes de ce système en prenant pour sortie y_k le nombre total de vaches au cours de l'année k .
2. En déduire la fonction de transfert $\frac{Y(z)}{U(z)}$.
3. En déduire l'équation récurrente qui relie uniquement les entrées et les sorties du système.

Solution

Pour commencer on peut remarquer que le système ainsi décrit a une cadence T de un an. Cette cadence peut également s'interpréter comme une période d'échantillonnage si on considère que le procédé (élevage) est en réalité continu (les vaches existent entre deux mesures). La notion d'échantillonnage correspond au choix de compter les vaches une fois par an.

1. Les équations correspondant à l'énoncé s'écrivent :

$$\begin{aligned} x_{1_{k+1}} &= 0.8x_{2k} + 0.4x_{3k} \\ x_{2_{k+1}} &= x_{1k} \\ x_{3_{k+1}} &= x_{2k} + (1 - 0.3)x_{3k} + u_k \\ y_k &= x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} \end{aligned}$$

2. Pour obtenir la fonction de transfert on opère la transformée en z sur ce système d'équation en supposant que les conditions initiales sont nulles :

$$\begin{aligned} zX_1(z) &= 0.8X_2(z) + 0.4X_3(z) \\ zX_2(z) &= X_1(z) \\ zX_3(z) &= X_2(z) + 0.7X_3(z) + U(z) \\ Y(z) &= X_1(z) + X_2(z) + X_3(z) \end{aligned}$$

Si on remplace dans ces équations $X_1(z)$ par $zX_2(z)$ on trouve :

$$\begin{aligned} z^2X_2(z) &= 0.8X_2(z) + 0.4X_3(z) \\ zX_3(z) &= X_2(z) + 0.7X_3(z) + U(z) \\ Y(z) &= zX_2(z) + X_2(z) + X_3(z) \end{aligned}$$

On en déduit que $X_3(z) = (2.5z^2 - 2)X_2(z)$ donc :

$$\begin{aligned} z(2.5z^2 - 2)X_2(z) &= X_2(z) + (1.75z^2 - 1.4)X_2(z) + U(z) \\ Y(z) &= zX_2(z) + X_2(z) + (2.5z^2 - 2)X_2(z) \end{aligned}$$

ce qui conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (2.5z^3 - 1.75z^2 - 2z + 0.4)X_2(z) &= U(z) \\ Y(z) &= (2.5z^2 + z - 1)X_2(z) \end{aligned}$$

La fonction de transfert de ce système est donc de la forme :

$$G(z) = \frac{2.5z^2 + z - 1}{2.5z^3 - 1.75z^2 - 2z + 0.4}$$

3. L'équation récurrente décrivant entièrement l'évolution entrée/sortie du troupeau est donc obtenue en opérant la transformée inverse en z :

$$\begin{aligned} 2.5y_{k+3} - 1.75y_{k+2} - 2y_{k+1} + 0.4y_k \\ = 2.5u_{k+2} + u_{k+1} - u_k \end{aligned}$$

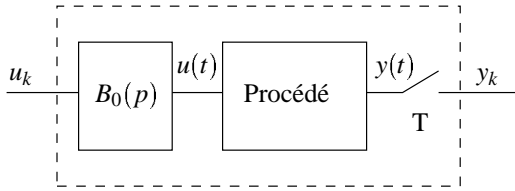


FIG. 1.11 – Procédé échantillonné

Exercice 1.2

On considère le système échantillonné représenté sur la figure 1.11.

On suppose que la fonction de transfert du procédé est :

$$G(p) = \frac{H}{1+p}$$

1. Etablir les modèles (équation récurrente, fonction de transfert en z) de ce système.
2. Mêmes questions lorsque ce système est bouclé par un retour unitaire $u_k = y_{c_k} - y_k$.

Solution

1. Modèles du procédé :

– Equation récurrente :

$$y_{k+1} - e^{-T}y_k = (1 - e^{-T})Hu_k$$

– Fonction de transfert en z :

$$G(z) = H \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

2. Modèles du système bouclé :

– Equation récurrente :

$$(1 + H)y_{k+1} - e^{-T}y_k = Hy_{c_k}$$

– Fonction de transfert en z :

$$G(z) = H \frac{1 - e^{-T}}{z + H - (1 + H)e^{-T}}$$

Exercice 1.3

Soit les systèmes interconnectés donnés par la figure 1.12.

1. On pose les notations suivantes :

$$H_1(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G_1(p)]$$

$$H_2(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G_2(p)]$$

$$H_3(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G_3(p)]$$

$$H_5(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G_1(p)G_2(p)]$$

$$H_6(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G_1(p)G_2(p)G_3(p)]$$

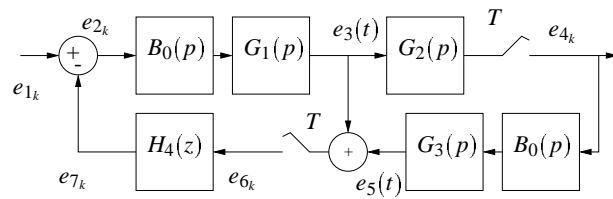


FIG. 1.12 – Schéma de trois systèmes interconnectés et régulés par $H_4(z)$

Donner l'expression de la fonction de transfert de ce système, $F(z)$, avec comme entrée e_{1k} et comme sortie mesurée e_{4k} .

2. La période d'échantillonnage est de $T = 1s$ et les fonctions de transfert sont donnée par les expressions suivantes :

$$G_1(p) = \frac{1}{p}$$

$$G_2(p) = \frac{2 \ln(2)(1 - 2p) + 2p}{p + \ln(2)}$$

$$G_3(p) = \frac{\ln(2)}{p + \ln(2)}$$

$$H_4(z) = K$$

Donner l'expression de la fonction de transfert $F(z)$ en fonction de K .

Solution

1. La première chose à faire est d'identifier les transfert entre les différents bloqueurs et les échantillonneurs. C'est uniquement entre ces deux opérateurs que l'on peut définir des systèmes échantillonnés. Le premier transfert est donné par :

$$\frac{e_4(z)}{e_2(z)} = \mathcal{Z}[B_0(p)G_1(p)G_2(p)] = H_5(z)$$

Ensuite du fait de la linéarité de la transformée en z , on peut écrire :

$$\begin{aligned} e_6(z) &= \mathcal{Z}[B_0(p)G_1(p)]e_2(z) + \mathcal{Z}[B_0(p)G_3(p)]e_4(z) \\ &= H_1(z)e_2(z) + H_3(z)e_4(z) \end{aligned}$$

Ainsi le système se réécrit comme indiqué sur la figure 1.13. Et la boucle fermée est donnée par :

$$e_4 = H_5e_2 \quad , \quad e_2 = e_1 - H_4H_1e_2 - H_4H_3H_5e_2$$

Ce qui conduit à la fonction de transfert :

$$\frac{e_4}{e_1} = F = \frac{H_5}{1 + H_4(H_1 + H_3H_5)}$$

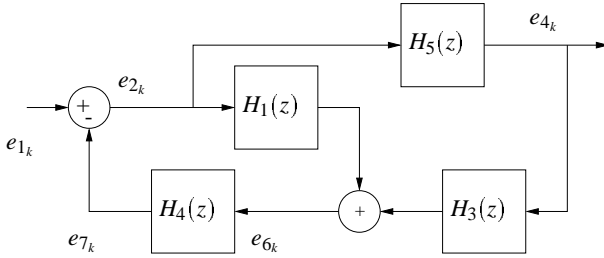


FIG. 1.13 – Schéma équivalent

Le système en boucle fermée peut donc être calculé :

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{H_5(z)}{1 + H_4(z)(H_1(z) + H_3(z)H_5(z))} \\
 &= \dots \\
 &= \frac{2(2z-1)}{(z-1)(2z-1)^2 + K((2z-1)^2 + 2)} \\
 &= \frac{4z-2}{4z^3 + (4K-8)z^2 + (5-4K)z + (3K-1)}
 \end{aligned}$$

2. Le calcul de $F(z)$ nécessite le calcul préalable des fonctions de transfert échantillonnées $H_1(z)$, $H_3(z)$ et $H_5(z)$. Commençons par $H_1(z)$:

$$\begin{aligned}
 H_1(z) &= \mathcal{Z}[B_0(p)G_1(p)] \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{G_1(p)}{p}\right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{1}{p^2}\right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} \\
 &= \frac{1}{z-1}
 \end{aligned}$$

Puis maintenant $H_5(z)$:

$$\begin{aligned}
 H_5(z) &= \mathcal{Z}[B_0(p)G_1(p)G_2(p)] \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{G_1(p)G_2(p)}{p}\right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{2\ln(2)(1-2p) + 2p}{p^2(p + \ln(2))}\right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{-4}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{4}{p + \ln(2)}\right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{-4z}{z-1} + \frac{2Tz}{(z-1)^2} + \frac{4z}{z-1/2} \right] \\
 &= \frac{1}{(z-1)(z-1/2)}
 \end{aligned}$$

et enfin $H_3(z)$ qui donne avec la même démarche :

$$\begin{aligned}
 H_3(z) &= \mathcal{Z}[B_0(p)G_3(p)] \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\frac{\ln(2)}{p(p + \ln(2))}\right] \\
 &= \frac{1/2}{z-1/2}
 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Réponse des systèmes à temps discret

Ce chapitre fait le lien entre les différents modèles des systèmes à temps discret et leur comportement dynamique en réponse à des entrées connues. Dans un premier temps le calcul des réponses en sortie est abordé et dans un second temps la notion de modes est définie et étudiée.

2.1 Calcul de la réponse

2.1.1 A partir de l'équation récurrente

Un système à temps discret peut être représenté par une équation récurrente :

$$a_n y_k = -a_{n-1} y_{k-1} - \dots - a_1 y_{k-n-1} - a_0 y_{k-n} + b_m u_{k+m-n} + \dots + b_1 u_{k-n-1} + b_0 u_{k-n}$$

avec $m \leq n$ pour des raisons de causalité.

Cette modélisation est sous forme algorithmique directement adaptable à l'implantation dans le processeur. Elle est bien adaptée à la formulation des lois de commande. Le modèle par équation récurrente n'est pas celui que l'on choisit généralement pour un calcul manuel de réponse. Il peut toutefois être utilisé pour calculer point par point la réponse comme le fait un calculateur. L'exemple suivant illustre ce calcul.

Exemple 2.1

Soit le système à temps discret suivant :

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = u_k$$

Il est supposé initialement au repos, soit :

$$y_k = 0 \quad \forall k \leq 0$$

et on applique une entrée impulsionnelle telle que

$$u_k = 0 \quad \forall k \neq 0 \quad \text{et} \quad u_0 = 1$$

L'application successive de l'algorithme conduit à :

$$\begin{aligned} y_1 &= 3y_0 - 2y_{-1} + u_{-1} = 0 \\ y_2 &= 3y_1 - 2y_0 + u_0 = 1 \\ y_3 &= 3y_2 - 2y_1 + u_1 = 3 \\ y_4 &= 3y_3 - 2y_2 + u_2 = 7 \end{aligned}$$

On peut ici reconnaître (mais ce n'est pas toujours aussi évident) la suite :

$$y_k = -1 + 2^{k-1} \quad \forall k > 0$$

qui donne l'expression analytique de la réponse cherchée.

◁

2.1.2 A partir de la fonction de transfert

Théorème 2.1 Soit $G(z)$ une fonction de transfert et $U(z) = \mathcal{Z}[u_k]$ la transformée en \mathcal{Z} d'une séquence d'entrée, sous l'hypothèse de conditions initiales nulles la réponse du système est donnée par :

$$y_k = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)U(z)]$$

Comme dans le cas des systèmes à temps continu, la fonction de transfert permet un calcul aisé des réponses uniquement dans le cas des systèmes initialement au repos. La méthode est illustrée sur l'exemple du paragraphe précédent.

Exemple 2.2

La fonction de transfert du système s'écrit :

$$G(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

La transformée en z du signal impulsionnel u_k est ici :

$$U(z) = 1$$

Il vient donc :

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

Le calcul de l'original peut se faire à partir de tables de transformées, ce qui nécessite généralement une décomposition en éléments simples. Pour simplifier les calculs il est recommandé d'effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{Y(z)}{z}$ et non pas celle de $Y(z)$. En effet, il vient ici :

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z(z^2 - 3z + 2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Ainsi on obtient une décomposition de $Y(z)$ en éléments qui sont tous des transformées de termes connus (voir tableau 1.1 page 5) :

$$Y(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

La transformée inverse s'obtient directement par application des transformées de la table :

$$y_k = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1} \right] = \frac{1}{2} \delta_k + \frac{1}{2} 2^k - 1^k$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} 2^0 - 1^0 = 0 \\ y_{k>0} &= \frac{1}{2} 2^k - 1^k = 2^{k-1} - 1 \end{aligned}$$

◁

Exercice 2.1

On considère le système régi par l'équation récurrente suivante :

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = u_k$$

Calculer sa réponse indicielle et sa réponse impulsionnelle.

Solution

Le calcul de sa réponse indicielle (réponse à une entrée en train d'impulsions unitaires $u_k = 1, \forall k \geq 0$) peut se calculer en partant des représentation en z du signal d'entrée et du modèle :

$$U(z) = \frac{z}{z-1}, \quad G(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

On a donc :

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

Par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} \end{aligned}$$

d'où :

$$Y(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-3}$$

En utilisant le tableau de transformées 1.1 page 5, il vient :

$$y_k = \frac{1}{2} 1^k - 2^k + \frac{1}{2} 3^k$$

Le calcul de sa réponse impulsionnelle (réponse à une entrée $u_0 = 1, u_k = 0, \forall k \neq 0$, i.e. $U(z) = 1$) se calcule de la même façon :

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

Par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{1}{z(z-2)(z-3)} \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{z-3} \end{aligned}$$

d'où :

$$Y(z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} + \frac{1}{3} \frac{z}{z-3}$$

En utilisant le tableau de transformées, il vient :

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_k &= -\frac{1}{2} 2^k + \frac{1}{3} 3^k \quad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

2.2 Réponses échantillonnées

Comme évoqué dans le chapitre 1, l'échantillonnage d'un signal continu conduit à une perte d'information. Sans entrer dans le détail nous allons observer ce phénomène sur deux exemples de procédés continus échantillonnés selon le modèle de la figure 2.1.

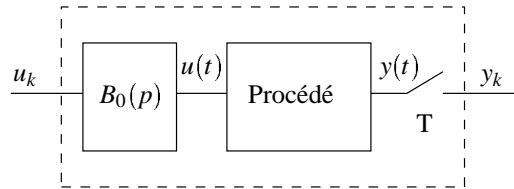


FIG. 2.1 – Procédé échantillonné

On sait associer à ce système un modèle de type discret entre la séquence d'entrée $\{u_k\}$ et la séquence de sortie $\{y_k\}$. Ce modèle permet le calcul de $\{y_k\}$ pour $\{u_k\}$ donné, mais ne permet absolument pas de retrouver le signal continu $y(t)$. La seule utilisation du modèle à temps discret ne pose généralement pas de problème pour une étude en boucle ouverte, mais peut s'avérer insuffisante pour caractériser complètement un système fonctionnant en boucle fermée. Il est préférable dans ce cas d'utiliser aussi le modèle à temps continu du procédé commandé pour déterminer $y(t)$.

Les calculs devenant complexes, les courbes qui suivent sont déterminées à l'aide du logiciel Matlab.

Exemple 2.3

Considérons le procédé continu de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{1+p}$$

Pour trois périodes d'échantillonnage différente la figure 2.2 donne la réponse y_k du système.

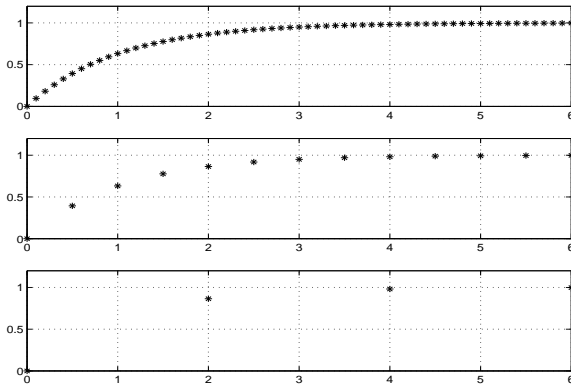


FIG. 2.2 – Trois échantillonnages différents

Dans le premier cas, $T = 0.1s$, l'échantillonnage est très rapide devant la constante de temps du système $\tau = 1s$. La réponse du système échantillonné se confond avec la réponse du système continu. En première approximation on pourrait quasiment négliger l'effet de l'échantillonnage.

Dans le troisième cas, $T = 2s$, l'échantillonnage n'est pas assez rapide pour respecter la **règle de Shannon**. Le signal discret ne rend pas compte de la réalité du processus.

Le second cas, $T = 0.5s$, est donc à préférer car l'échantillonnage rend compte fidèlement du comportement du système sans multiplier des mesures inutiles. ◀

Exemple 2.4

Considérons le système échantillonné bouclé de la figure 2.3, avec une période d'échantillonnage $T = 0.5s$ et un algorithme de commande représenté par la fonction de transfert :

$$\frac{5z - 3}{z + 1}$$

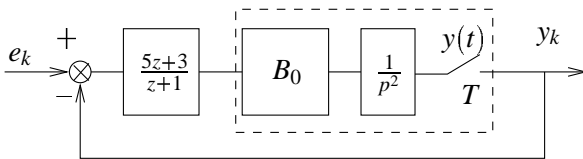


FIG. 2.3 – Système échantillonné bouclé

La figure 2.4 montre d'une part la réponse indicielle de ce système obtenue à partir des seuls modèles à temps discret, d'autre part la sortie $y(t)$ du procédé calculée à partir de son modèle à temps continu.

