Transfert thermique

Sensation chaud-froid

Énoncé

Deux cylindres de même section S, isolés latéralement, de même axe (Ox), de conductivité λ_1 et λ_2, de masse volumique ρ_1 et ρ_2, de capacité thermique c_1 et c_2 et de longueur L_1 et L_2. On maintient les extrémités de chaque cylindre $x = -L_1$ et $x = L_2$ à des températures T_1 et T_2 respectivement. On se place en régime stationnaire. On note T_i la température en $x = 0$.

1. Établir l'expression de $T(x)$ dans les deux cylindres.

2. En déduire que la température à l'interface T_i est un barycentre de T_1 et T_2.

3. On prend $T_1 = 37^o\text{C}$ (doigt) et $T_2 = 20^o\text{C}$ (acier ou bois). On suppose $L_1 = L_2$. On donne $\lambda_1 = 10\,\text{W/m/K}$, $\lambda_{2,bois} = 1\,\text{W/m/K}$ et $\lambda_{2,acier} = 100\,\text{W/m/K}$. Calculer T_i pour le contact doigt-bois et doigt-acier. Commenter.

4. On s'intéresse désormais à l'aspect dynamique du problème. Pour cela on considère que les deux cylindres, toujours en contact en $x = 0$, sont semi-infinis dans leur direction respective. A $t = 0$, le cylindre 1 est à la température T_1 et le cylindre 2 à la température T_2. On admettra que dès le contact, la température à l'interface est stationnaire et vaut T_i. On admettra enfin que la fonction $f_a(x,t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} \exp(-u^2)du$ est solution de l'équation de la chaleur 1D. Expliquer pourquoi dans le demi-espace négatif on peut trouver une solution de l'équation de diffusion thermique de la forme : $T_1(x,t) = A + Bf_{a_1}(x,t)$ (a_1 est le coefficient de diffusion du milieu).

5. Déterminer A et B en fonction de T_1 et T_i. On rappelle que $\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. Chercher de même pour le demi-espace positif une solution de la forme : $T_2(x,t) = C + Df_{a_1}(x,t)$ et donner C et D.

7. On définit l'effusivité comme $E = \sqrt{\mu c \lambda}$. Déterminer t_i en fonction de T_1, T_2, E_1 et E_2.

8. Avec les données de la question 3., et sachant que $E_1 = 1800$, $E_{2,bois} = 400$ et $E_{2,acier} = 14000$, déterminer T_i pour le deux contacts. Commenter.

9. Comment expliquer que la température T_i s'établisse instantanément au moment du contact ?

Corrigé

1. En régime stationnaire, dans chaque cylindre, on a par l'équation de la chaleur, $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$. Cela nous donne :

— pour le cylindre de gauche, $T_1(x) = (-T_1 + T_i)\frac{x}{L_1} + T_i$,

— pour le cylindre de droite, $T_2(x) = (T_2 - T_i)\frac{x}{L_2} + T_i$.

2. En $x = 0$, le flux thermique est continu (pas d'accumulation d'énergie). On peut alors écrire :

$$j_Q(x=0) = -\lambda_1 \frac{dT_1}{dx}|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{dT_2}{dx}|_{x=0}. \tag{1}$$

On a alors :

$$\lambda_1 \frac{T_i - T_1}{L_1} = \lambda_2 \frac{T_2 - T_i}{L_2}, \tag{2}$$

ce qui nous donne finalement $T_i = \frac{\frac{\lambda_1}{L_1}T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2}T_2}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$. On a donc bien un barycentre des températures faisant intervenir en pondération les rapports de conductivité sur longueur.

3. Les analyses numériques donnent $T_i^{main-acier} = 21,5^o$C et $T_i^{main-bois} = 35,5^o$C. La température de contact avec l'acier est plus faible ce qui donne cette sensation de froid lorsqu'on le touche.

4. Une constante est solution de l'équation de la chaleur et comme $f_a(x,t)$ aussi, une combinaison linéaire d'une constante et de $f_a(x,t)$ également.

5. Avec les conditions aux limites on obtient pour $x < 0$, $T_1(x,t) = T_i + (T_i - T_1) f_{a_1}(x,t)$.

6. De même on obtient, en prenant garde aux signes, $T_2(x,t) = T_i - (T_i - T_2) f_{a_2}(x,t)$ pour $x > 0$.

7. De la continuité du flux thermique en $x = 0$ on obtient :

$$T_i = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}. \tag{3}$$

8. Les analyses numériques donnent $T_i^{main-bois} = 21,9^o$C et $T_i^{acier-bois} = 33,9^o$C. Bien que plus complexe, ce modèle donne des résultats proches du modèle statique.

9. Le gradient thermique à l'interface est très intense à l'interface si bien que les changements de température s'y font très vite et donc que la température T_i est établie quasi-instantanément.