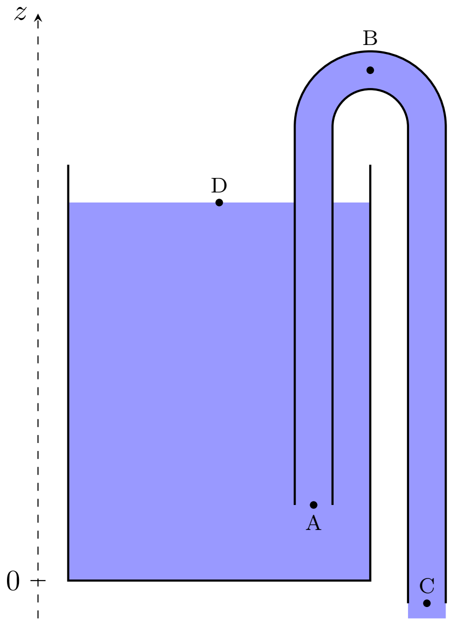
Mécanique des fluides

Siphon

Énoncé

On s'intéresse à la vidange d'un réservoir de section S, contenant un liquide de masse volumique ρ, au moyen d'un siphon formé d'un tube de section s constante. On suppose $S \gg s$. Initialement, le liquide remplit le réservoir jusqu'à une hauteur H. On nomme A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon, D un point de la surface libre dans le réservoir ; z_1, z_B, z_C et z_D les coordonnées correspondantes. La surface libre dans le réservoir et la sortie du siphon sont à la pression atmosphérique P_0.



1. Que peut-on dire de la vitesse v_D par rapport à v_C ?

2. Déterminer la vitesse du fluide en sortie du siphon. En déduire une condition sur C pour que le fluide s'écoule.

3. Déterminer la pression P_B dans le fluide au point B. En déduire une condition sur B pour que le fluide s'écoule.

4. À partir de la question précédente, expliquer pourquoi un siphon a besoin d'être amorcé. Que faut-il faire pour réaliser en pratique cet amorçage ?

5. Supposons le siphon fixe. Montrer que z_D est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dz_D}{dt} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g(z_D - z_C)}. \tag{1}$$

6. Résoudre cette équation et déterminer le temps nécessaire pour vidanger complètement le réservoir.

Corrigé

On fait avant tout l'hypothèse d'un écoulement incompressible et parfait.

1. Par conservation du débit, on $Sv_D = sv_C$ (vitesse uniforme dans les sections car écoulement parfait). Comme $S \gg s$, on a $v_C \gg v_D$.

2. On applique le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant de D à C. On néglige la vitesse en D et on a :

$$P_0 + 0 + \rho g z_D = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g z_C \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(z_D - z_C)}. \tag{2}$$

Cela impose que $z_D > z_C$, donc que la sortie du siphon soit sous la surface libre.

3. On applique le théorème de Bernoulli entre B et C. On obtient :

$$P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g z_C. \tag{3}$$

Or par conservation du débit, $v_B = v_C$, d'où :

$$P_B = P_0 + \rho g(z_C - z_B). \tag{4}$$

Comme P_B doit rester positive, on a forcément $z_B < z_C + \dfrac{P_0}{\rho g}$.

4. Quand le siphon est vide, $P_B = P_0$. Il faut donc aspirer pour faire chuter la pression dans le tube et amorcer le siphon.

5. On utilise la conservation du débit ($Sv_D = sv_C$) et le fait que $\dfrac{dz_D}{dt} = -v_D$. Étant donnée l'expression de v_C obtenue question 2., on a :

$$\frac{dz_D}{dt} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g(z_D - z_C)}. \tag{5}$$

6. On sépare les variables pour résoudre cette équation différentielle non-linéaire et l'intégrer entre $t = 0$ et τ qui correspond au moment où le réservoir est vide. :

$$\frac{dz_D}{\sqrt{(2g(z_D - z_C)}} = -\frac{s}{S}dt \Rightarrow \int_H^{z_A} \frac{dz_D}{\sqrt{(2g(z_D - z_C)}} = \int_0^{\tau} -\frac{s}{S}dt. \tag{6}$$

On reconnait à gauche une fonction du type $u'/2\sqrt{u}$. Cela nous amène à :

$$\frac{1}{g}\left[\sqrt{2g(z_D - z_C)}\right]_H^{z_A} = -\frac{s}{S}\tau \Rightarrow \tau = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H - z_C} - \sqrt{z_A - z_C}\right). \tag{7}$$