La constatation est que si le capteur mesure $y(t)$ avec la période d'échantillonnage $T = 0.5s$, la mesure ne rend pas compte entièrement du comportement du système à

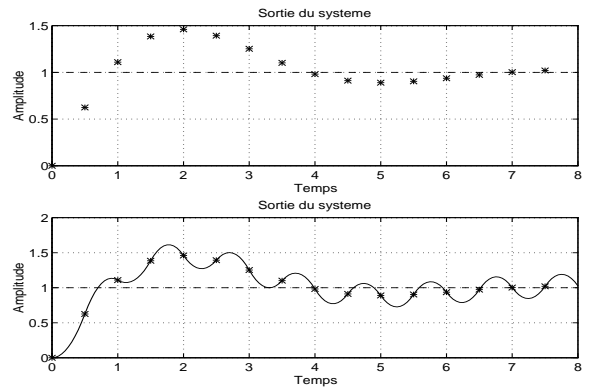


FIG. 2.4 – Echantillonnage à la période de l'oscillation

temps continu. En particulier ici, l'échantillonnage se fait exactement à la période d'un phénomène oscillant pour le système à temps continu faisant croire à la convergence du signal. ◀

2.3 Notion de modes

Nous avons établi que pour calculer la réponse d'un système à temps discret, il est possible de procéder par décomposition en éléments simples de $Y(z)/z$. Nous allons maintenant observer cette décomposition dans le cas général.

Soit $G(z)$ la fonction de transfert d'un système comprenant n_p pôles notés p_1, \dots, p_{n_p} . Chaque pôle peut éventuellement apparaître plusieurs fois dans le dénominateur. On parlera de m_i , l'ordre de multiplicité du pôle p_i ($i = 1, \dots, n_p$).

Identiquement on définit une entrée quelconque $U(z)$ pour le système. Sa transformée en z se caractérise par un polynôme au dénominateur avec un certain nombre de racines r_1, \dots, r_q .

Après avoir effectué la décomposition en éléments simples de $Y(z)/z = G(z)U(z)/z$ on trouve une représentation de la forme suivante :

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{n_p} G_i(z) + \sum_{j=1}^q U_j(z) \quad (2.1)$$

Chacun des termes de cette somme s'exprime en fonction soit d'un pôle p_i soit d'une racine du dénominateur de $U(z)$, r_j . Nous ne nous intéresserons pas à ces derniers termes dans cette partie du cours. Ils représentent ce qui est appelé le **régime forcé** du système et dépendent essentiellement du type d'entrée envoyée au système. Par contre, nous allons détailler les premiers termes $G_i(z)$ qui, même s'ils dépendent du choix du signal d'entrée, décrivent des caractéristiques intrinsèques au système $G(z)$.

Plus précisément, les fonctions $G_i(z)$ se décomposent comme suit :

$$G_i(z) = \sum_{q=1}^{m_i} \frac{\alpha_{iq}z}{(z - p_i)^q}$$

et leur transformée en z inverse s'écrit génériquement de la forme suivante :

$$\mathcal{Z}^{-1}[G_i(z)] = (\beta_0 + \beta_1 k + \dots + \beta_{m_i-1} k^{m_i-1}) p_i^k = P_i(k) p_i^k$$

Ce terme ainsi formulé est composé du produit d'un polynôme en k avec la suite géométrique des puissances du pôle p_i . On va voir que l'évolution de ce type de terme dépend essentiellement de la valeur de p_i . On parlera de **mode** associé au pôle p_i et nous allons décrire dans la suite des catégories de comportement de ces modes en fonction de la valeur (réelle ou complexe) de p_i .

Par superposition, la réponse d'un système à une entrée quelconque comprends toujours une somme de termes tels que :

$$\mathcal{Z}^{-1}[\sum_{i=1}^{n_p} G_i(z)] = \sum_{i=1}^{n_p} P_i(k) p_i^k$$

dont d'évolution temporelle est caractérisée par chacun des modes. Il y a autant de modes que le système a de pôles distincts.

Nous allons maintenant envisager tour à tour des cas simples de modes associés à différentes valeurs des pôles puis nous caractériserons la réponse globale du système composée de la superposition de tous les modes.

2.3.1 Mode réel

Un mode réel est associé à un pôle réel. Pour alléger les notations, soient p ce pôle et $\{P(k)p^k\}$ la suite correspondant à la contribution de ce pôle à la réponse du système.

Indépendamment de ce que peut être le polynôme $P(k)$, l'étude des suites nous enseigne que :

- Si $|p| < 1$, alors la suite $\{P(k)p^k\}$ converge vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$. On parle alors de mode convergent dont la convergence est portée par la suite géométrique $\{p^k\}$. La vitesse de convergence dépend essentiellement de la valeur de p . Plus la valeur de $|p|$ est faible, plus le mode converge vite vers l'origine (convergence exponentielle).
- Si $|p| > 1$, alors la suite $\{P(k)p^k\}$ diverge quand $k \rightarrow +\infty$. On parle alors de mode divergent dont la divergence est portée par la suite géométrique $\{p^k\}$. La vitesse de divergence dépend essentiellement de la valeur de p . Plus la valeur de $|p|$ est grande, plus le mode diverge vite (divergence exponentielle).

- Si $|p| = 1$ et que $P(k) = P(0)$ est un polynôme constant, alors la contribution de ce mode est un signal qui ne diverge ni ne converge. On parle alors de **mode entretenu**. Ce cas est possible uniquement si $P(k)$ est un polynôme constant (i.e. de degré zéro) ce qui est possible uniquement quand l'ordre de multiplicité du pôle est égal à $m = 1$.
- Si $|p| = 1$ et $P(k)$ est de degré non nul, alors la suite $\{P(k)p^k\}$ diverge quand $k \rightarrow +\infty$. On parle de mode divergent dont la divergence est portée par la suite $\{k^{m-1}\}$ (divergence polynômiale).
- Si $p > 0$, alors la suite $\{P(k)p^k\}$ a tendance (au signe de $P(k)$ près) à être du même signe (**mode apériodique**).
- Si $p < 0$, alors la suite $\{P(k)p^k = (-1)^k P(k) |p|^k\}$ a tendance (au signe de $P(k)$ près) à changer de signe à chaque itération (**mode oscillatoire**).
- Si $p = 0$, alors la suite $\{P(k)p^k\}$ converge vers 0 en une seule itération (**réponse pile**).

Sans entrer plus dans les détails, voici quelques exemples qui illustrent ces différentes notions.

Exemple 2.5

Soient les deux systèmes suivants composé d'un seul et même pôle.

$$G_1(z) = \frac{1}{z-2} \quad G_2(z) = \frac{-z^2 + 3z - 1.1}{(z-2)^3}$$

Les réponses à un échelon pour ces deux systèmes sont données sur la figure 2.5 (\times pour G_1 et \circ pour G_2). On constate que la divergence même si elle n'est pas exactement identique se fait avec la même vitesse approximative. L'autre constatation est que le signe de la réponse suit la courbe d'un polynôme (mode apériodique).

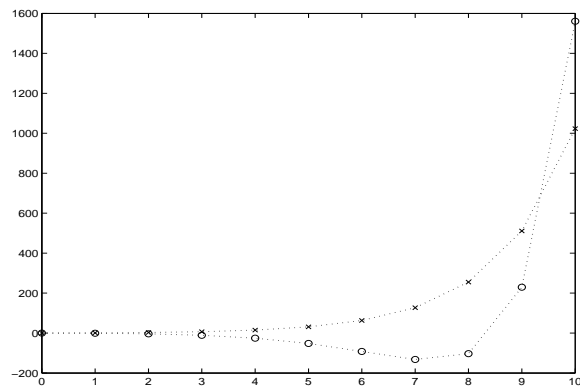


FIG. 2.5 – Réponses de l'exemple 2.5

Exemple 2.6

Soient les deux systèmes suivants composés d'un seul et même pôle.

$$G_1(z) = \frac{1}{z+0.5} \quad G_2(z) = \frac{z^2 - 1z + 1}{(z+0.5)^2}$$

Les réponses à un échelon pour ces deux systèmes sont données sur la figure 2.6 (o pour G_1 et \times pour G_2). On constate que la convergence est assez similaire même si elle n'est pas exactement identique. L'autre constatation est que le signe de la réponse alterne (mode oscillatoire).

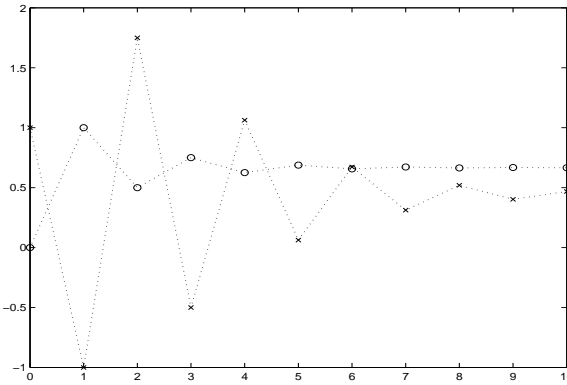


FIG. 2.6 – Réponses de l'exemple 2.6

◁

Exemple 2.7

Soient les deux systèmes suivants composés chacun d'un seul et même pôle de module égal à un.

$$G_1(z) = \frac{1}{z+1} \quad G_2(z) = \frac{0.01}{(z-1)^2}$$

Les réponses à un échelon pour ces deux systèmes sont données sur la figure 2.7 (o pour G_1 et \times pour G_2). G_1 a une réponse oscillante ni divergente ni convergente (mode entretenu oscillatoire) car le pôle -1 apparaît dans la fonction de transfert avec un ordre de multiplicité égal à un. G_2 par contre diverge sans osciller car le pôle $+1$ est positif et d'ordre de multiplicité égal à deux. La divergence n'est pas exponentielle, mais tend vers une asymptote linéaire.

◁

2.3.2 Mode complexe

Les racines d'un polynôme à coefficients réels sont soit réelles soit complexes. Dans le second cas, pour chaque pôle p tels que $\text{Im}(p) \neq 0$ il existe un autre pôle p^* complexe conjugué de p . ces deux pôles p et p^* interviennent

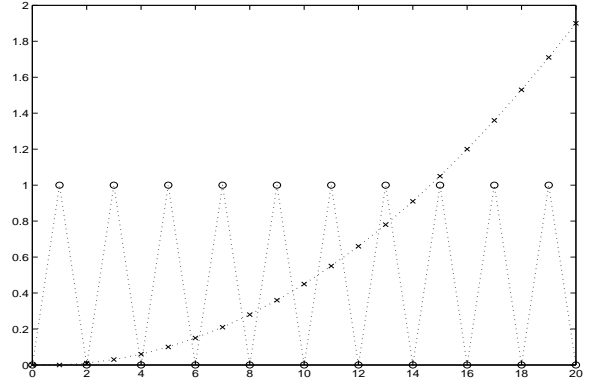


FIG. 2.7 – Réponses de l'exemple 2.7

nécessairement avec le même ordre de multiplicité. Par définition un mode complexe est associé à un couple de pôles complexes conjugués l'un de l'autre. La contribution de ce mode est de la forme suivante :

$$P_a(k)p^k + P_b(k)(p^*)^k$$

où $P_a(k)$ et $P_b(k)$ sont des polynômes à coefficients complexes du même degré, mais il est possible de montrer que la contribution conjointe des puissances de p^k et $(p^*)^k$ est nécessairement réelle. Dès lors la contribution d'un mode complexe peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$P(k)\rho^k \sin(k\theta + \phi)$$

où $P(k)$ est un polynôme à coefficients réels, où ϕ est un déphasage déterminé par la situation, où ρ est le module du pôle et où θ est l'argument du pôle. D'après les formules d'Euler on a $p = \rho e^{j\theta}$ et $p^* = \rho e^{-j\theta}$.

Indépendamment de ce peut être le polynôme $P(k)$, l'étude des suites telles que $P(k)\rho^k \sin(k\theta + \phi)$ nous enseigne les caractéristiques suivantes sur la contribution d'un mode complexe :

- Si $|p| = \rho > 1$ la réponse transitoire diverge à la vitesse de ρ^k (divergence exponentielle),
- Si $|p| = \rho < 1$ la réponse transitoire converge vers 0 à la vitesse de ρ^k (convergence exponentielle),
- Si $|p| = \rho = 1$ la réponse transitoire diverge à la vitesse du polynôme $P(k)$ et si le pôle est de multiplicité égale à 1 alors $P(k) = \alpha$ et le mode ne converge ni ne diverge (mode entretenu),
- Si $\arg(p) = \theta \neq 0$ est l'argument de p , la réponse du système oscille à cette fréquence (oscillation "portée" par la convergence de ρ^k). Le mode est oscillatoire.

Un résumé de ces comportements dynamiques est donné sur la figure 2.8 page 20.

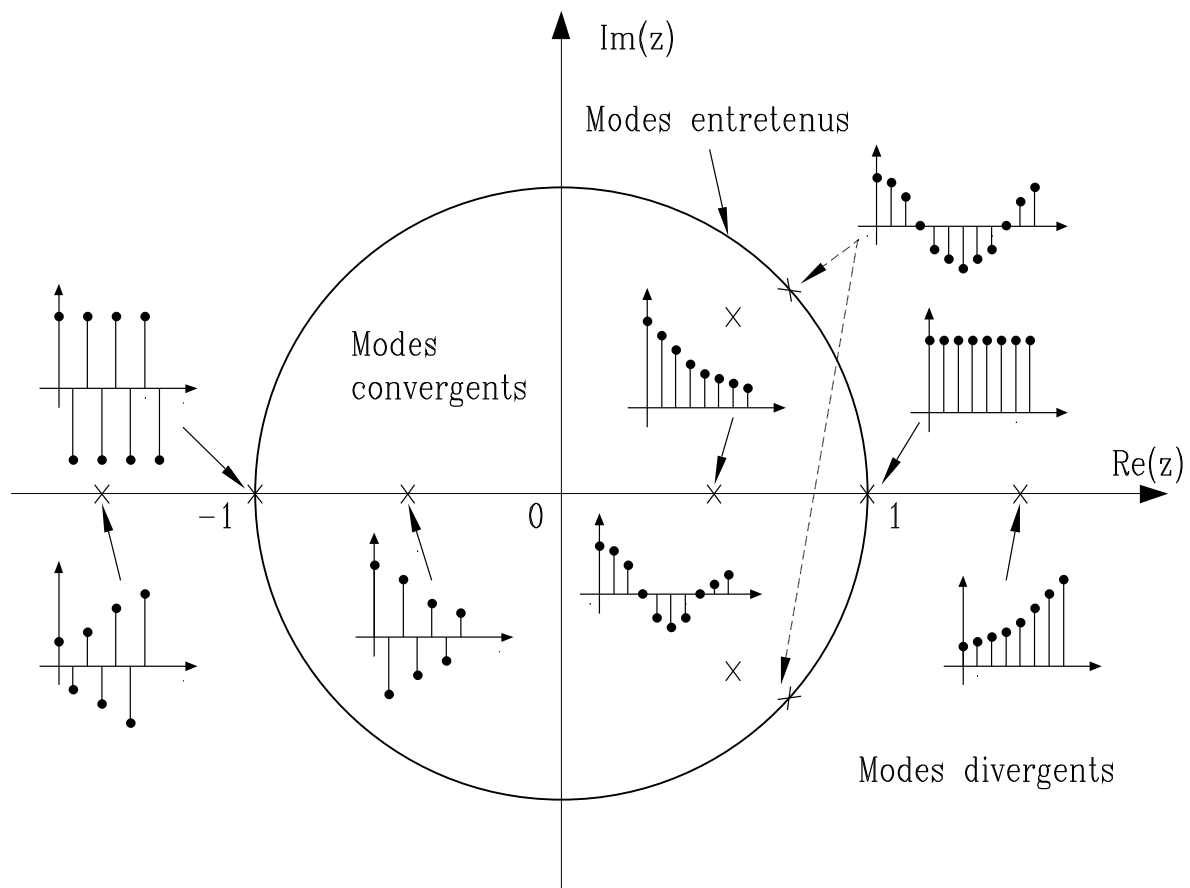


FIG. 2.8 – Allure des modes selon leur emplacement dans le plan de Laplace

Remarque 2.1 En pratique, on retiendra qu'un système à temps discret peut avoir deux sources d'oscillations: la présence de modes complexes et/ou la présence de modes à partie réelle négative. Bien entendu, ces deux phénomènes d'oscillations peuvent se superposer.

Exemple 2.8

Considérons le système de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{b_0}{z^2 + a_1z + a_0} = \frac{b_0}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}$$

La réponse impulsionnelle de ce système est obtenue en calculant l'original de sa fonction de transfert en z :

$$G(z) = \frac{b_0}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{b_0z}{(z - \lambda_1)\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{b_0z}{(z - \lambda_2)\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

soit :

$$g_k = \frac{b_0}{\lambda_1\lambda_2}\delta_k + \frac{b_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1})$$

Si les modes du système sont réels ($4a_0 \leq a_1^2$), le système est composé de deux modes réels dont le comportement dépend respectivement des valeurs de λ_1 et λ_2 .

Si les modes sont complexes conjugués ($4a_0 > a_1^2$), il vient :

$$g_{k>0} = b_0\rho^{k-2} \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

avec :

$$\rho = \sqrt{a_0} \quad \cos\theta = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$$

A la donnée de a_0 et a_1 , la réponse transitoire d'un système du second ordre est soit une somme de deux modes réels soit un mode complexe dont la convergence est donnée par le module des pôles ($\rho = |\lambda|$) et l'oscillation est donnée par leur argument ($\theta = \arg(\lambda)$).

Pour illustration les réponses impulsionnelle et indicelle pour les valeurs $b_0 = 0.5$, $a_1 = -1$ et $a_0 = 0.5$ sont données sur la figure 2.9.

Exemple 2.9

Considérons les systèmes suivants :

$$G_1 = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2 - 1.414z + 1}, \quad G_2 = \frac{1}{z^2 + 1.414z + 1}$$

$$G_3 = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^4 - 2.828z^3 + 4z^2 - 2.828z + 1}$$

Le premier système admet deux pôles complexes conjugués $\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2$. Ces pôles complexes sont de module égal à un et ils sont de multiplicité simple donc la réponse indicelle est oscillante entretenue (pas de convergence ni de divergence).

