
Approximations de Prandtl : cas du sillage lointain laminaire

On considère un obstacle placé dans un écoulement de vitesse uniforme à l'infini, parallèle à l'axe (O, \vec{e}_x) :

$$\vec{U}_\infty = U_\infty \vec{e}_x \quad (1)$$

On note ρ et ν la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide qui sont supposées constantes. On sait que les zones de l'écoulement où les gradients de vitesse et les effets des frottements sont les plus importants se situent dans les régions de proche paroi et dans le sillage qui les prolonge en aval du corps. Celles-ci, en dehors des zones de décollement, sont d'autant plus minces que le nombre de Reynolds est grand. Dans le sillage, le déficit de vitesse, schématisé figure 1, se comble avec l'éloignement à l'obstacle par un transfert de quantité de mouvement lié aux frottements entre les particules fluides.

On se propose ici de modéliser un sillage "lointain", en aval d'un corps infiniment étendu selon (O, \vec{e}_z) , en supposant l'écoulement plan, stationnaire, sans gradient extérieur de pression dans la région considérée. Le repère est donné ci-dessous, et on note $U(x, y)$ et $V(x, y)$ les composantes du champ de vitesse. Comme toutefois dans le sillage, la grandeur cinématique intéressante est le déficit de vitesse, on introduira la quantité :

$$\hat{U}(x, y) = U_\infty - U(x, y) \quad (2)$$

1. L'ensemble du sillage est susceptible d'application des approximations de la couche limite, dès lors que le nombre de Reynolds est assez grand.

1.a. Fournir dans ce contexte les équations régissant \hat{U} et V , ces dernières étant valables pour tout le sillage en l'absence de décollement, ce qui suppose que le corps est profilé et sous faible incidence.

1.b. On s'intéresse plus spécifiquement au sillage lointain, qui est la région située suffisamment en aval du corps pour que l'on ait :

$$\frac{\hat{U}}{U_\infty} \ll 1 \quad (3)$$

Montrer alors, en introduisant des échelles convenables pour \hat{U} et V , ainsi que les longueurs caractéristiques L et δ des variations selon x et y , que l'équation de \hat{U} peut être approchée par :

$$U_\infty \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial y^2} \quad (4)$$

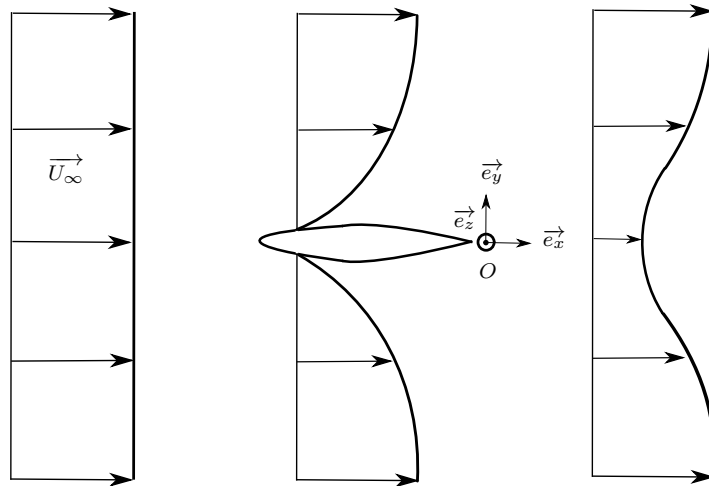


FIGURE 1: Sillage derrière un obstacle.

à laquelle on associera les conditions aux limites qui s'imposent.

1.c. En déduire la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(x, y) dy = K \quad (5)$$

où K est une constante à laquelle on donnera un sens physique (en interprétant $\rho U_\infty K$). Cette relation permet ainsi de retrouver l'influence des conditions aux limites en amont, qui interviennent nécessairement dans ce problème évolutif en x . Dans ce qui suit, les relations (4) et (5) associées aux conditions aux limites constituent le problème (I).

2. On vérifie que ce problème, et donc sa solution, est invariant vis-à-vis de certaines transformations affines. Pour cela, on le met sous une forme sans dimension, en introduisant les nouvelles variables :

$$U^* = \frac{\hat{U}}{U_\infty} \quad x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \sqrt{Re_L} \quad (6)$$

où $Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu}$. (On rappelle que dans ce cadre d'approximations, $\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$.)

