ENSA de Agadir, 4ème année

Examen d'Automatique - Commande Numérique des Procédés

Corrigé

UN BARÈME INDICATIF EST ENCADRÉ POUR CHAQUE QUESTION

Mai 2003

Exercice 1

1.a $\boxed{1}$

$$G(p) = \frac{p - \ln 2}{p + \ln 2}$$

1.b $\boxed{1/2 + 1/2}$

Convertisseur numérique/analogique : bloqueur d'ordre zéro

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

Convertisseur analogique/numérique : échantillonneur

$$y_k = y(kT)$$

1.c $\boxed{\text{1 (RAISONNEMENT) + 1/2 (RÉSULTAT)}}$

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)] = \tfrac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\tfrac{G(p)}{p}] \\ &\dots \\ &= \frac{z - e^{-T\ln 2} - 2}{z - e^{-T ln 2}} \end{aligned}$$

1.d $\boxed{\text{1 (RAISONNEMENT) + 1/2 (RÉSULTAT)}}$

Théorème de Shannon : *la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois supérieure à la plus haute fréquence contenue dans le spectre du signal.*

Ce théorème s'applique à l'échantillonnage en sortie d'un système comme suit : *la fréquence d'échantillonnage doit être entre 6 et 24 fois la fréquence de coupure du système.*
Appliqué au système $G(p)$ on trouve :

$$\frac{1}{4\ln 2} < T < \frac{1}{24\ln 2} \quad \Rightarrow \quad 0.36 < T < 1.44$$

Donc les choix T_1 et T_5 sont satisfaisants. On peut éventuellement prendre T_2 auquel cas l'échantillonnage est convenable pour conserver l'information sur le système mais il est plus coûteux que nécessaire.

Exercice 2

Le système comporte deux modes. $\boxed{1/2}$

Le premier est associé au pôle réel $z_1 = -1/2$. Il s'agit d'un mode oscillant et convergeant qui se caractérise par :

- Temps de réponse : $\boxed{1/2}$

  $$\tau = -2T/\ln(z_r^2 + z_i^2) = -2T/\ln(1/4) = 1.44T$$

  Soit un temps de réponse d'environ une cadence et demie.
- Pulsation propre : $\boxed{1/2}$

  $$\omega_p = \frac{1}{T}\arctan(z_i/z_r) = \pi/T$$

  Le pôle est réel et négatif, donc le comportement est une alternance (positif/négatif) au double de la cadence du système.
- Coefficient d'amortissement : $\boxed{1/2}$

  $$\zeta = 1/\sqrt{1 + \omega_p^2\tau^2} = 0.215$$

$\boxed{\text{+1 (COMMENTAIRES)}}$

Le second mode est associé aux deux pôles complexes conjugués $z_{1,2} = e^{-1}/\sqrt{2}(1 \pm j)$. Il s'agit d'un mode oscillant et convergeant qui se caractérise par :

- Temps de réponse : $\boxed{1/2}$

  $$\tau = -2T_1/\ln(z_r^2 + z_i^2) = T$$

  Soit un temps de réponse égal à la cadence du système.
- Pulsation propre : $\boxed{1/2}$

  $$\omega_p = \frac{1}{T}\arctan(z_i/z_r) = \pi/4T$$

  La période de l'oscillation propre est huit fois supérieure à la cadence du système.

- Coefficient d'amortissement : $\boxed{1/2}$

$$\zeta = 1/\sqrt{1+\omega_p^2\tau^2} = 0.786$$

$\boxed{+1 \text{ (COMMENTAIRES)}}$

Exercice 3

3.a $\boxed{1}$

$$2y_{k+1} - y_k = 2u_{k+1} - 3u_k$$

ou encore

$$y_k = \frac{1}{2}y_{k-1} + u_k - \frac{3}{2}u_{k-1}$$

3.b $\boxed{1}$

Conditions initiales $y_{k<0} = 0$

Entrée indicielle $u_{k\geq 0} = 1$ et $u_{k<0} = 0$.

$$\begin{array}{lcr} y_0 = \frac{1}{2}y_{-1} + u_0 - \frac{3}{2}u_{-1} & = & 1 \\ y_1 = \frac{1}{2}y_0 + u_1 - \frac{3}{2}u_0 & = & 0 \\ y_2 = \frac{1}{2}y_1 + u_2 - \frac{3}{2}u_1 & = & -\frac{1}{2} \\ y_3 = \frac{1}{2}y_2 + u_3 - \frac{3}{2}u_2 & = & -\frac{3}{4} \end{array}$$