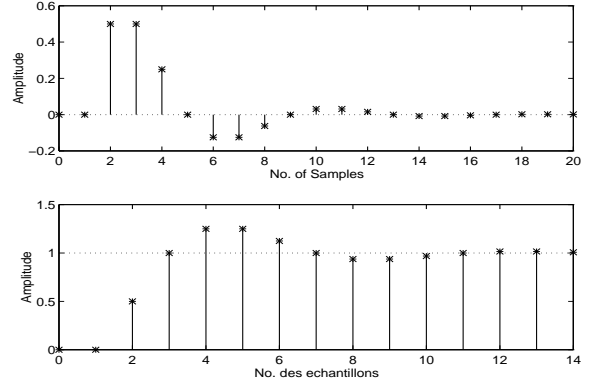


FIG. 2.9 – Réponses impulsionnelle et indicelle

Le second système admet les pôles $-\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2$ et $-\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2$. Le mode associé à ce pôle a les mêmes caractéristiques que pour G_1 si ce n'est que en plus de l'oscillation liée à $\theta \neq 0$, s'ajoute une alternance due au fait que la partie réelle est négative.

Le troisième exemple est tel que le couple de pôles $(\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2)$ est d'ordre de multiplicité égale à deux. Le système est donc oscillant avec les mêmes caractéristiques que pour G_1 mais à la différence qu'il diverge avec une vitesse polynômiale.

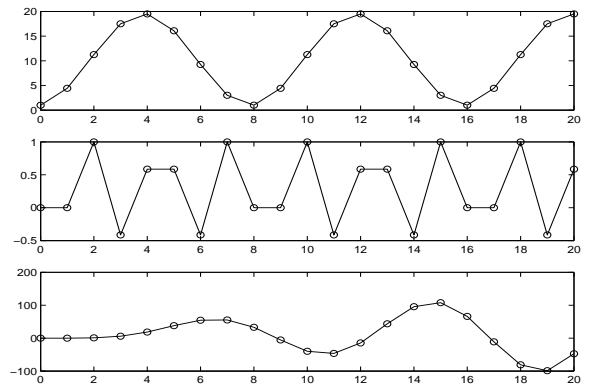


FIG. 2.10 – Réponses indicelles de l'exemple 2.9

2.3.3 Caractérisation des modes par analogie avec les systèmes continus

On rappelle que les pôles des systèmes continus peuvent être décrits par :

$$p_c = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Cette écriture générique pour les pôles complexes devient dans le cas de pôles réels ($\zeta = 1$) :

$$p_c = -1/\tau$$

Et les polynômes caractéristiques des systèmes à temps continu se factorisent avec des termes tels que :

$$p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 \quad \text{et} \quad p + 1/\tau$$

Les différents paramètres que nous venons de rappeler caractérisent les réponses des modes des systèmes continus :

- $\tau = 1/(\zeta\omega_n)$: temps de réponse du mode (le mode converge à 95% de sa valeur finale en 3τ secondes).
- $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$: pulsation propre (caractérise la pulsation de l'oscillation dans le cas d'un mode complexe).
- ω_n : pulsation propre non amortie.
- $\zeta \in [0 \ 1]$: coefficient d'amortissement (plus ζ est faible plus le mode oscille avant de converger).

Ces propriétés sont maintenant reprises pour caractériser les modes des systèmes discrets.

Nous avons établi dans la section 1.4.3 que pour les systèmes continus échantillonnés que les pôles du système discret obtenu après échantillonnage se déduisent du système continu original suivant la formule :

$$p_d = e^{p_c T}$$

où T est la période d'échantillonnage, p_c les pôles du système continu et p_d les pôles du système discret.

Ainsi partant du pôle d'un système continu ayant certaines caractéristiques en termes de temps de réponse, d'amortissement et de pulsation propre on trouve le pôles d'un système discret (fonctionnant à la période T) qui aurait les mêmes caractéristiques dynamiques :

$$\begin{array}{ll} p_c = -1/\tau & p_c = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ p_d = e^{-T/\tau} & p_d = e^{-T/\tau} (\cos(\omega_p T) \pm j \sin(\omega_p T)) \end{array}$$

Inversement un pôle réel d'un système discret, $p_d = z_r$ se caractérise par :

- un temps de réponse $\tau = -T / \ln(z_r)$, où T est la période de fonctionnement du système discret,
- des pulsation propres nulles et un amortissement $\zeta = 1$ (le mode est non oscillant).

Un pôle complexe $p_d = z_r \pm jz_i$ se caractérise par :

- un temps de réponse $\tau = -2T / \ln(z_r^2 + z_i^2)$,
- une pulsation propre $\omega_p = \frac{1}{T} \arctan(z_i/z_r)$,
- une pulsation propre non amortie $\omega_n = \sqrt{\omega_p^2 + 1/\tau^2}$,

- un amortissement $\zeta = 1/\sqrt{1 + \omega_p^2 \tau^2}$.

Exemple 2.10

En reprenant l'exemple 2.8, le mode complexe est caractérisé par le polynôme caractéristique :

$$z^2 - z + 0.5 \quad \Rightarrow \quad p_d = \frac{1}{2}(1 \pm j)$$

Ce qui conduit à :

- un temps de réponse $\tau = 2.89T$ (la convergence à 95% se fait au bout de 9 périodes),
- une pulsation propre $\omega_p = \frac{\pi}{4T}$ (la période de l'oscillation est huit fois supérieure à la période des échantillons),
- une pulsation propre non amortie $\omega_n = 0.8585/T$,
- un amortissement $\zeta = 0.4037$ (l'amortissement est indépendant de la période des échantillons).

Le temps de réponse et la pulsation propre se retrouvent sur la figure 2.9. ◁

2.3.4 Superposition des modes

Pour les procédés rencontrés en pratique, les pôles peuvent être multiples et leur effets s'additionnent sur la sortie mesurée du système. L'ensemble des possibilités n'est pas descriptible. Cependant il est parfois possible de discerner des allures dues aux différents pôles quand les dynamiques (vitesses de convergence/divergence) sont très différentes. Quelques exemples sont donnés sur la figure 2.11.

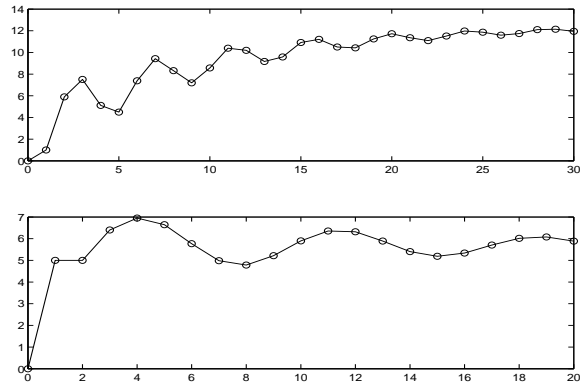


FIG. 2.11 – Réponses indicielle avec un mode réel et un mode complexe ayant des dynamiques différentes

La première de ces courbes montre un système ayant un pôle réel à convergence lente (plus de 30 itérations pour converger) et un mode fortement oscillant qui converge

rapidement (l'oscillation rejoint rapidement l'exponentielle convergente du mode réel).

La seconde courbe montre la situation inverse. Un mode réel très rapide converge dans les tout premiers instants (montée rapide vers un voisinage de l'équilibre). A cette convergence rapide s'ajoute un mode oscillant dont la convergence est plus lente.

Dans tous les cas il est important de noter que la convergence globale d'un système se fait avec la constante de temps du mode le plus lent. C'est à dire à la vitesse du mode dont le pôle à le module le plus grand.

Chapitre 3

Stabilité des systèmes à temps discret

Ce chapitre porte sur la stabilité des systèmes à temps discret. Dans un premier temps nous replaceront la notion de stabilité dans un cadre général puis nous porterons plus précisément notre attention sur la stabilité définie au sens d'un transfert borné. La suite du chapitre porte sur des techniques d'évaluation de la stabilité et conclue sur le cas des systèmes échantillonnés.

3.1 Stabilité interne des systèmes

Dans ce cours nous avons volontairement choisi de ne présenter les systèmes que sous la forme de fonctions de transferts et d'équations récurrentes. Une autre modélisation très fréquemment rencontrée s'écrit sous certaines hypothèses comme suit:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = g(x_k, u_k) \end{cases}$$

Où u représente le signal en entrée du système, y la sortie mesurée et f et g sont des fonction quelconques décrivant le fonctionnement du processus. Cette représentation a l'avantage de mettre en évidence un vecteur $x_k \in \mathbb{R}^n$ appelé état du système. Ce vecteur décrit exactement à l'instant k l'état (positions, vitesses, concentrations de produits, tensions électriques...) du système. D'usage différent de la représentation présentée dans ce cours, elle va au delà d'une dépendance entre les entrées et les sorties, pour représenter les comportements internes du processus.

La stabilité interne des systèmes est définie à la donnée de ce type de modèles. Nous donnons ici uniquement quelques brefs éléments de cette théorie. Le premier d'entre eux est la définition des points d'équilibre. On suppose que le système est placé en mode autonome ($u_k = u_e$ est une constante le plus souvent nulle) et on définit les états d'équilibre x_e comme les solution de l'équation :

$$x_e = f(x_e, u_e)$$

Ils correspondent aux situations dans les quelles si le système est dans cet état alors il ne peut pas évoluer à moins

de modifier la commande.

Ces points d'équilibre se sont en général pas uniques. Par exemple si l'on considère un pendule constitué d'une barre rigide pouvant tourner dans un plan vertical, ce système admet deux points d'équilibre quand la barre est verticale soit vers le haut soit vers le bas. Ceci est illustré sur la figure 3.1.

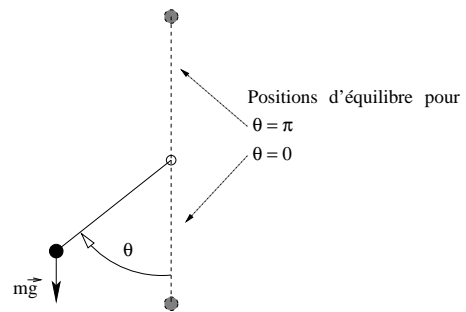


FIG. 3.1 – Positions d'équilibre du pendule rigide

Il est aisé de remarquer que les deux points d'équilibre du pendule n'ont pas le même statut. On peut spontanément qualifier l'équilibre $\theta = \pi$ d'instable et la position inverse de stable. Mathématiquement la stabilité se définit comme suit :

Définition 3.1 Un point d'équilibre x_e est :

simplement stable si quel que soit le voisinage Ω_1 de x_e , il existe un voisinage Ω_2 de x_e tel que, pour tout état initial $x_0 \in \Omega_2$, $x_k \in \Omega_1 \forall k \geq 0$.

asymptotiquement stable si il existe un voisinage Ω_1 de x_e tel que, pour tout état initial $x_0 \in \Omega_1$, $x_k \rightarrow x_e$ quand $k \rightarrow +\infty$.

globalement asymptotiquement stable si pour tout état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_k \rightarrow x_e$ quand $k \rightarrow +\infty$.

instable s'il n'est pas stable.

Par définition la stabilité indique que si le système a un état initial suffisamment proche de l'équilibre alors il ne s'en écarte pas. La stabilité asymptotique ajoute à cela que l'état du système rejoint asymptotiquement l'équilibre pour des conditions initiales suffisamment proches. Le caractère global indique que la convergence vers l'équilibre se fait pour toute condition initiale. Enfin l'instabilité indique que aussi près que l'état soit de l'équilibre considéré, il a tendance à s'en écarter.

La problématique est bien souvent pour les systèmes non-linéaires de déterminer des domaines de condition initiales pour lesquelles le système est assuré de converger vers un équilibre. Pour ce qui est des systèmes linéaires sur lesquels porte ce cours, la stabilité ou l'instabilité sont toujours des propriétés globales et le point d'équilibre est, sauf cas particulier, unique.

Nous ne détaillons pas plus la notion de stabilité interne ni la théorie de Lyapunov qui lui est associée. Cependant, on peut noter qu'à peu de différences près, pour les systèmes envisagés dans ce cours, la stabilité interne et la stabilité BIBO sont équivalentes.

3.2 Stabilité BIBO des systèmes

BIBO vient de la définition en anglais : "bounded input, bounded output". La caractérisation des systèmes stables se fait en prouvant que la sortie du système est toujours non divergente tant que le signal d'entrée est contenu dans un certain domaine. La traduction de l'anglais dit "à entrée bornée, sortie bornée". Mathématiquement la définition est :

Définition 3.2 *Un système définit par ses entrées/sorties tel que :*

$$\xrightarrow{u_k} \boxed{F} \xrightarrow{y_k}$$

est BIBO stable si pour toute entrée bornée

$$\|\{u_k\}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k| < \infty$$

la sortie est toujours bornée

$$\|\{y_k\}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k| < \infty$$

Cette définition très générale, s'applique à tout type de modèle. Dans le cas des systèmes linéaires, nous allons voir qu'elle se particularise et revient à étudier les modes du système. En effet, en reprenant les notations de la page 17 la transformée en z de la sortie du système pour toute entrée $U(z)$ est donnée par (2.1) :

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{n_p} G_i(z) + \sum_{j=1}^q U_j(z)$$

Les premiers termes ont été étudiés dans le chapitre précédent. Ils correspondent tous à des signaux soit convergent vers 0 (modes convergent exponentiellement) soit entretenus, soit divergents. S'il existe au moins un mode divergent, la sortie est non bornée, le système n'est pas stable. Si par contre tous les modes sont convergents alors le premier terme est convergent et donc borné.

Maintenant, en utilisant des arguments similaires si tous les modes sont tels que $|p_i| < 1$ et sous l'hypothèse que le signal d'entrée est borné, il est possible de montrer que le second terme décrit un signal borné :

$$\left\| Z^{-1} \left[\sum_{j=1}^q U_j(z) \right] \right\|_\infty < \infty$$

Inversement, si il existe un mode tel que $|p_i| = 1$ il est aisé de construire un signal d'entrée borné tel que la sortie y_k diverge. Le résultat pour les systèmes linéaires à temps discret est donc énoncé par le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soit $F(z)$ un système à temps discret et soient p_1, p_2, \dots, p_r ses r pôles distincts.*

1. *Si $\exists i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $|p_i| \geq 1$, alors le système est BIBO instable.*
2. *Si $\forall j = 1, \dots, r, |p_j| < 1$, alors le système vérifie la propriété interne de stabilité asymptotique et est BIBO stable.*
3. *Si $\forall j = 1, \dots, r, |p_j| \leq 1$ et $\exists i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $|p_i| = 1$, alors le système peut éventuellement vérifier la propriété interne de stabilité mais n'est pas BIBO stable.*

Exemple 3.1 Soit le système caractérisé par la fonction de transfert :

$$F(z) = \frac{0.25z}{(z - 0.5)(z - 0.25)}$$

Les pôles sont de module inférieur à 1. Le système est stable. Par exemple, sa réponse à une entrée impulsionnelle ($U(z) = 1$) s'écrit :

$$Y(z) = F(z) * 1 = \frac{z}{z - 0.5} - \frac{z}{z - 0.25}$$

$$\Downarrow Z^{-1}$$

$$y_k = f_{1k} + f_{2k} = 0.5^k - 0.25^k$$

et converge comme le montre l'évolution de f_{1k} et f_{2k} sur la figure 3.2. ◁

Exemple 3.2 Soit le système caractérisé par la fonction de transfert :

$$F(z) = \frac{z}{(z + 2)(z - 0.5)}$$

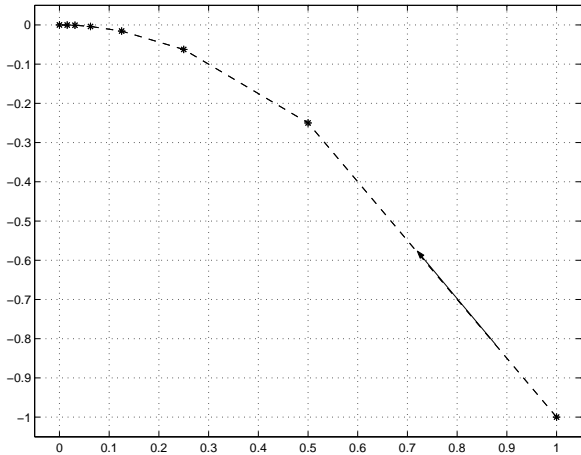


FIG. 3.2 – Système asymptotiquement stable

L'un des pôles est de module supérieur à 1 ($|-2| > 2$). Le système est instable. Par exemple, sa réponse à une entrée impulsionnelle ($U(z) = 1$) s'écrit :

$$Y(z) = F(z) * 1 = -\frac{z/1.5}{z+2} + \frac{z/2.5}{z-0.5}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y_k = f_{1k} + f_{2k} = -\frac{1}{1.5}2^k + \frac{1}{2.5}0.5^k$$

et l'une des composantes de la somme diverge comme le montre l'évolution de f_{1k} et f_{2k} sur la figure 3.3. \triangleleft

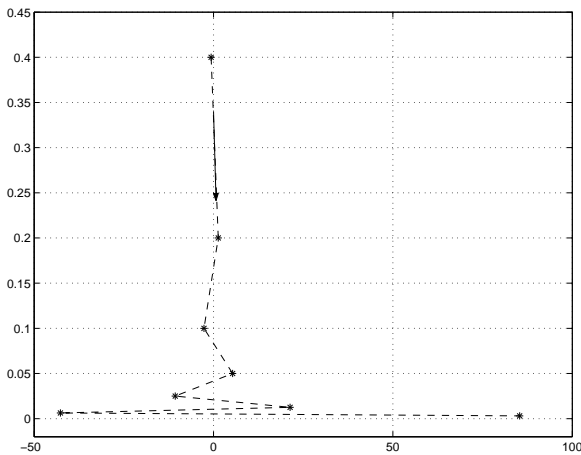


FIG. 3.3 – Système instable

Exemple 3.3 Soit le système caractérisé par la fonction de transfert :

$$F(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)}$$

Les pôles sont de module égaux à 1. Le système est BIBO instable. Par exemple, sa réponse à une entrée indicelle

($U(z) = \frac{z}{z-1}$) s'écrit :

$$Y(z) = F(z) * \frac{z}{z-1} = -\frac{z/4}{z+1} + \frac{z/4}{z-1} + \frac{z/2}{(z-1)^2}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y_k = f_{1k} + f_{2k} = [-\frac{1}{4}(-1)^k] + [\frac{1}{4}1^k + \frac{1}{2}k]$$

et l'une des composantes de la somme diverge comme le montre l'évolution de f_{1k} et f_{2k} sur la figure 3.4.