2.a. Fournir les équations du problème (I^*) ainsi que celles du problème (I') qui s'en déduit par la transformation :

$$U' = \frac{U^*}{u} \quad x' = \frac{x^*}{\xi} \quad y' = \frac{y^*}{\eta} \quad (7)$$

où u , ξ et η sont des réels non-nuls.

2.b. Á quelles conditions les problèmes (I^*) et (I') sont-ils identiques? Fournir la transformation correspondante ne faisant intervenir que le paramètre ξ .

2.c. Montrer finalement que la solution de (I^*) est nécessairement de la forme :

$$U^* = x^{*-1/2} G\left(\frac{y^*}{x^{*1/2}}\right) = x^{*-1/2} G(\zeta) \quad (8)$$

et fournir $G(\zeta)$ avec une constante d'intégration multiplicative A . En déduire l'expression de $\frac{U_\infty - U}{U_\infty}$. Comment évolue l'épaisseur caractéristique δ du sillage lointain avec x ? Il reste à relier A à des informations en amont.

3. Si l'écoulement du sillage a perdu de la quantité de mouvement en rencontrant l'obstacle, c'est évidemment parce que ce dernier exerce une force sur le fluide. L'écoulement exerce lui sur l'obstacle une force opposée, résultant des effets de pression et de frottement. Lorsque l'obstacle admet la direction de l'écoulement comme

axe de symétrie, et que son angle d'incidence est nul, ce qui est supposé dans ce qui suit, l'écoulement est symétrique vis-à-vis de (O, \vec{e}_x) et l'effet de pression appelé portance est nul. Il subsiste uniquement l'effet de frottement traduit par une force appelée traînée que l'on notera \vec{D} , qui s'écrit, en introduisant le tenseur des contraintes $\vec{\sigma}$:

$$\vec{D} = \int_C \vec{\sigma} \cdot \vec{N}_0 ds = D \vec{e}_x \quad (9)$$

Dans cette expression, C représente le contour du profil, s l'abscisse curviligne le long de celui-ci, et \vec{N}_0 la normale unitaire extérieure, comme indiqué sur la figure 2. On raisonne dans la suite par unité de longueur suivant z , de sorte que ds correspond en fait à l'élément de surface du profil $dS = l.ds$ où l est la longueur suivant z de l'obstacle.

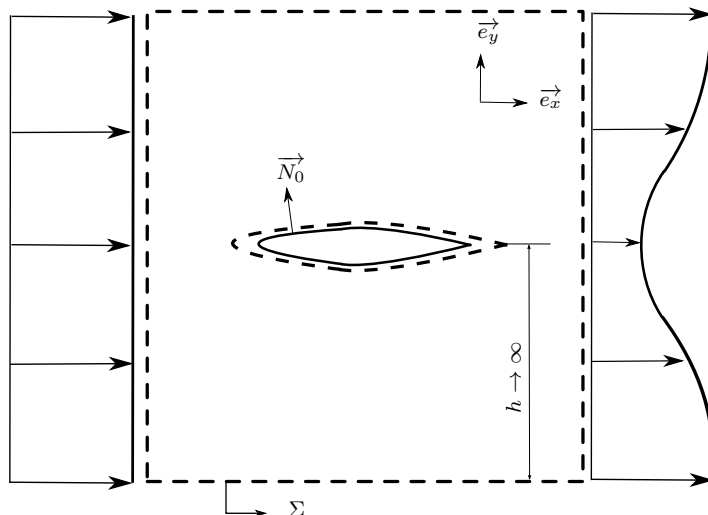


FIGURE 2: Définition de la surface Σ .

3.a. Fournir le bilan intégral de quantité de mouvement pour le fluide occupant le domaine Ω limité par C et la surface Σ du schéma, en tenant compte du fait qu'ici l'écoulement est stationnaire. En effectuant les approximations qui s'imposent pour le sillage lointain, montrer que D est finalement fournie par :

$$D = 2\rho U_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (U_\infty - U) dy \quad (10)$$

3.b. En déduire la constante A inconnue de la solution en fonction de D , ρ , U_∞ et ν . De ce point de vue, le corps apparaît comme un puits ponctuel de quantité de mouvement, sans que sa forme précise n'apparaisse. On trouve finalement :

$$\frac{U_\infty - U}{U_\infty} = \frac{D}{4\sqrt{\pi}\rho U_\infty^2 x} \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}} \exp\left(-U_\infty \frac{y^2}{4\nu x}\right) \quad (11)$$