3.c $\boxed{1 \text{ (RAISONNEMENT)} + 1/2 \text{ (RÉSULTAT)}}$

$U(z) = \dfrac{z}{z-1}$ donc $Y(z) = \frac{(2z-3)z}{(2z-1)(z-1)}$ et en appliquant la transformée en z inverse on trouve :

$$y_k = 2(\frac{1}{2})^k - 1$$

3.d $\boxed{1}$

$U(z) = \dfrac{z}{z-1}$ donc $Y(z) = \frac{(\sqrt{2}\,z+1-2\sqrt{2})z}{(\sqrt{2}\,z-1)(z-1)}$ et en appliquant la transformée en z inverse on trouve :

$$y_k = 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^k - 1$$

3.e $\boxed{1}$

On remarque que le système $H_1(z)$ correspond au système $G(p)$ échantillonné (avec un bloqueur d'ordre zéro) à la cadence $T_1 = 1\ s$, alors que le système $H_5(z)$ correspond au même système échantillonné à la cadence $T_5 = 0.5\ s$. Ceci permet de dire que les réponses des question 3.c et 3.d correspondent à la sortie indicielle du même système mais échantillonnée à deux périodes différentes où l'une est la double de l'autre :

$$2(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2k} - 1 = 2(\frac{1}{2})^k - 1$$

Exercice 4

4.a

Approximation avant $p \simeq \frac{z-1}{T}$: $\boxed{1/2}$

$$F_1(z) = \frac{3z-2}{3z+3}$$

Approximation arrière $p \simeq \frac{z-1}{Tz}$: $\boxed{1/2}$

$$F_2(z) = \frac{4z-3}{9z-3}$$

Approximation Tustin $p \simeq \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$: $\boxed{1/2}$

$$F_3(z) = \frac{7z-5}{12z}$$

4.b Le modèle du système en boucle ouverte pour lequel est tracé le lieu d'Evans s'écrit :

$$F(z)\mathcal{Z}[B_0(p)G(p)] = F(z)H_1(z)$$

car la période d'échantillonnage choisie est $T_1 = 1\ s$. Pour chaque choix de régulateur discret cette fonction de transfert s'écrit :

- Discrétisation avant :

$$F_1(z)H_1(z) = \frac{(3z-2)(2z-3)}{(3z+3)(2z-1)}$$

  Il y a deux pôles (croix dans le lieu d'Evans) situés en -1 et $1/2$, et deux zéros (cercles dans le lieu d'Evans) situés en $2/3$ et $3/2$. On en déduit que le lieu d'Evans est celui de la **figure 3**. $\boxed{1/2}$

- Discrétisation arrière :

$$F_2(z)H_1(z) = \frac{(4z-3)(2z-3)}{(9z-3)(2z-1)}$$

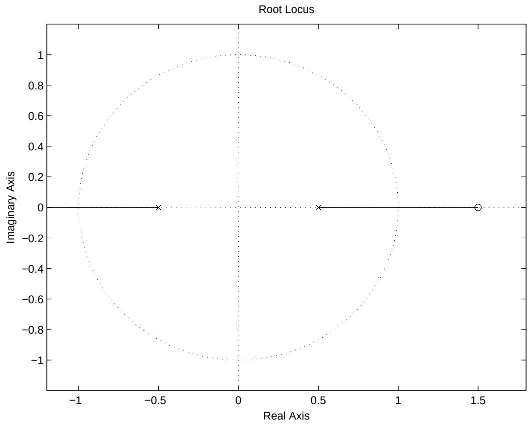
  Il y a deux pôles situés en $1/3$ et $1/2$, et deux zéros situés en $3/4$ et $3/2$. On en déduit que le lieu d'Evans est celui de la **figure 4**. $\boxed{1/2}$

- Discrétisation Tustin :

$$F_3(z)H_1(z) = \frac{(7z-5)(2z-3)}{12z(2z-1)}$$

  Il y a deux pôles situés en 0 et $1/2$, et deux zéros situés en $7/5$ et $3/2$. On en déduit que le lieu d'Evans est celui de la **figure 2**. $\boxed{1/2}$

4.c Le lieu d'Evans est : $\boxed{1}$



4.d La boucle fermée s'écrit : $\boxed{1/2}$

$$\frac{K(2z-3)}{4z^2+2Kz-(1+3K)}$$

Le critère de Jury donne :

$$\begin{array}{ll} 4+2K-(1+3K)=3-K>0 & \Rightarrow K<3 \\ 4-2K-(1+3K)=3-5K>0 & \Rightarrow K<3/5 \\ 4+(1+3K)=5+3K>0 & \Rightarrow K>-5/3 \end{array}$$

La stabilité de la boucle fermée est assurée si et seulement si

$$-5/3<K<3/5$$

$\boxed{1}$