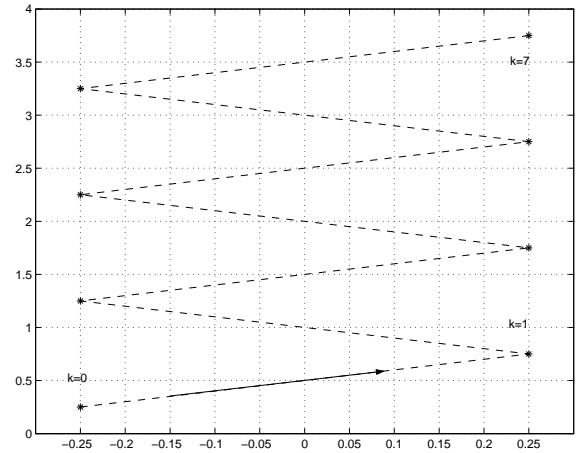


FIG. 3.4 – Système de l'exemple 3.3 en réponse à un échelon

Par contre, sa réponse à une entrée impulsionnelle ($U(z) = 1$) s'écrit :

$$Y(z) = F(z) * 1 = -\frac{z/1.5}{z+2} + \frac{z/2.5}{z-0.5}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y_k = f_{1k} + f_{2k} = -\frac{1}{2}(-1)^k + \frac{1}{2}1^k = 0.5 + 0.5(-1)^k$$

et elle ne diverge pas mais alterne entre deux valeurs. \triangleleft

Exemple 3.4 Soit le système caractérisé par la fonction de transfert :

$$F(z) = \frac{z(z-0.9\cos(\pi/4))}{z^2-2\cdot 0.9\cos(\pi/4)z+0.9^2}$$

$$+ \frac{z(z-0.85\cos(\pi/5))}{z^2-2\cdot 0.85\cos(\pi/5)z+0.85^2}$$

Les pôles sont complexes ($0.9e^{j\pi/4}$, $0.9e^{-j\pi/4}$, $0.85e^{j\pi/5}$ et $0.85e^{-j\pi/5}$) de module inférieur à 1. Le système est stable. Par exemple, sa réponse à une entrée impulsionnelle indicelle ($U(z) = 1$) s'écrit :

$$Y(z) = F(z) * 1 = \frac{z/2}{z-0.9e^{j\pi/4}} + \frac{z/2}{z-0.9e^{-j\pi/4}}$$

$$+ \frac{z/2}{z-0.85e^{j\pi/5}} + \frac{z/2}{z-0.85e^{-j\pi/5}}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y_k = f_{1k} + f_{2k} = 0.9^k \cos(k\pi/4) + 0.85^k \cos(k\pi/5)$$

et les deux composantes convergent en oscillant à des périodes différentes et avec des vitesses de convergence différentes comme le montre l'évolution de f_{1k} et f_{2k} sur la figure 3.5. \triangleleft

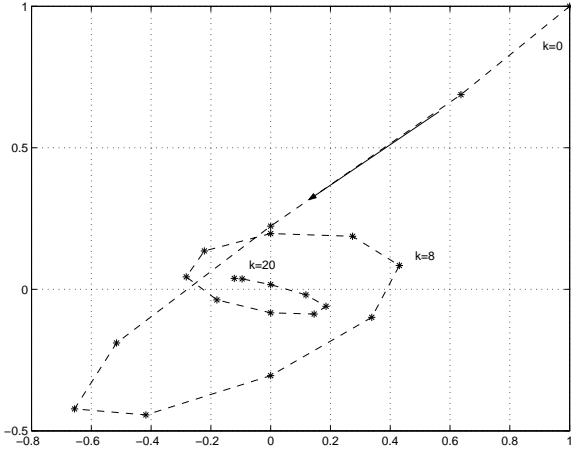


FIG. 3.5 – Système de l'exemple 3.4 en réponse à une impulsion

3.3 Critère de Jury

Le critère de Jury adresse la stabilité à partir de la connaissance du polynôme caractéristique :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Il est ainsi possible d'évaluer la stabilité d'un système partant d'une fonction de transfert en étudiant le polynôme au dénominateur sans en calculer les racines.

Théorème 3.2 *Un système linéaire à temps discret est asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients de son polynôme caractéristique vérifient les relations qui suivent. Les conditions dépendent de l'ordre du système nous ne les donnons que pour $n = 2, 3$ et 4. Les ordres supérieurs peuvent être générés sans difficulté mais sont fastidieux. Pour plus de simplicité on suppose que $a_n > 0$. Dans le cas contraire il suffit de multiplier tous les coefficients par -1 .*

$$\mathbf{n = 2 :} \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ a_2 - a_0 > 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{n = 3 :} \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0 \\ a_3 - |a_0| > 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 > 0 \end{cases}$$

$\mathbf{n = 4 :}$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0 \\ a_4^2 - a_0^2 - |a_0 a_3 - a_1 a_4| > 0 \\ (a_0 - a_4)^2 (a_0 - a_2 + a_4) + (a_1 - a_3)(a_0 a_3 - a_1 a_4) > 0 \end{cases}$$

Exemple 3.5 Soit le système dont le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(z) = z^3 + (K - 0.75)z - 0.25$$

L'application du critère de Jury conduit à l'ensemble d'équations :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = K > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 = K + 0.5 > 0 \\ a_3 - |a_0| = 1 - 0.25 > 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 = -K + 1.6875 > 0 \end{cases}$$

dont l'intersection donne $0 < K < 1.6875$ comme condition de stabilité. \triangleleft

3.4 Critère de Routh

Le critère de Jury donné dans la sous-section précédente est un critère qui atteste que les racines d'un polynôme appartiennent au disque unité ($|\lambda| < 1$) sans avoir à les calculer. Le critère de Routh quant à lui atteste que les racines d'un polynôme appartiennent au demi-plan gauche ($\Re(\lambda) < 0$). Il n'est donc pas directement applicable pour les systèmes à temps discret.

Lemme 3.1 *Soit $P(z)$ un polynôme de degré n et soit $\tilde{P}(w)$ le polynôme du même degré obtenu par la relation suivante :*

$$\tilde{P}(w) = (1 - w)^n P\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$$

Le polynôme $P(z)$ a toutes ses racines dans le disque unité ($|z_i| < 1$) si et seulement si les racines de $\tilde{P}(w)$ sont dans le demi-plan gauche ($\Re(w_i) < 0$).

Preuve

Soit la transformation bijective suivante :

$$z = \frac{1+w}{1-w} \iff w = \frac{z-1}{z+1}$$

elle transforme la variable complexe z en une nouvelle variable w telle que :

$$z = \alpha + j\beta \iff w = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1 + 2j\beta}{(\alpha + 1)^2 + \beta^2}$$

d'où :

$$|z| < 1 \iff \alpha^2 + \beta^2 < 1 \iff \Re(w) < 0$$

Ce résultat appliqué aux racines de $P(z)$ conclue la preuve. \square

Il est important de noter que la transformation en w des polynômes caractéristiques de systèmes à temps discret permet uniquement d'appliquer le critère de Routh. Aucune autre utilisation de cette transformation n'est conseillée. Il ne faut en aucun cas confondre ce résultat avec des transformations donnant une équivalence entre un système discret et un système continu. Le polynôme $\tilde{P}(w)$ n'a aucune interprétation en Automatique.

Théorème 3.3 *Soit le polynôme donné par :*

$$\tilde{P}(w) = \alpha_n w^n + \alpha_{n-1} w^{n-1} + \dots + \alpha_1 w + \alpha_0$$

ses racines appartiennent au demi-plan gauche ($\Re(w_i) < 0$) si et seulement si tous ses coefficients α_i sont du même signe et que les coefficients de la première colonne du tableau de Routh sont également du même signe.

Soit q l'arrondi vers le bas de $n/2$ (par exemple pour $n = 5$, on trouve $q = 2$). Le tableau de Routh est composé de $n + 1$ lignes et q colonnes et se construit comme suit :

$$\begin{array}{cccccc} \beta_{n,0} & \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,q-1} & \beta_{n,q} & 0 \\ \beta_{n-1,0} & \beta_{n-1,1} & \beta_{n-1,2} & \dots & \beta_{n-1,q-1} & \beta_{n-1,q} & 0 \\ \beta_{n-2,0} & \beta_{n-2,1} & \beta_{n-2,2} & \dots & \beta_{n-2,q-1} & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \beta_{2,0} & \beta_{2,1} & 0 & & & & \\ \beta_{1,0} & 0 & & & & & \\ \beta_{0,0} & 0 & & & & & \end{array}$$

avec pour $i = n$ et $i = n - 1$ les coefficients du polynôme rangés de deux en deux tels que :

$$\beta_{n,j} = \alpha_{n-2j} \quad , \quad \beta_{n-1,j} = \alpha_{n-1-2j}$$

et pour $i \leq n - 2$ la relation suivante :

$$\beta_{i,j} = \frac{\beta_{i+1,0}\beta_{i+2,j+1} - \beta_{i+1,j+1}\beta_{i+2,0}}{\beta_{i+1,0}}$$

symboliquement représentée par le produit en croix :

$$\left| \begin{array}{cc} \beta_{i+2,0} & \beta_{i+2,j+1} \\ \beta_{i+1,0} & \beta_{i+1,j+1} \end{array} \right. \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}$$

Exemple 3.6 Reprenons l'exemple précédent dont le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(z) = z^3 + (K - 0.75)z - 0.25$$

Par transformation bilinéaire, il vient le polynôme :

$$w^3(K + 0.5) + w^2(3 - K) + w(4.5 - K) + K$$

La table de Routh correspondante s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} K + 0.5 & 4.5 - K & 0 \\ 3 - K & K & 0 \\ \frac{-8K + 13.5}{3 - K} & 0 & \\ K & 0 & \end{array}$$

Le polynôme en w aura toutes ses racines à partie réelle négative (et par conséquent, le polynôme $P(z)$ aura ses racines de module inférieur à 1) si tous ses coefficients sont de même signe et si les éléments de la première colonne de la table de Routh sont de même signe. Ceci conduit à la satisfaction simultanée de l'ensemble de conditions suivantes :

$$\begin{cases} K + 0.5 > 0 \\ 3 - K > 0 \\ 4.5 - K > 0 \\ K > 0 \\ -8K + 13.5 > 0 \end{cases}$$

soit la condition de stabilité $0 < K < 1.6875$. \triangleleft

3.5 Systèmes échantillonnés

3.5.1 Etude en boucle ouverte

Considérons le système échantillonné en boucle ouverte représenté sur la figure 3.6.

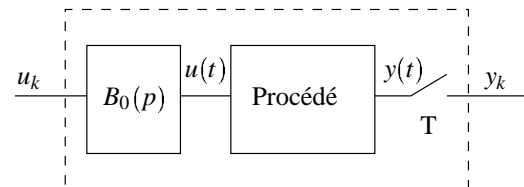


FIG. 3.6 – Procédé échantillonné

Le procédé continu est représenté par une fonction de transfert $F_c(p)$ et sa stabilité est déterminée par les pôles λ_i . La condition nécessaire et suffisante de stabilité est donnée par :

$$\Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall \lambda_i$$

Considérons maintenant le système échantillonné dont la fonction de transfert s'écrit $F_d(z) = Z[B_0(p)F_c(p)]$ et notons ces pôles μ_i . La condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique est donnée par :

$$|\mu_i| < 1 \quad \forall \mu_i$$

En raison de la correspondance :

$$\Re(\lambda_i) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\mu_i| = |e^{\lambda_i T}| < 1$$

on constate qu'un système continu stable en boucle ouverte est également stable en échantillonné. Ceci est par ailleurs tout à fait trivial. Les signaux bornés restent bornés quand ils sont échantillonnés et quand ils passent par un bloqueur d'ordre zéro.

La stabilité des systèmes pris de façon isolée n'est pas alternée par l'échantillonnage. Il en va autrement dans le cas des systèmes échantillonnés bouclés, comme on va le constater dans le paragraphe suivant.

3.5.2 Etude en boucle fermée

Sur un exemple nous montrons que la période d'échantillonnage influe la stabilité ou non d'une boucle de rétroaction. De manière générale, il peut être observé que le fait de remplacer une régulation analogique par une régulation numérique demande de s'assurer que la période d'échantillonnage choisie n'entraîne pas une perte des propriétés initiales.

Exemple 3.7 Considérons la régulation continue représentée sur la figure 3.7. La fonction de transfert du système en boucle ouverte est d'ordre 2. Le système est asymptotiquement stable quel que soit $K > 0$.

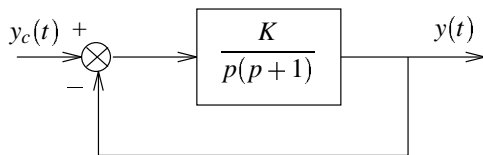


FIG. 3.7 – Régulation continue

Considérons le même système dans le cas d'une régulation échantillonnée selon le schéma de la figure 3.8.

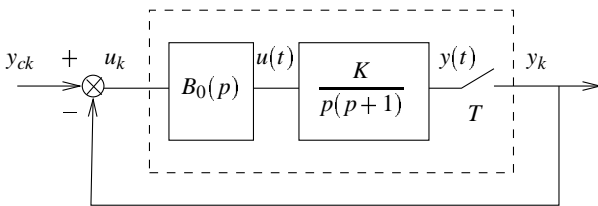


FIG. 3.8 – Régulation échantillonnée

La fonction de transfert en boucle ouverte du système

échantillonné a pour expression :

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[B_0(p) \frac{K}{p(p+1)} \right] \\ &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{K}{p^2(p+1)} \right] \\ &= \frac{(z-a)Kb}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$

avec $a = \frac{e^{-T}(T+1)-1}{e^{-T}+T-1}$ et $b = e^{-T} - 1 + T$. La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit alors comme suit :

$$\frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{(z-a)Kb}{z^2 + (Kb - 1 - e^{-T})z + e^{-T} - Kba}$$

En appliquant le critère de Jury le système est asymptotiquement stable si et seulement si :

$$\begin{cases} e^{-T} - Kba + Kb - 1 - e^{-T} + 1 > 0 \\ e^{-T} - Kba - Kb + 1 + e^{-T} + 1 > 0 \\ 1 - e^{-T} + Kba > 0 \end{cases}$$

Ces conditions sont fortement conditionnées par la valeur de l'échantillonnage. Par exemple pour $T = 1s$ et $T = 10s$ on trouve respectivement :

$T = 1s$	$T = 10s$
$\begin{cases} K > 0 \\ 12.2 > K \\ 2.4 > K \end{cases}$	$\begin{cases} K > 0 \\ 0.25 > K \\ 1 > K \end{cases}$

On constate ainsi qu'une augmentation de K et/ou de T conduisent à l'instabilité de ce système. ◁

3.6 Exercices

Exercice 3.1

Soit le système $F(z)$ de l'exercice 1.3 de la page 12 ;

$$F(z) = \frac{4z - 2}{4z^3 + (4K - 8)z^2 + (5 - 4K)z + (3K - 1)}$$

Etudier la stabilité de $F(z)$ en fonction du paramètre K à l'aide du critère de Jury.

Solution On est en présence d'un système du troisième ordre. Le critère de Jury est donc composé de quatre conditions. La première est :

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0$$

ce qui correspond à la somme de tous les coefficients du polynôme dénominateur de la fonction de transfert. Pour la fonction $F(z)$ cette condition donne :

$$3K > 0 \quad \Rightarrow \quad K > 0$$

La seconde condition du critère de Jury donne :

$$-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 18/11$$

La troisième condition s'écrit :

$$a_3 - |a_0| > 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < K < 5/3$$

Enfin la troisième condition est :

$$a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 3(K-1)^2 > 0$$

On en déduit que le système est stable pour toute valeur de K comprise dans les intervalles suivants :

$$\mathcal{K}_{\text{stab.}} =]0, 1[\cup]1, \frac{18}{11}[$$

Les valeurs 0, 1 et $\frac{18}{11}$ conduisent à des systèmes à la limite de la stabilité. Par exemple pour $K = 1$ on trouve un système $F(z)$ tel que :

$$F(z) = \frac{4z-2}{4z^3-4z^2+z+2}$$

dont les pôles sont données sur la figure 3.9. Les deux pôles complexes sont de module égal à un et correspondent à un mode oscillant entretenu. Le système est BIBO instable mais vérifie la stabilité interne dans ce cas.

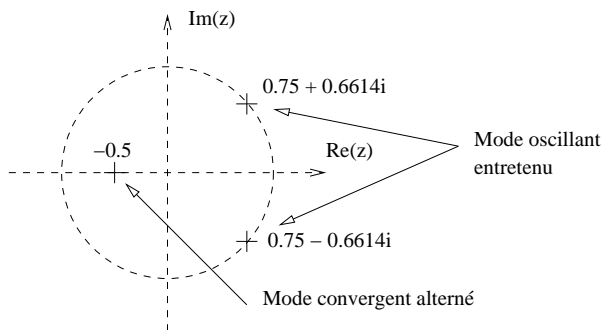


FIG. 3.9 – Pôles du système pour $K = 1$

Chapitre 4

Synthèse : Gain de rétroaction

A ce stade, nous avons établi un ensemble de notions et d'outils mathématiques qui permettent de décrire le fonctionnement des systèmes. Les chapitres qui suivent sont dédiés à la synthèse de correcteurs. L'objectif est d'obtenir par le calcul une loi de commande qui connaissant les mesures en temps réel réalisées sur le système et les consignes imposées par un utilisateur, agit sur les entrées du système. Globalement, l'objet à réaliser fonctionne en temps réel en parallèle du système comme décrit sur le schéma 4.1.

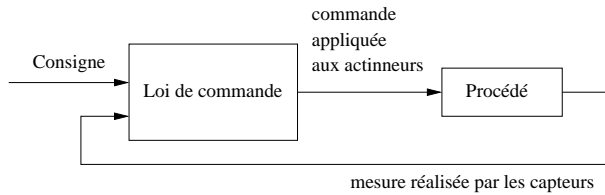


FIG. 4.1 – Loi de commande

Dans ce cours nous aborderons uniquement des lois de commande sous forme de modèles linéaires. Elles seront représentées soit par des équations récurrentes (c'est en général sous cette forme que les lois de commande sont réalisées en pratique), soit par des fonctions de transfert.

4.1 Introduction

Ce premier chapitre s'intéresse au cas le plus simple de synthèse : la synthèse d'un gain statique pour les systèmes ayant une entrée et une sortie. Dans ce cas la loi de commande se résume à deux coefficients représentés sur le schéma 4.2.

On note u_k le signal de commande, y_k le signal de mesure, y_{c_k} le signal de consigne et $v_k = K_c y_{c_k}$. Partant d'un procédé décrit par une fonction de transfert $Y(z) = G(z)U(z)$ on trouve :

$$Y(z) = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)}V(z) \quad Y(z) = \frac{K_c KG(z)}{1 + KG(z)}Y_c(z)$$

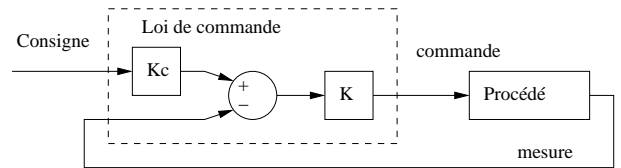


FIG. 4.2 – Loi de commande par un gain de rétroaction et un gain de pré-commande

et en détaillant les polynômes au numérateur et au dénominateur de la fonction de transfert $G(z) = N(z)/D(z)$:

$$Y(z) = \frac{KN(z)}{D(z) + KN(z)}V(z) \quad Y(z) = \frac{K_c KN(z)}{D(z) + KN(z)}Y_c(z)$$

4.2 Calcul du gain de rétroaction

Le gain de rétroaction K permet essentiellement d'assurer la stabilité de la boucle fermée. C'est ce gain uniquement qui agit sur le dénominateur de la boucle fermée et donc sur les pôles. Au delà de la stabilité, l'objectif est d'imposer des dynamiques. La première spécification impose que les pôles du système bouclé soient tous de module inférieur à l'unité, la seconde revient à imposer des contraintes plus strictes sur ces mêmes pôles (voir chapitre 2 et la notion de modes).

4.2.1 Critères de Jury et Routh

Les critères de Jury et de Routh abordés dans le chapitre 3 permettent de donner des conditions pour la stabilité des systèmes à la donnée des coefficients du polynôme caractéristique. Dès lors en appliquant ces critères au polynôme $D(z) + KN(z)$ il est possible d'écrire les conditions sur K pour que la boucle fermée soit stable.

Une application du critère de Jury dans cet objectif est donnée dans l'exemple 3.7. De plus en choisissant :

$$D(z) = z^3 - 0.75z - 0.25 \quad N(z) = z$$

l'exemple 3.6 montre une application du critère de Routh pour la synthèse du gain de rétroaction.

4.2.2 Lieu d'Evans

Définition 4.1 *Le lieu d'Evans d'un système $G(z) = N(z)/D(z)$ se définit comme le lieu des racines du polynôme $D(z) + KN(z)$ pour toutes les valeurs de $K \in \mathbb{R}^+$.*

Par définition le lieu d'Evans représente l'ensemble des configurations possibles pour les pôles de la boucle fermée représentée sur la figure 4.2. Nous choisissons de donner uniquement quelques résultats de construction du lieu d'Evans sans en détailler les preuves. Le plus souvent le lieu d'Evans est de nos jours tracé l'aide de logiciels comme par exemple MATLAB. Dans la CONTROL TOOLBOX la fonction qui permet de tracer le lieu d'Evans est `rlocus`.

Notations :

Le dénominateur de $G(z)$ est donné par

$$D(z) = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)$$

où les p_i sont les n pôles du système. Le numérateur de $G(z)$ donné par

$$N(z) = K_g(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)$$

où les z_i sont les m zéros du système et K_g est un gain. Pour chaque pôle et zéro on note :

$$\theta_i(z) = \arg(z - p_i) \quad \phi_i(z) = \arg(z - z_i)$$

les arguments (ou phases) des vecteurs de \mathbb{C} reliant respectivement les pôles et les zéros au point z .

Méthode de construction pour $K_g > 0$

Le lieu d'Evans de $G(z)$ est constitué de n courbes continues dans le plan complexe \mathbb{C} appelées également branches du lieu d'Evans. Globalement le lieu d'Evans est symétrique par rapport à l'axe réel.

- Les points de départ du lieu d'Evans sont les n pôles p_i représentés par une croix.
- Le lieu d'Evans comporte m branches qui convergent vers les zéros z_i quand K devient grand.
- Le lieu d'Evans comporte $n - m$ branches qui divergent asymptotiquement vers des droites caractérisées par un point d'intersection réel unique :

$$\sigma_a = \frac{1}{n - m} \left[\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right]$$

et qui font des angles avec l'axe réel tels que :

$$\Phi_a \equiv \frac{\pi}{n - m} \left[\frac{2\pi}{n - m} \right]$$

- Une portion de l'axe réel appartient au lieu d'Evans si le nombre de pôles et zéros réels à sa droite est impaire.
- Les points de rencontre et d'éclatement sont parmi les solutions réelles de l'équation :

$$\frac{dD(z)}{dz}N(z) - \frac{dN(z)}{dz}D(z) = 0$$

Le lieu d'Evans admet une tangente verticale en ces points.

- Les points d'intersection avec le cercle unité sont obtenus comme solutions (k, θ) de l'équation complexe :

$$D(e^{j\theta}) + KN(e^{j\theta}) = 0$$

- Au départ d'un pôle complexe p_k , le lieu d'Evans à une tangente d'angle :

$$\pi - \sum_{i \neq k} \theta_i(p_k) + \sum_i \phi_i(p_k)$$

- A l'arrivée sur un zéro complexe z_k , le lieu d'Evans à une tangente d'angle :

$$\pi - \sum_{i \neq k} \phi_i(z_k) + \sum_i \theta_i(z_k)$$

Méthode de construction pour $K_g < 0$

Dans ce cas la construction est quasiment identique. Les différences sont les suivantes :

- Angles des asymptotes aux branches infinies :

$$\tilde{\Phi}_a \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n - m} \right]$$

- Angle au départ d'un pôle complexe p_k :

$$- \sum_{i \neq k} \theta_i(p_k) + \sum_i \phi_i(p_k)$$

- Angle d'arrivée sur un zéro complexe z_k :

$$- \sum_{i \neq k} \phi_i(z_k) + \sum_i \theta_i(z_k)$$

Exemple 4.1 Reprenons l'exemple 3.6 qui correspond à l'analyse de la stabilité du système

$$G(z) = \frac{z}{z^3 - 0.75z - 0.25}$$

bouclé par une rétroaction K .

Le lieu d'Evans de ce système est tracé sur la figure 4.3 ainsi que sur la figure 4.4 (tracé obtenu avec Matlab).

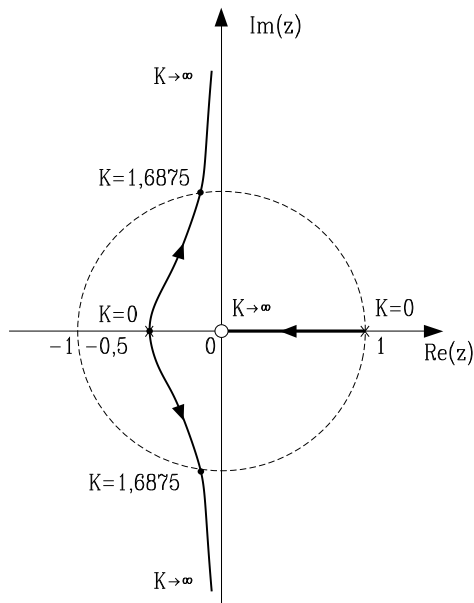


FIG. 4.3 – Lieu d’Evans de $G(z) = \frac{z}{z^3 - 0.75z - 0.25}$

Le lieu d’Evans a les caractéristiques suivantes :

- Il y a autant de branches que le système $G(z)$ contient de pôles. Dans l’exemple le système est d’ordre 3, les trois branches représentent les valeurs prises par les trois pôles du système bouclé quand K croît de 0 à $+\infty$.
- le lieu d’Evans est symétrique par rapport à l’axe réel.
- Chacune des branches part ($K = 0$) d’un pôle du système en boucle ouverte (pôles de $G(z)$) et tend ($K \rightarrow +\infty$) soit vers un zéro de la boucle ouverte (racine du numérateur de $G(z)$) soit vers l’infini. Dans l’exemple, l’un des pôles de la boucle fermée est situé en fonction de la valeur de K entre le point $z = 1$ (pôle de la boucle ouverte) et le point $z = 0$ (zéro de la boucle ouverte), les deux autres pôles sont complexes conjugués et sont situés en $z = -0.5 \pm j0$ pour $K = 0$ (pôles de la boucle ouverte) et suivent une asymptote d’angle de $\pi/2$ quand K prend de grandes valeurs.

A partir de ce tracé on note que qu’à partir de la valeur $K = 1.6875$ les pôles de la boucle fermée sortent du disque unité. On en déduit que a boucle fermée est stable uniquement si $0 < K < 1.6875$.

En plus de ces informations, le lieu d’Evans permet de conclure que quelle que soit la valeur de K le système est

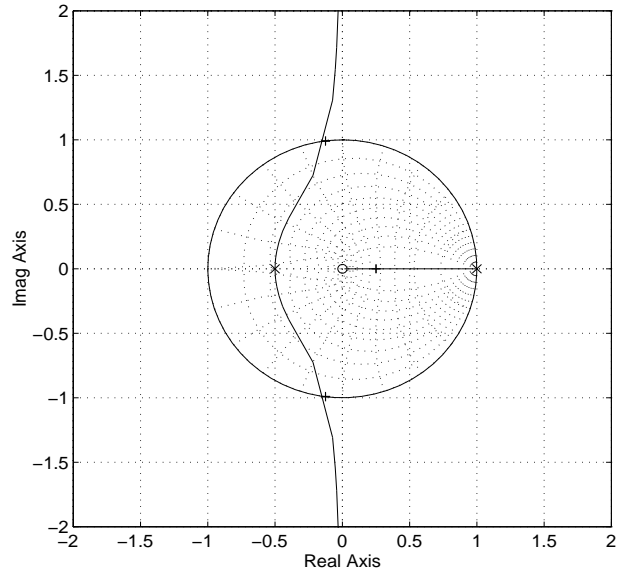


FIG. 4.4 – Lieu d’Evans obtenu avec Matlab

composé de deux mode. L’un réel devient de plus en plus rapide à mesure que K est grand (le pôle se rapproche de l’origine). Le second mode quand à lui est de plus en plus oscillant et de plus en plus lent à mesure que K est pris grand (partie imaginaire du pôle et le module augmentent).

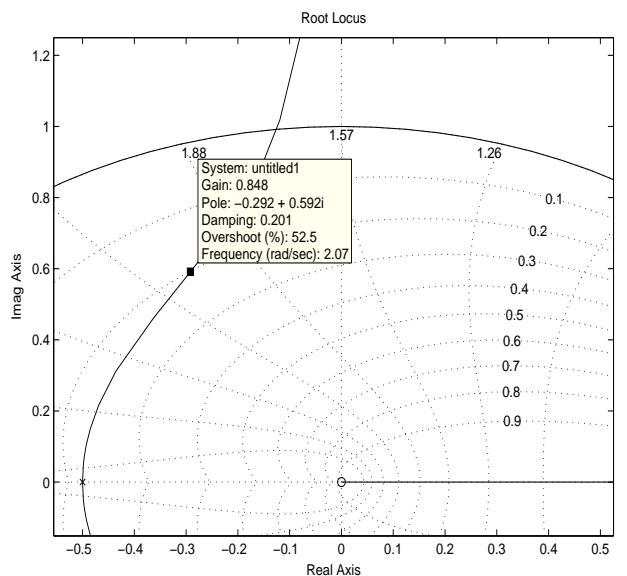


FIG. 4.5 – Zoom sur le lieu d’Evans et choix d’un gain

De ces constatations, il est possible de faire un choix de K en vue d’assurer une rapidité globale au système et éviter de trop grandes oscillations (voir section 2.3.3 pour la définition de ces propriétés). Si l’objectif du choix de K est d’avoir un amortissement de $\zeta = 0.2$ il est possible de

choisir directement sur la courbe la valeur de K associée. Ceci est fait sur le zoom de la figure 4.5. Le point sélectionné est sur la courbe iso-amortissement $\zeta = 0.2$. Matlab renvoie la valeur du gain $K = 0.848$ correspondant et indique que la pulsation propre non amortie associée est de 2.07rad/s (en ayant fait le choix de $T = 1\text{s}$ pour la période des échantillons). ◁

Exemple 4.2 Reprenons l'exemple 3.7. La stabilité du modèle échantillonné bouclé dépend du choix de l'échantillonnage T . Ce résultat se retrouve quand on trace les lieu d'Evans des deux systèmes

$$G(z) = Z \left[B_0(p) \frac{1}{p(p+1)} \right]$$

obtenus avec les deux échantillonnage $T = 1\text{s}$ et $T = 10\text{s}$.

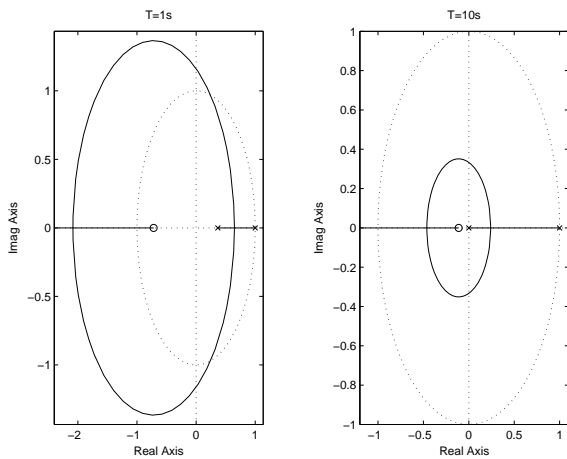


FIG. 4.6 – Lieu d'Evans pour différentes valeurs de T

Les courbes 4.6 montrent que le choix de la période d'échantillonnage modifie fortement le type de comportement atteignable par la boucle fermée. ◁

4.3 Calcul du gain de pré-commande

Un gain de rétroaction K étant choisi, le gain de pré-commande K_c est utilisé pour régler le gain statique du système en réponse à la consigne.

Définition 4.2 Le gain statique d'un système est la valeur à l'infini de la sortie du système en réponse à un échelon unité. Il caractérise également le rapport entre l'entrée et la sortie quand le système est à l'équilibre.

Théorème 4.1 Le gain statique d'un système décrit par sa fonction de transfert $F(z)$ est donné par :

$$F_s = \lim_{z \rightarrow 1} F(z)$$

Preuve Soit l'échelon unité $U(z) = \frac{z}{z-1}$, la réponse du système à cet échelon est $Y(z) = F(z)U(z)$. D'après le théorème de la valeur finale la sortie du système converge vers :

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z)U(z) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z)$$

Ce qui d'après la définition correspond au gain statique. ◻

Comme nous l'avons indiqué, le gain de pré-commande permet de régler le gain statique de la boucle en réponse à la consigne. En effet, la réponse du système régulé pour un signal de consigne y_c s'écrit :

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{K_c K G(z)}{1 + K G(z)}$$

et son gain statique est donné par (la limite quand z tend vers 1 est atteinte dès lors que le système est asymptotiquement stable) :

$$F_s = \frac{K_c K G(1)}{1 + K G(1)}$$

On souhaite généralement régler ce gain statique à l'unité. Ainsi, quand l'utilisateur envoie une consigne constante, $y_{ck} = y_{co}$, le système, stable par le choix de K , converge vers la valeur de consigne, $y_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y_{co}$.

Pour assurer un gain statique unitaire on prend :

$$K_c = \frac{1 + K G(1)}{K G(1)}$$

4.4 Exercices

Exercice 4.1

On considère le système de l'exercice 1.1 de la page 11. Il s'agit de l'évolution du cheptel d'un éleveur de bovins où l'action de commande consiste à acheter ou vendre des vaches et la mesure est la somme totale de bovins. On rappelle que le modèle est donné par :

$$G(z) = \frac{2.5z^2 + z - 1}{2.5z^3 - 1.75z^2 - 2z + 0.4}$$

1. Etudier la stabilité du système en boucle ouverte.
2. On considère une loi de commande statique telle que :

$$u_k = K(K_c y_c - y_k)$$

Etudier la stabilité et le comportement en régime transitoire de ce système en fonction de K . Illustrer le comportement de ce système pour des valeurs remarquables de K en considérant que la consigne fixée par l'éleveur est d'avoir un cheptel de trente vaches ($y_c = 30$).

Solution

1. Les pôles de $G(z)$ sont :

$$\lambda_1 = -0.72 \quad \lambda_2 = 1.24 \quad \lambda_3 = 0.18$$

Le système est donc instable. Il possède deux modes stables et un mode instable aperiodique ($\lambda_2 > 1$). Ceci signifie que toute initialisation non nulle du troupeau conduit à une augmentation tendant vers l'infini de la population.

2. Le tracé du lieu d'Evans du système est donné sur la figure 4.7. Il permet de voir que la stabilité est atteinte uniquement pour $1.86 > K > 0.33$. On peut alors distinguer plusieurs types de choix de K qui assure la stabilité :

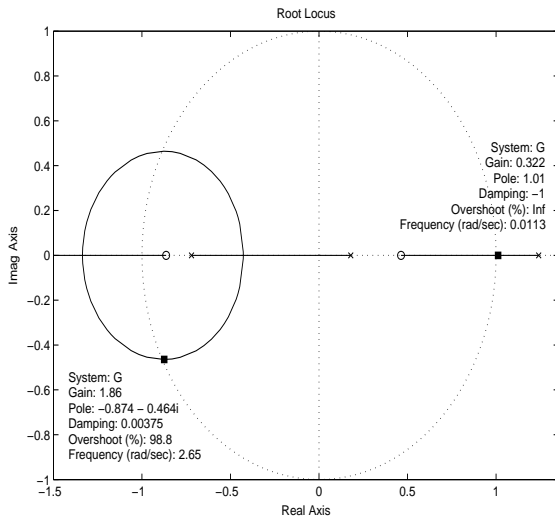


FIG. 4.7 – Lieu d'Evans

a - Si K est pris assez proche de 0.33. Alors les trois pôles sont réels et stables et l'un des pôles est oscillant car négatif. Ce qui domine dans ce cas c'est le mode associé au pôle proche $z = 1$. Il est de module élevé ce qui conduit à un système bouclé très lent.

A titre d'illustration, la réponse du système à l'état initial x_0 est représentée sur la figure 4.8 avec $K = 0.4$. Le tracé est fait avec un choix de $K_c = 0.15$ afin d'assurer un gain statique unitaire et les pôles de la boucle fermée sont :

$$\lambda_1 = 0.96 \quad \lambda_2 = -0.66 \quad \lambda_3 = 0$$

Ce choix de régulation ne convient pas à l'éleveur qui ne souhaite pas attendre 100 années avant de constituer son troupeau.

Pour accélérer le processus on peut prendre $K = 0.7$. Cela implique de prendre $K_c = 0.5143$ et les pôles de

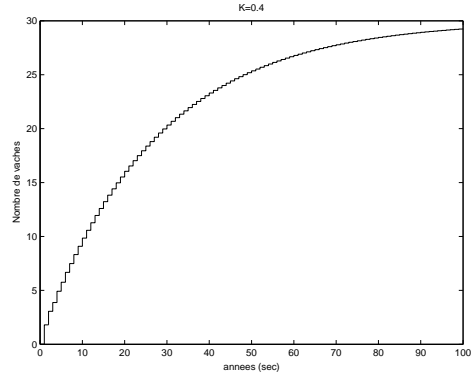


FIG. 4.8 – Evolution du troupeau pour $K = 0.4$

la boucle fermée sont alors :

$$\lambda_1 = 0.82 \quad \lambda_2 = -0.55 \quad \lambda_3 = -0.27$$

L'évolution du troupeau est plus rapide (voir figure 4.9).

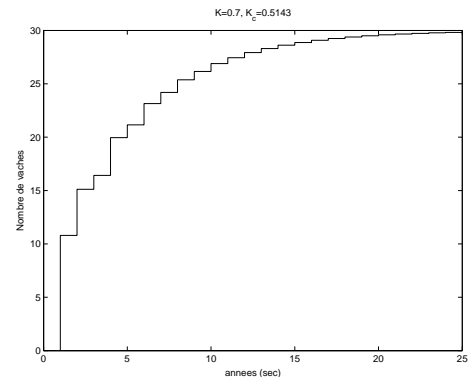


FIG. 4.9 – Evolution du troupeau pour $K = 0.7$

b - Si K est pris supérieur à 0.76 (valeur pour laquelle un des modes devient complexe). Alors on peut s'attendre à des phénomènes oscillant mais éventuellement avec une convergence du nombre de bêtes assez rapide.

A titre d'illustration, la réponse du système à l'état initial x_0 est représentée sur la figure 4.10 avec $K = 1$. Le tracé est fait avec un choix de $K_c = 0.66$ afin d'assurer un gain statique unitaire et les pôles de la boucle fermée sont :

$$\lambda_1 = 0.72 \quad \lambda_{2,3} = -0.51 \pm j0.27$$

La figure 4.11 montre plus en détail l'évolution exacte du nombre de vaches par catégories. On constate une convergence rapide vers un équilibre tel qu'il y a environ 12 vaches de moins d'un an et 12 vaches de

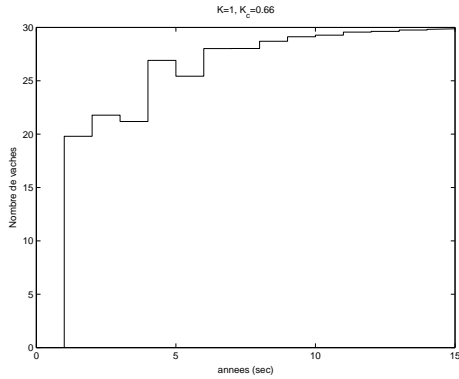


FIG. 4.10 – Evolution du troupeau pour $K = 1$

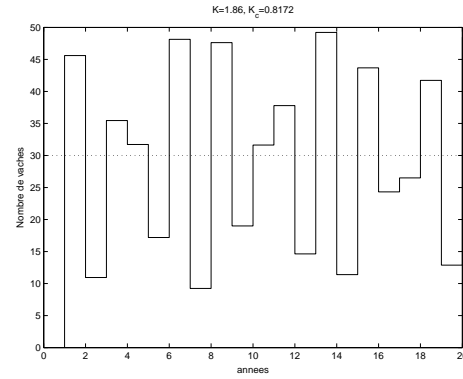


FIG. 4.12 – Evolution du troupeau $K = 1.86$

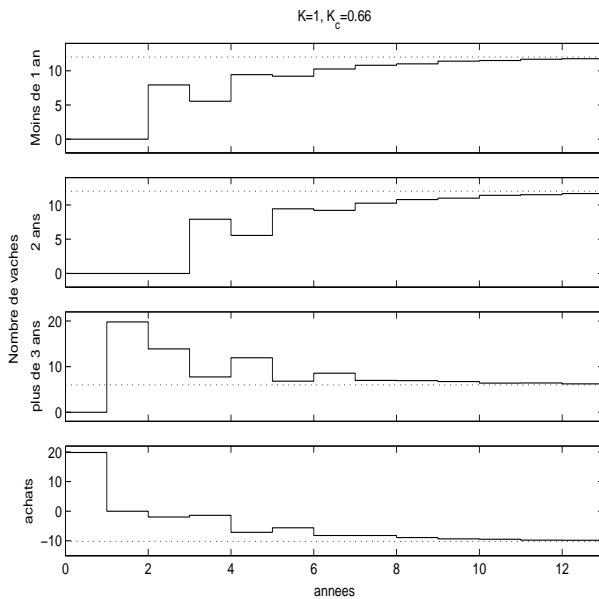


FIG. 4.11 – Evolution du troupeau pour $K = 1$

deux ans. Le nombre de vaches de trois ans et plus converge vers 6 et l'éleveur vend près de 10 vaches chaque année. La stratégie semble être de constituer dès la première année un troupeau de 20 vaches âgées et ensuite très vite l'éleveur finit par vendre les vaches en excès.

c - Si K est pris proche de 1.86. Alors le système est proche de l'instabilité et le mode dominant est un mode oscillant.

A titre d'illustration, la réponse du système à l'état initial x_0 est représentée sur la figure 4.12 avec $K = 1.86$. Le tracé est fait avec un choix de $K_c = 0.8172$ afin d'assurer un gain statique unitaire et les pôles de la boucle fermée sont :

$$\lambda_1 = 0.59 \quad \lambda_{2,3} = -0.88 \pm j0.46$$

Ce choix de régulation ne convient évidemment pas à l'éleveur.

Exercice 4.2

On considère le procédé décrit par la fonction de transfert continue :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

1. Etudier la stabilité et le comportement en régime transitoire du procédé de fonction de transfert $G(p)$.
2. Calculer la fonction de transfert $G(z)$ de ce procédé échantillonné selon le schéma de la figure 4.13, pour une période d'échantillonnage $T = \pi/2s$.

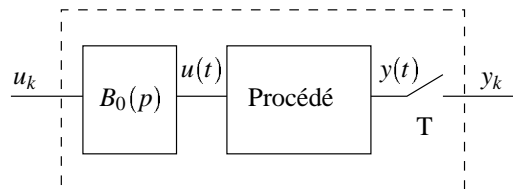


FIG. 4.13 – Procédé échantillonné

3. Ce système est bouclé par un retour unitaire selon le schéma de la figure 4.14. Etudier sa stabilité en fonction de $K > 0$.

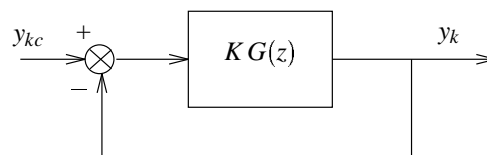


FIG. 4.14 – Système bouclé

Solution

1. Les modes du système sont $p = \pm j$. Le système est donc en limite de stabilité oscillatoire avec une pulsation propre $\omega = 1 \text{ rad/s}$.
2. La fonction de transfert du système échantillonné est donnée par :

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{G(p)}{p} \right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{p(p^2+1)} \right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \right] \\
 &= \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z^2}{z^2+1} \right) \\
 &= \frac{z+1}{z^2+1}
 \end{aligned}$$

3. L'application du critère de Jury conduit à :

$$-1 < K < 0$$

qui est incompatible avec la condition $K > 0$. Le système bouclé avec $K > 0$ est donc toujours instable.

Chapitre 5

Synthèse : Transposition des méthodes analogiques

La synthèse de correcteurs numériques par extension de correcteurs analogiques est une approche couramment utilisée dans le domaine industriel. Cela s'explique par le fait que les techniques d'étude des systèmes continus sont généralement bien maîtrisées et que les spécifications sont plus facilement interprétables sur des modèles continus que sur des modèles échantillonnés.

On s'intéresse d'abord à des méthodes relevant de la discrétisation directe d'un correcteur analogique calculé à partir du modèle continu du procédé à commander. On examine ensuite des méthodes de synthèse dans lesquelles le correcteur est conçu à partir d'un modèle prenant en compte de manière approchée l'existence du bloqueur en amont du procédé. On examine ensuite de manière détaillée la discrétisation du correcteur analogique le plus répandu, le régulateur P.I.D.

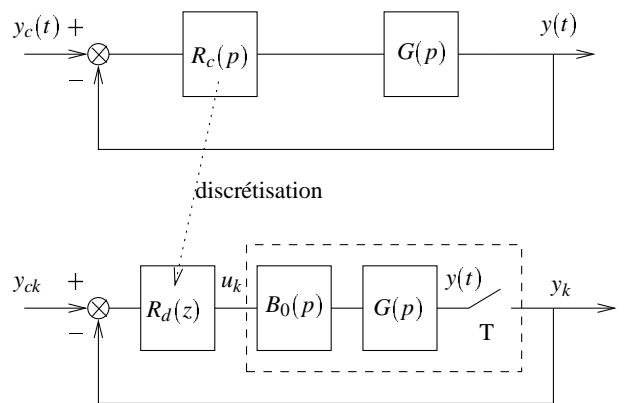


FIG. 5.1 – Discrétisation d'un correcteur analogique

5.1 Discrétisation

Cette approche suppose que l'on ait réalisé la synthèse d'un correcteur analogique par les méthodes d'étude des systèmes continus. On recherche alors un algorithme numérique qui se rapproche le plus possible du correcteur analogique, en faisant des approximations de la variable de Laplace p , ou sur les pôles et zéros de la fonction de transfert du correcteur analogique. Si on raisonne en termes de fonctions de transfert, on cherche à obtenir la fonction de transfert $R(z)$ d'un correcteur numérique par approximation de celle d'un correcteur analogique $R(p)$, comme illustré sur la figure 5.1.

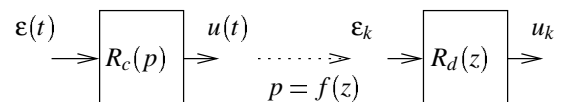


FIG. 5.2 – Approximation de la variable p

5.1.1 Approximations de la variable p

Le principe de l'approche consiste à déduire un correcteur $R_d(z)$ du correcteur $R_c(p)$ en choisissant une approximation de la variable p , selon le schéma de la figure 5.2.

Les approximations les plus utilisées sont les suivantes :

discrétisation avant : $p = \frac{z-1}{T}$

Elle résulte de l'approximation de la dérivée d'une fonction entre deux instants d'échantillonnage par la méthode d'Euler :

$$\mathcal{L}^{-1}[pX(p)] = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+T) - x(t)}{T} = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z-1}{T} X(z) \right]$$

discrétisation arrière : $p = \frac{z-1}{zT}$

Elle résulte de l'approximation suivante de la dérivée

d'une fonction entre deux instants d'échantillonnage :

$$\mathcal{L}^{-1}[pX(p)] = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-T)}{T} = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z-1}{zT} X(z) \right]$$

approximation de Tustin : $p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

Cette approximation, connue également sous le nom de transformation bilinéaire, résulte de l'approximation de l'intégration numérique par la méthode des trapèzes. En effet, soit :

$$y(t) = \int x(t) dt \quad \rightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{p} X(p)$$

Par approximation entre deux instants d'échantillonnage, il vient :

$$y_k = y(kT) = y_{k-1} + \frac{x_{k-1} + x_k}{2} T$$

$$\downarrow \mathcal{Z}$$

$$(1 - z^{-1})Y(z) = \frac{T}{2}(1 + z^{-1})X(z)$$

soit la formule :

$$Y(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} X(z)$$

Un inconvénient des approches par approximation de la variable de Laplace p est qu'elles peuvent modifier l'échelle des pulsations de la réponse fréquentielle du correcteur que l'on a discrétisé, ce qui peut être gênant dans le cas d'un filtre passe-bande par exemple. Cet effet est connu sous le nom de distorsion fréquentielle (frequency warping).

Examinons ses conséquences dans le cas de l'approximation de Tustin. Soit un correcteur analogique de fonction de transfert $R_c(p)$. Sa réponse fréquentielle est déterminée par la fonction complexe $R_c(j\omega)$. Le régulateur discret obtenu par la méthode de Tustin a pour fonction de transfert

$$R_d(z) = R_c\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right)$$

En utilisant la relation $z = e^{Tp} = e^{jT\omega}$ (voir section 1.4.3), sa réponse fréquentielle est déterminée par la fonction complexe :

$$R_d(e^{jT\omega}) = R_c\left(\frac{2}{T} \frac{e^{jT\omega} - 1}{e^{jT\omega} + 1}\right) = R_c\left(j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}\right) \neq R_c(j\omega)$$

Manifestement la discrétisation induit des erreurs sur le comportement fréquentiel. Ceci peut être corrigé au voisinage d'une fréquence particulière. On peut mettre en œuvre une adaptation pour que le gain en amplitude des deux correcteurs (continu et équivalent discret) soit identique à une pulsation particulière ω_c choisie par l'utilisateur, par exemple la pulsation de coupure du correcteur

continu. En effet, si l'on choisit comme approximation de Tustin adaptée (frequency prewarping) :

$$p = \frac{\omega_c}{\operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}} \frac{z-1}{z+1}$$

il vient, pour la pulsation ω_c :

$$R_d(e^{jT\omega_c}) = R_c\left(j \frac{\omega_c}{\operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}} \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}\right) = R_c(j\omega_c)$$

Les deux correcteurs sont donc bien fréquentiellement équivalents pour la pulsation ω_c .

5.1.2 Adaptation des pôles et des zéros

Cette approche (matched pole-zero method) consiste à appliquer la transformation $z = e^{Tp}$ aux pôles et aux zéros de la fonction de transfert du correcteur continu, avec un facteur multiplicatif permettant de conserver le gain aux basses fréquences c'est-à-dire pour $p \rightarrow 0$ ou bien $z \rightarrow 1$.

Par exemple, le correcteur analogique :

$$R_c(p) = \frac{p+a}{p+b}$$

est approché par le correcteur discret :

$$R_d(z) = \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}$$

Une précaution à prendre lorsque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, consiste à introduire au numérateur du correcteur discret des termes $(z+1)$ pour conserver un gain nul aux hautes fréquences en rétablissant des degrés identiques. Ceci se justifie par le fait que le théorème de Shannon limite la pulsation à $\omega = \pi/T$, soit $z = e^{jT\omega} = -1$. La valeur $z = -1$ joue en discret le même rôle que $\omega = \infty$ en continu.

Ainsi, le correcteur analogique :

$$R_c(p) = \frac{p+a}{(p+b)(p+c)}$$

est approché par le correcteur discret :

$$\frac{a}{2bc} \frac{(1 - e^{-bT})(1 - e^{-cT})}{1 - e^{-aT}} \frac{(z+1)(z - e^{-aT})}{(z - e^{-bT})(z - e^{-cT})}$$

5.1.3 Application

Position du problème

On considère le procédé représenté par la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{5}{p(p+1)}$$

Le gain de boucle ayant été fixé à 5 pour satisfaire des conditions de précision. On veut faire la synthèse d'un réseau correcteur permettant d'obtenir pour le système bouclé une marge de phase $\phi_m = 45^\circ$.

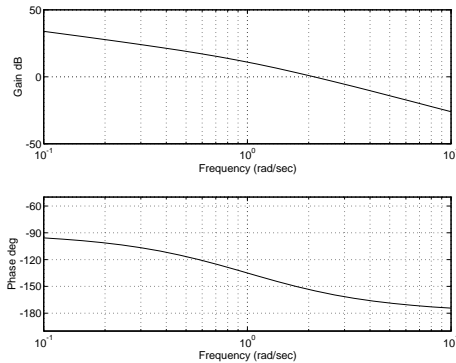


FIG. 5.3 – Réponse fréquentielle de $G(p)$

A partir des courbes de réponse en fréquence (figure 5.3) dans le plan de Bode de la fonction de transfert $G(p)$, on détermine un réseau correcteur par avance de phase :

$$R_c(p) = \frac{1 + 0.53p}{1 + 0.21p}$$

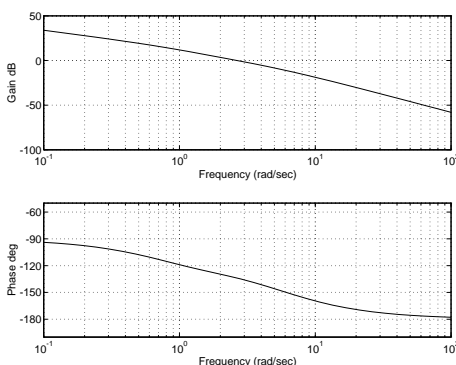


FIG. 5.4 – Réponse fréquentielle de $R_c(p)G(p)$

Les courbes de réponse en fréquence de $R_c(p)G(p)$ (figure 5.4) permettent de vérifier que l'on obtient bien la marge de phase souhaitée $\phi_m = 45^\circ$.

La commande en sortie du correcteur $R_c(p)$ et la réponse en boucle fermée du système ainsi corrigé, pour une consigne en échelon unitaire, sont données figure 5.5.

On désire étudier le comportement de ce système dans le cas d'un régulateur numérique calculé par discrétisation du régulateur analogique précédent, pour une période d'échantillonnage $T = 0.3s$.

Calcul des correcteurs

Les correcteurs (sous forme de fonctions de transfert en z) obtenus par les différentes approximations sont donnés ci-après :

- discrétisations directes de p .

Avec $p = \frac{z-1}{T}$, il vient :

$$R_d(z) = \frac{0.53z - 0.23}{0.21z + 0.09}$$

Avec $p = \frac{z-1}{zT}$, il vient :

$$R_d(z) = \frac{0.83z - 0.53}{0.51z - 0.21}$$

- méthode de Tustin

$$R_d(z) = \frac{1.89z - 1.06}{z - 0.17}$$

- méthode de Tustin avec élimination de distorsion fréquentielle (prewarp, en prenant $w_c = 5rd/s$).

$$R_d(z) = \frac{1.81z - 0.87}{z - 0.06}$$

- méthode de conversion des pôles et des zéros (matched pole-zero method).

$$R_d(z) = \frac{1.76z - 0.99}{z - 0.24}$$

Etude du système bouclé avec correcteur numérique

Les réponses des systèmes obtenues pour les différents correcteurs numériques sont données sur les figures suivantes :

- discrétisations directes de p : figures 5.6 et 5.7.
- méthode de Tustin : figure 5.8.
- méthode de Tustin avec élimination de distorsion fréquentielle (prewarp), en prenant $w_c = 5rd/s$: figure 5.9.
- méthode de conversion des pôles et des zéros (matched pole-zero method) : figure 5.10.

On note que les différentes méthodes conduisent à des correcteurs relativement similaires même si dans l'ensemble les systèmes corrigés par des régulateurs discrets sont plus lents et plus oscillants que avec $R_c(p)$.

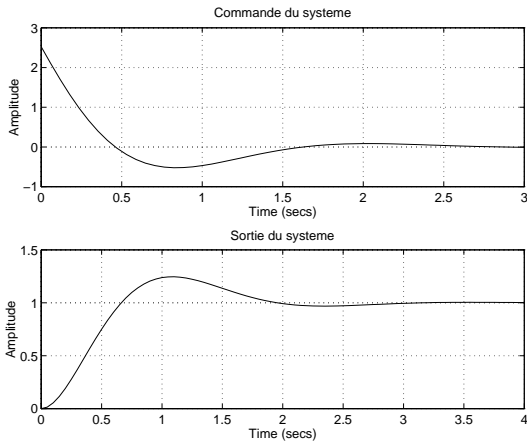


FIG. 5.5 – Commande et réponse indicielle de $R_c(p)G(p)$

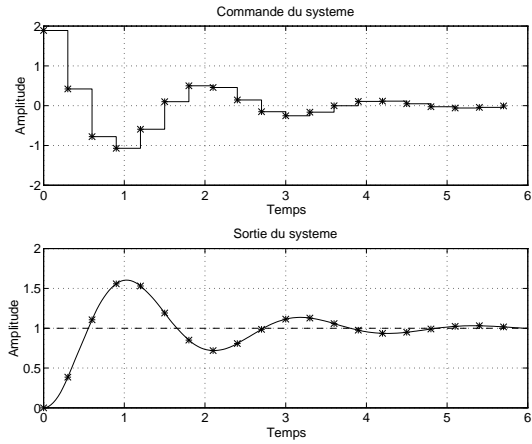


FIG. 5.8 – Réponses (méthode de Tustin)

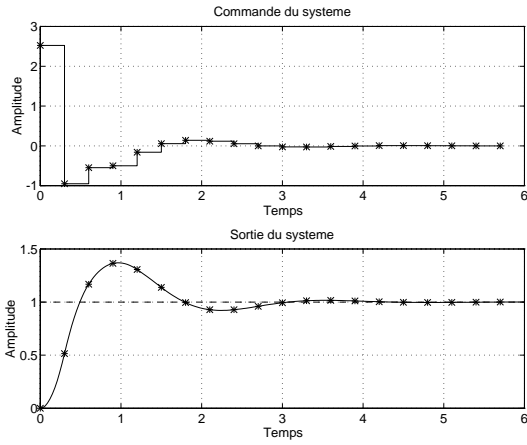


FIG. 5.6 – Réponses (correcteur discrétisé avec $p = \frac{z-1}{T}$)

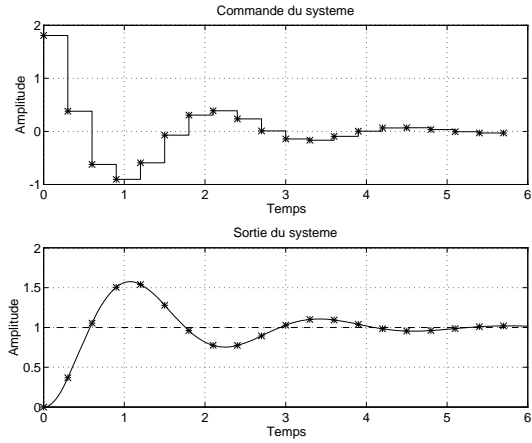


FIG. 5.9 – Réponses (méthode de Tustin avec “prewarp”)

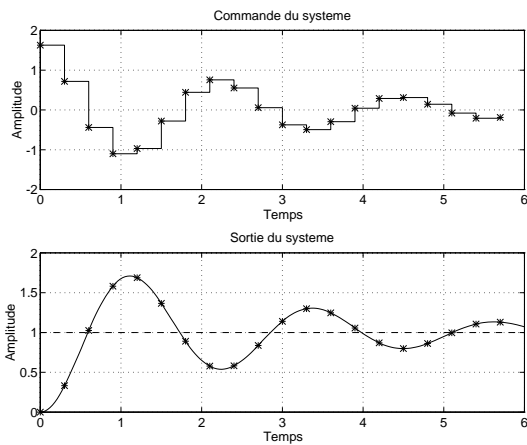


FIG. 5.7 – Réponses (correcteur discrétisé avec $p = \frac{z-1}{zT}$)

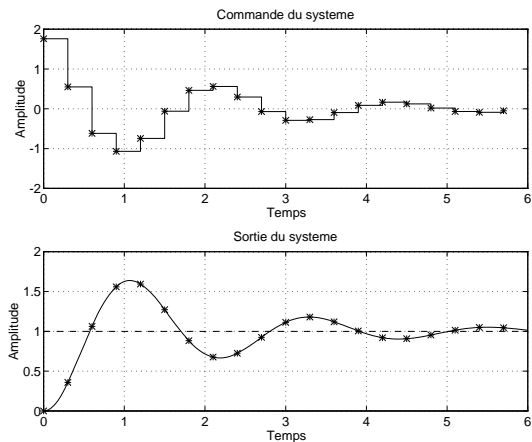


FIG. 5.10 – Réponses (matched pole-zero method)

5.2 Prise en compte du bloqueur dans la synthèse

Les méthodes présentées dans le paragraphe précédent ne prennent pas en compte la présence dans la boucle du bloqueur d'ordre zéro. Si l'on reprend la logique de la figure 5.1, on note qu'elle suppose que $R_d(z)$ sera une approximation de $R_c(p)$ et devrait donc satisfaire la boucle réalisée avec un opérateur $G_d(z)$ dont le comportement serait très proche de $G(p)$. Dans cette logique cela revient à ignorer le comportement du bloqueur, $B_0(p)$. Ceci peut devenir très préjudiciable si l'échantillonnage T est élevé car dans ce cas le comportement de $Z[B_0(p)G(p)]$ se distingue fortement de celui de $G(p)$.

Nous présentons ci-après des méthodes prenant en compte l'existence du bloqueur d'ordre zéro, de manière exacte ou approchée.

5.2.1 Approximation du bloqueur par un retard pur $e^{-\frac{T_p}{2}}$

Dans ce cas, la synthèse est réalisée comme dans les méthodes du paragraphe 5.1, mais la fonction de transfert du procédé est choisie égale à :

$$e^{-\frac{T_p}{2}} G(p)$$

Ce qui revient à faire l'approximation le bloqueur d'ordre zéro comme un retard pur d'une demie période d'échantillonnage et de tenir compte de cette approximation lors du calcul initial de $R_c(p)$.

Considérons le procédé de la section 5.1.3 et la période d'échantillonnage :

$$G(p) = \frac{5}{p(p+1)} \quad T = 0.3s$$

Les courbes de réponse en fréquence de la fonction de transfert

$$e^{-\frac{T_p}{2}} G(p)$$

sont représentées sur la figure 5.11. Sur la même figure sont représentées également les courbes de réponse fréquentielle de $G(p)$. On remarquera que le gain en amplitude est identique, mais que le retard pur introduit un déphasage aux hautes fréquences (le déphasage diverge pour ω croissant).

On calcule pour $e^{-\frac{T_p}{2}} G(p)$ un réseau correcteur par avance de phase :

$$R_c(p) = \frac{1 + 0.6p}{1 + 0.1p}$$

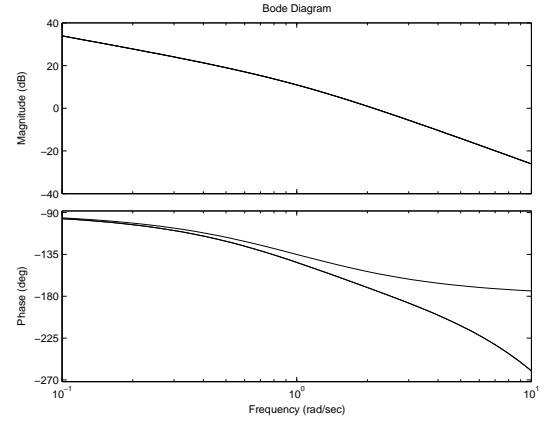


FIG. 5.11 – Diagramme de Bode de $G(p)$ et $e^{-\frac{T_p}{2}} G(p)$

qui conduit à une marge de phase de $\phi_m = 35^\circ$. Par la méthode de Tustin, la discrétisation de ce correcteur donne :

$$R_d(z) = \frac{3z - 1.8}{z + 0.2}$$

La réponse du système échantillonné utilisant ce correcteur est donnée figure 5.12.

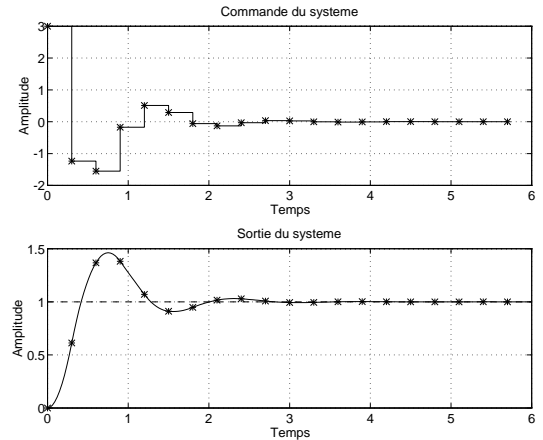


FIG. 5.12 – Réponses (correcteur tenant compte du bloqueur)

5.2.2 Transformation en w

Cette approche est très différente des précédentes. Aucune approximation n'est faite à aucun moment. L'idée est de faire la synthèse à partir du modèle exact $G(z) = Z[B_0(p)G(p)]$. Cependant, la synthèse utilise les techniques des systèmes continu au travers de l'astuce purement mathématique de la transformation en w (voir section 3.4 également).

On commence par calculer le modèle discret de l'ensemble bloqueur + procédé :

$$F(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)]$$

On utilise ensuite la transformation en w :

$$z = \frac{1+w}{1-w} \longleftrightarrow w = \frac{z-1}{z+1}$$

pour définir ensuite une fonction de transfert de type continu :

$$F(z) \longrightarrow F_c(w) = F\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$$

La transformation mathématique fait que si le système continu $F_c(w)$ est stable, alors $F(z)$ est stable. Cependant $F_c(w)$ n'a pas d'autre signification physique.

La synthèse du réseau correcteur $H_c(w)$ s'effectue alors selon une méthode classique de synthèse des systèmes continus appliquée à $F_c(w)$. De ce correcteur il vient par la transformation inverse en w la fonction de transfert $H(z)$ du correcteur numérique à utiliser :

$$H(z) = H_c\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Appliquons cette approche au problème du paragraphe 5.1.3. On calcule le modèle discret de l'ensemble bloqueur + procédé :

$$F(z) = \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)] = \frac{0.204z + 0.185}{z^2 - 1.74z + 0.74}$$

On utilise ensuite la transformation en w pour définir une fonction de transfert fictive de type continu :

$$F_c(w) = F\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \frac{-0.019w^2 - 0.37w + 0.389}{3.58w^2 + 0.52w}$$

On effectue la synthèse d'un réseau correcteur à avance de phase $H_c(w)$ à partir des courbes de réponse en fréquence de $F_c(w)$ représentées figure 5.13.

Le choix d'un réseau correcteur :

$$H_c(w) = \frac{1 + 3.73w}{1 + 0.74w}$$

conduit à une marge de phase de $\phi_m = 35^\circ$. La transformation inverse en w permet d'obtenir la fonction de transfert $H(z)$ du correcteur numérique à utiliser :

$$H(z) = H_c\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{4.73z - 2.73}{1.74z + 0.26}$$

La réponse du système échantillonné utilisant ce correcteur est donnée figure 5.14.

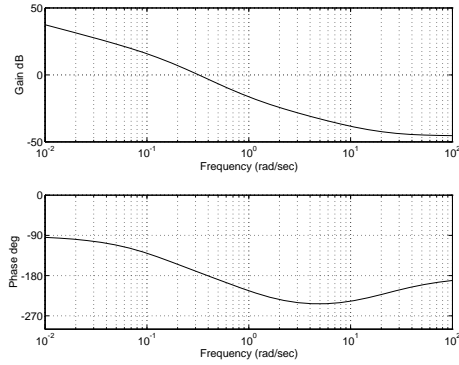


FIG. 5.13 – Diagramme de Bode de $F_c(w)$

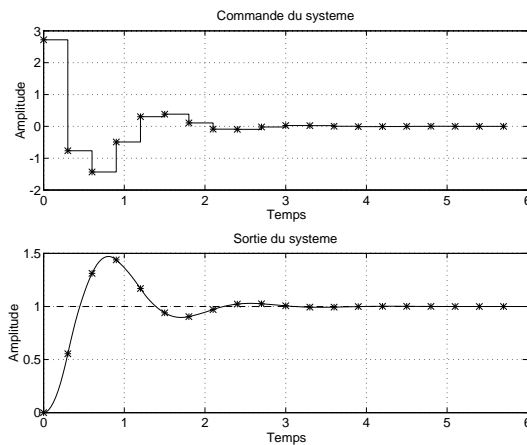


FIG. 5.14 – Système corrigé par $H(z)$

5.3 Régulateur P.I.D. numérique

Le régulateur P.I.D. est très répandu dans le domaine industriel. Il constitue l'outil standard de la commande de nombreux procédés industriels. Conçu initialement en technologie analogique (hydraulique, pneumatique, électronique,...), il a été transposé en numérique pour pouvoir être implanté sur ordinateur. Cette transposition n'est rien d'autre que l'application de la méthode de discrétisation de la section 5.1.

5.3.1 Rappels sur le régulateur P.I.D. analogique

La formulation de base du régulateur P.I.D. est donnée par la relation suivante :

$$u(t) = k_p \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + \tau_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$U(p) = k_p \left[1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p \right] \mathcal{E}(p)$$

où ε représente l'écart entre le signal de consigne y_c et le signal de sortie mesuré du procédé y .

En pratique, des adaptations sont réalisées à partir de la formulation de base.

Adaptations de la partie dérivée.

L'effet dérivé pur ne peut pas être implémenté car non réalisable physiquement. De plus, l'effet dérivateur appliqué à de hautes fréquences conduirait à une amplification trop importante des bruits de mesure. En approchant le terme $\tau_d p$ par la fonction de transfert :

$$\frac{\tau_d p}{1 + \frac{\tau_d}{N} p}$$

on limite à N le gain aux hautes fréquences de la partie dérivée. Les valeurs de N sont généralement choisies dans la fourchette 3-20, voir $N = 10$ par défaut.

En régulation, on évite aussi souvent de dériver le terme de consigne pour éviter des variations brusques de la commande lors de discontinuités sur la consigne.

En conclusion, l'effet dérivé peut être pris suivant l'un des trois modèles suivants :

$$D(p) = k_p \tau_d p \mathcal{E}(p)$$

↓ limitations sur les hautes fréquences

$$D(p) = k_p \frac{\tau_d p}{1 + \frac{\tau_d}{N} p} \mathcal{E}(p)$$

↓ limitations sur la consigne

$$D(p) = -k_p \frac{\tau_d p}{1 + \frac{\tau_d}{N} p} Y(p)$$

Adaptations de la partie proportionnelle.

Pour la même raison que pour l'effet dérivé, on peut être amené à n'injecter qu'une partie de la consigne dans le terme proportionnel. La précision est malgré tout assurée grâce au terme intégral.

L'effet proportionnel peut être pris suivant l'un des deux modèles suivants :

$$P(p) = k_p \mathcal{E}(p)$$

↓ limitations sur la consigne

$$P(p) = k_p (b Y_c(p) - Y(p))$$

avec $0 < b < 1$.

Adaptations de la partie intégrale.

La partie intégrale peut entraîner des effets indésirables lorsque, en raison d'un signal d'erreur trop grand, l'intégrateur sature. L'actionneur reste alors en butée, même lorsque la sortie du procédé varie. Une approche possible pour éliminer cet effet consiste à introduire un bouclage sur l'intégrateur, ramenant l'écart entre l'entrée v_k et la

sortie u_k de la saturation (réelle ou simulée), avec une constante d'intégration τ_i . Le principe de cette adaptation est montré sur la figure 5.15.

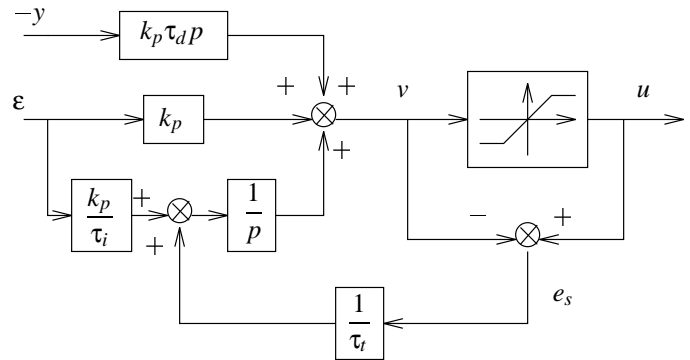


FIG. 5.15 – Adaptation de la partie intégrale

La variable v , qui est la sortie du P.I.D. classique génère la commande u à travers une saturation simulant la saturation réelle de l'actionneur. L'écart entre u et v est rebouclé sur la partie intégrale du correcteur. Le schéma du système peut être ramené à celui de la figure 5.16.

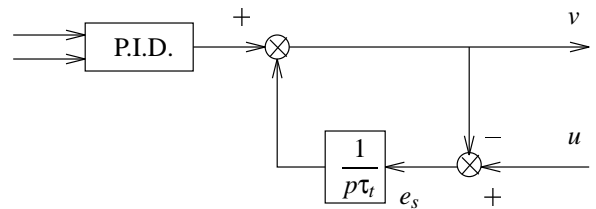


FIG. 5.16 – Schéma équivalent

Lorsque la commande sature, alors $u = Cte$ est de type échelon. La boucle comportant une intégration, l'écart e_s tend vers zéro et v tend donc vers $u = Cte$, entraînant une dé-saturation de l'intégrateur.

Ceci se traduit, pour la partie intégrale du correcteur, à l'un des deux modèles suivants :

$$I(p) = k_p \frac{1}{\tau_i p} \mathcal{E}(p)$$

↓ anti-dérivée de l'intégrateur

$$I(p) = k_p \frac{1}{\tau_i p} \mathcal{E}(p) + k_p \frac{1}{\tau_i p} (U(p) - V(p))$$

5.3.2 Réglage du P.I.D.

Le réglage du régulateur P.I.D. passe par le choix des paramètres k_p , τ_i , τ_d , τ_r , b et N . Les paramètres fondamentaux sont k_p , τ_i et τ_d . Le paramètre N est souvent fixé

à la valeur par défaut $N = 10$. La constante de temps τ_i est choisie dans la fourchette $[0.1\tau_i, \tau_i]$.

Pour la détermination des paramètres k_p , τ_i et τ_d , des méthodes expérimentales d'analyse du procédé ont été proposées par Ziegler et Nichols (entre autres).

Méthode de la réponse indicielle :

Pour un système caractérisé par un retard pur T_r et une pente a en régime transitoire, les valeurs des paramètres sont :

Type	k_p	τ_i	τ_d
P	$1/aT_r$		
PI	$0.9/aT_r$	$3T_r$	
PID	$1.2/aT_r$	$2T_r$	$0.5T_r$

Méthode de l'oscillation limite en boucle fermée :

On boucle le système avec un régulateur proportionnel de gain K . Si K_o est le gain mettant le système en oscillation limite de période T_o , les valeurs des paramètres sont :

Type	k_p	τ_i	τ_d
P	$0.5K_o$		
PI	$0.45K_o$	$T_o/1.2$	
PID	$0.6K_o$	$T_o/2$	$T_o/8$

5.3.3 Equations d'un correcteur P.I.D. numérique

Ayant fait un choix de modèle pour le P.I.D. et ayant réglé les paramètres il est possible d'appliquer ce régulateur aux système échantillonnés par la technique de discrétisation. Prenons par exemple le choix d'une approximation arrière.

La partie proportionnelle s'écrit donc suivant l'une des deux formules :

$$p_k = k_p \epsilon_k$$

↓ limitations sur la consigne

$$p_k = k_p (by_{c_k} - y_k)$$

avec $0 < b < 1$.

La partie intégrale vérifie l'une des deux équations récurrentes :

$$i_k = i_{k-1} + \frac{k_p T}{\tau_i} \epsilon_k$$

↓ anti-dérive de l'intégrateur

$$i_k = i_{k-1} + \frac{k_p T}{\tau_i} \epsilon_k + \frac{k_p T}{\tau_i} (u_k - v_k)$$

La partie dérivée vérifie l'une des trois équations récurrentes :

$$d_k = \frac{k_p \tau_d}{T} (\epsilon_k - \epsilon_{k-1})$$

↓ limitations sur les hautes fréquences

$$d_k = \frac{\tau_d}{\tau_d + NT} d_{k-1} + \frac{k_p \tau_d N}{\tau_d + NT} (\epsilon_k - \epsilon_{k-1})$$

↓ limitations sur la consigne

$$d_k = \frac{\tau_d}{\tau_d + NT} d_{k-1} - \frac{k_p \tau_d N}{\tau_d + NT} (y_k - y_{k-1})$$

L'algorithme général du P.I.D. numérique est donné comme la somme des trois termes :

$$u_k = p_k + i_k + d_k$$

qui se calculent en temps réel à la donnée du signal ϵ_k et des valeurs précédentes.

Adaptation prédictive de l'erreur.

Lorsque la période d'échantillonnage est trop petite pour que le temps de calcul ne puisse plus être négligé, l'hypothèse de synchronisme entre u_k et ϵ_k peut conduire à des résultats erronés. On met alors en œuvre un P.I.D. prédictif. La valeur de ϵ_k est prédite par la valeur $\hat{\epsilon}_k$ obtenue par l'extrapolation linéaire :

$$\hat{\epsilon}_k - \epsilon_{k-1} = \epsilon_{k-1} - \epsilon_{k-2}$$

c'est à dire :

$$\hat{\epsilon}_k = 2\epsilon_{k-1} - \epsilon_{k-2}$$

qui est portée dans l'algorithme à la place de ϵ_k .

5.3.4 Exemple d'application du P.I.D. numérique

Exemple 5.1 A titre d'exemple, nous présentons ici les résultats de simulation obtenus dans le cas de la régulation par P.I. numérique d'un procédé continu de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

en présence d'un bloqueur d'ordre zéro et avec une période d'échantillonnage $T = 1s$. Les paramètres du correcteur sont fixés à :

$$k_p = 1 \quad b = 1 \quad \tau_i = 5s \quad \tau_d = 5s$$

La figure 5.17 donne le résultat (commande et sortie) dans le cas où il n'y a pas de saturation de l'organe de commande. La figure 5.18 correspond au cas où l'amplitude de la commande est saturée à 0,1 en valeur absolue et où il n'y a pas d'adaptation du régulateur. La figure 5.19 montre l'effet du correcteur de saturation. <

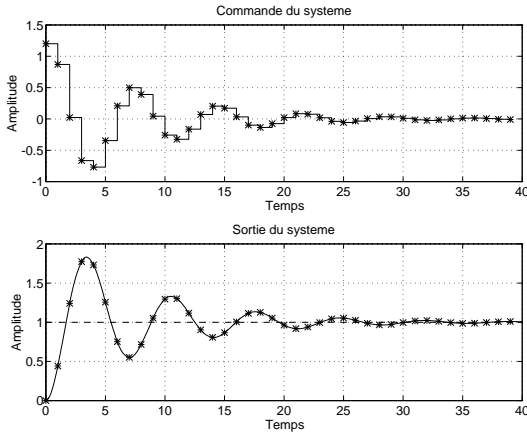


FIG. 5.17 – Réponse indicielle du système bouclé

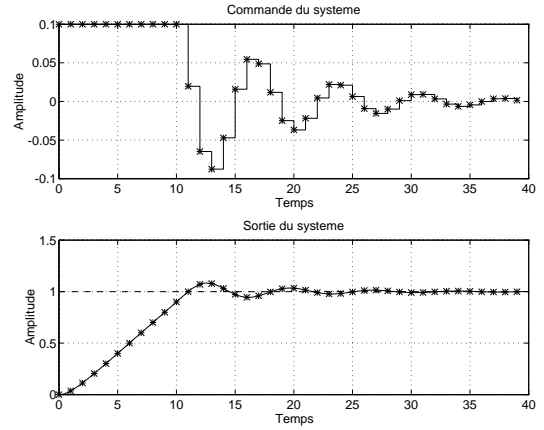


FIG. 5.19 – Réponse indicielle avec anti-dérive

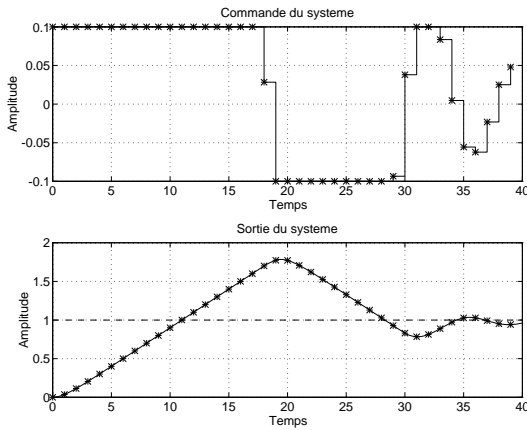


FIG. 5.18 – Réponse avec saturation de la commande

5.4 Exercices

Exercice 5.1

On considère le système *continu* de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p}$$

1. Etudier le comportement en fonction de K de ce système lorsqu'on le boucle avec un régulateur :

$$R_c(p) = \frac{K}{p+1}$$

2. On décide de mettre en œuvre une régulation numérique et on choisit une période d'échantillonnage $T = 1s$. Calculer les régulateurs numériques obtenus par discrétisation de $R(p)$ en utilisant les approximations suivantes :

$$p = \frac{z-1}{T} \quad p = \frac{z-1}{zT} \quad p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

3. Etudier en fonction de K le comportement du système *échantillonné* bouclé avec bloqueur d'ordre zéro, en présence de ces différents régulateurs et comparer avec la régulation continue (lieu d'Evans, limite de stabilité, comportement en régime transitoire).

Solution

1. Le système continu bouclé a pour équation caractéristique

$$1 + \frac{K}{p(p+1)} = 0$$

soit l'équation caractéristique :

$$p^2 + p + K = 0$$

Le système est donc asymptotiquement stable, quel que soit $K > 0$, avec le comportement suivant

$$0 < K < 1/4 \quad \text{apériodique}$$

$$K > 1/4 \quad \text{oscillatoire}$$

2. Les différentes approximations conduisent aux régulateurs numériques

$$p = z - 1 \rightarrow R_d(z) = \frac{K}{z}$$

$$p = \frac{z-1}{z} \rightarrow R_d(z) = \frac{Kz}{2z-1}$$

$$p = 2 \frac{z-1}{z+1} \rightarrow R_d(z) = \frac{K(z+1)}{3z-1}$$

3. Les trois régulateurs conduisent respectivement aux résultats suivants.

Cas n° 1

Equation caractéristique

$$z(z - 1) + K = 0$$

Le lieu d'Evans est représenté sur la figure 5.20. Les conditions de stabilité sont :

- Stabilité asymptotique $0 < K < 1$
- apériodique $0 < K < 1/4$
- oscillatoire $1/4 < K < 1$

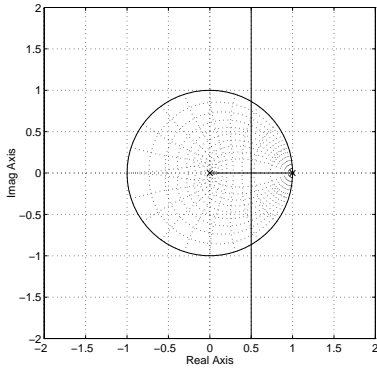


FIG. 5.20 – Lieu d'Evans cas n° 1

Cas n° 2

Equation caractéristique

$$(z - 1)(2z - 1) + Kz = 0$$

Le lieu d'Evans est représenté sur la figure 5.21. Les conditions de stabilité sont :

- Stabilité asymptotique $0 < K < 6$
- apériodique $0 < K < 0.17$
- oscillatoire $0.17 < K < 3$
- doublement oscillatoire $3 < K < 5.82$
- oscillatoire $5.82 < K < 6$

Cas n° 3

Equation caractéristique

$$(z - 1)(3z - 1) + K(z + 1) = 0$$

Le lieu d'Evans est représenté sur la figure 5.22. Les conditions de stabilité sont :

- Stabilité asymptotique $0 < K < 2$
- apériodique $0 < K < 0,63$
- oscillatoire $0,63 < K < 2$

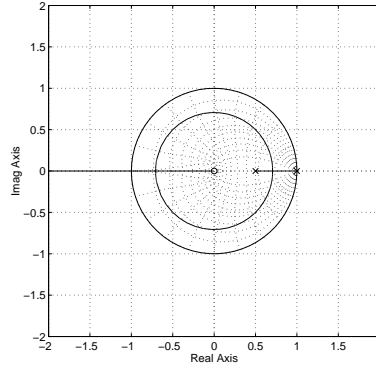


FIG. 5.21 – Lieu d'Evans cas n° 2

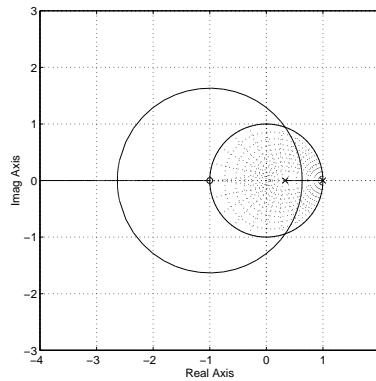


FIG. 5.22 – Lieu d'Evans cas n° 3

Index

- amortissement, 22, 35
- bloqueur d'ordre zéro, 4, 45
- branches asymptotiques, 34
- cadence, 1, 11
- causalité, 6, 15
- convertisseur
 - analogique-numérique, 4
 - numérique-analogique, 4
- critère de Jury, 28, 30, 33
- critère de Routh, 28, 33
- décomposition en éléments simples, 9, 17
- discrétisation, 41
 - arrière, 41
 - avant, 41
 - matched pole-zero, 42
 - Tustin, 42
- échantillonnage
 - table de conversion, 5
- échantillonneur, 4
- équation récurrente, 6, 11, 15
- fonction de transfert, 6
 - échantillonnée, 8
 - forme en z^{-1} , 6
 - forme pôle, zéro, gain, 6
- gain de pré-commande, 36
- gain de rétroaction, 33
- gain statique, 36
- lieu d'Evans, 34
- loi de commande, 33
- mode d'un système, 18
 - mode aperiodique, 18
 - mode complexe, 19
 - mode entrennu, 19
 - mode oscillatoire, 18, 19
 - mode réel, 18
- ordre du système, 7, 11
- oscillations, 21
- P.I.D.
 - analogique, 46
 - numérique, 48
- période d'échantillonnage, 4, 7, 11, 16, 36
- pôles d'un système, 6, 11, 26, 34
- point d'équilibre, 25
- points de rencontre et d'éclatement, 34
- polynôme caractéristique, 7, 28, 29
- pulsation propre, 22, 36
- régime forcé, 17
- réponse pile, 18
- retard pur, 45
- signal
 - à temps continu, 1
 - à temps discret, 1
 - échantillonné, 3
- signal borné, 26
- stabilité, 25, 26
 - asymptotique, 25, 26
 - BIBO, 26
 - globale, 25
 - interne, 25
- système échantillonné, 7, 10, 29
- systèmes interconnectés, 12
- temps de réponse, 22
- théorème de Shannon, 4, 7, 17
- transformée de Laplace, 1, 5
- transformée en w , 29, 45
- transformée en z , 1, 5, 11
 - linéarité, 2
 - produit de convolution, 2
 - théorème de l'avance, 2
 - théorème de la sommation, 2, 3
 - théorème de la valeur finale, 2, 3, 36
 - théorème de la valeur initiale, 2
 - théorème du retard, 2, 3, 9
- zéros d'un système, 6, 34

Table des matières

1	Modèles des systèmes à temps discret	1
1.1	Signal à temps discret	1
1.1.1	Introduction	1
1.1.2	Définition de la transformée en z	1
1.1.3	Propriétés de la transformée en z	2
1.1.4	Exemples de transformées en z	2
1.2	Signal échantillonné	3
1.2.1	Introduction	3
1.2.2	Conversion analogique numérique	4
1.2.3	Conversion numérique analogique	4
1.3	Système à temps discret	6
1.3.1	Equation récurrente	6
1.3.2	Fonction de transfert en z	6
1.4	Système échantillonné	7
1.4.1	Introduction	7
1.4.2	Fonction de transfert échantillonnée	8
1.4.3	Propriétés du modèle échantillonné	9
1.5	Exercices	11
2	Réponse des systèmes à temps discret	15
2.1	Calcul de la réponse	15
2.1.1	A partir de l'équation récurrente	15
2.1.2	A partir de la fonction de transfert	15
2.2	Réponses échantillonnées	16
2.3	Notion de modes	17
2.3.1	Mode réel	18
2.3.2	Mode complexe	19
2.3.3	Caractérisation des modes par analogie avec les systèmes continus	21
2.3.4	Superposition des modes	22
3	Stabilité des systèmes à temps discret	25
3.1	Stabilité interne des systèmes	25
3.2	Stabilité BIBO des systèmes	26
3.3	Critère de Jury	28
3.4	Critère de Routh	28
3.5	Systèmes échantillonnés	29
3.5.1	Etude en boucle ouverte	29
3.5.2	Etude en boucle fermée	30
3.6	Exercices	30
4	Synthèse : Gain de rétroaction	33
4.1	Introduction	33
4.2	Calcul du gain de rétroaction	33

4.2.1	Critères de Jury et Routh	33
4.2.2	Lieu d'Evans	34
4.3	Calcul du gain de pré-commande	36
4.4	Exercices	36
5	Synthèse : Transposition des méthodes analogiques	41
5.1	Discretisation	41
5.1.1	Approximations de la variable p	41
5.1.2	Adaptation des pôles et des zéros	42
5.1.3	Application	42
5.2	Prise en compte du bloqueur dans la synthèse	45
5.2.1	Approximation du bloqueur par un retard pur $e^{-\frac{Tp}{2}}$	45
5.2.2	Transformation en w	45
5.3	Régulateur P.I.D. numérique	46
5.3.1	Rappels sur le régulateur P.I.D. analogique	46
5.3.2	Réglage du P.I.D.	47
5.3.3	Equations d'un correcteur P.I.D. numérique	48
5.3.4	Exemple d'application du P.I.D. numérique	48
5.4	Exercices	49
	Index	51