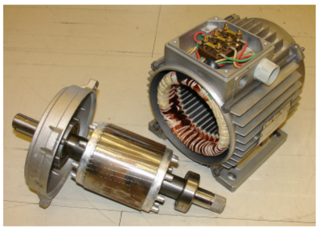
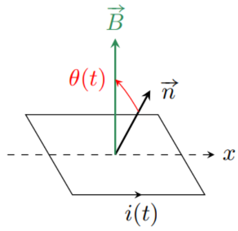
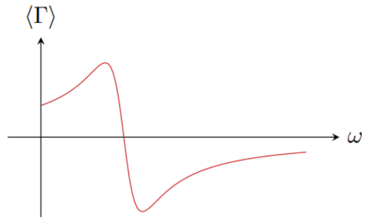
Moteur asynchrone

Énoncé

Le bobinage du rotor d'une machine asynchrone peut être modélisé par une spire unique de résistance R, d'inductance L et de surface S tournant à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe (Ox). La normale $\overrightarrow{n}$ à la spire est contenue dans le plan (Oyz). Cette spire est plongée dans un champ $\overrightarrow{B}$ généré par le stator, localement uniforme, contenu dans le plan (Oyz), de norme constante, tournant à vitesse angulaire constante ω' autour de (Ox). Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraîne le rotor.







1. Expliquer qualitativement (sans équation) pourquoi la spire tourne. Les deux vitesses ω et ω' peuvent-elles être identiques ?

2. Pour simplifier, on suppose qu'à l'instant initial $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{B}$ sont colinéaires et de même sens selon $\overrightarrow{e_z}$. Exprimer l'angle θ en fonction de $\Omega = \omega' - \omega$. Que représente physiquement la vitesse de glissement Ω ?

3. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution du courant dans le rotor en fonction de Ω.

4. On se place en régime permanent. Déterminer la pulsation du courant dans la bobine et résoudre l'équation différentielle obtenue précédement à l'aide de la représentation complexe. Écrire la solution comme une somme de sinus et cosinus.

5. En considérant le moment magnétique $\overrightarrow{m}$ de la spire, calculer le couple auquel elle est soumise. En déduire le couple moyen $\langle\Gamma\rangle$ s'exerçant sur la bobine.

6. L'allure de la courbe représentant $\langle\Gamma\rangle$ en fonction de ω est donnée ci-dessus. Le moteur peut-il démarrer seul ?

7. Le moteur doit entraîner une charge mécanique exerçant un couple résistant Γ_r connu. Justifier graphiquement qu'un ou deux points de fonctionnement, c'est-à-dire une ou deux vitesses de rotation ω, sont possibles. En raisonnant en termes de stabilité par rapport à Γ_r, justifier qu'un de ces deux points de fonctionnement n'est pas utilisable en pratique. Lequel et pourquoi ?

Corrigé

1. Supposons la spire immobile. Du fait de la rotation du champ tournant, le flux magnétique au travers de la spire varie. Il y a donc un phénomène d'induction, qui génère un courant dans la

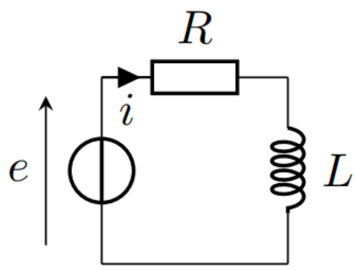
spire. Ce courant a pour conséquence l'apparition d'un moment magnétique qui tend à s'aligner avec le champ. Comme le champ tourne, la spire tourne également. On peut donner une vision équivalente à partir de la loi de Lenz : l'effet du courant induit est de diminuer les variations de flux magnétique au travers de la spire, et donc de chercher à donner à la spire une orientation constante par rapport au champ $\overrightarrow{B}$. Comme le champ tourne, la spire tourne également. Les deux vitesses de rotation ne peuvent pas être égales. Si tel était le cas, en se plaçant dans le référentiel de la spire, le champ magnétique serait fixe et de norme constante, et il ne pourrait donc plus y avoir d'induction. La spire ralentirait alors en raison des frottements ... ce qui impliquerait de nouveau un phénomène d'induction.

2. À l'instant t, $\overrightarrow{n}$ forme avec $\overrightarrow{e_z}$ un angle ωt et $\overrightarrow{B}$ un angle $\omega' t$. L'angle θ vaut donc

$$\theta(t) = \omega' t - \omega t = \Omega t. \tag{1}$$

La vitesse de glissement Ω est la vitesse angulaire à laquelle $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{B}$ se décalent l'un par rapport à l'autre.

3. Le circuit électrique équivalent est présenté ci-dessous. Il n'y a pas de couplage inductif à prendre en compte. Le sens de i et de e doit être le même pour pouvoir appliquer la loi de Faraday.



Le flux magnétique au travers de la spire à l'instant t est égal à

$$\phi(t) = S\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} = SB\cos\theta = SB\cos(\Omega t) \tag{2}$$

On en déduit la f.é.m. induite par le champ extérieur par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = SB\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{soit} \quad e = SB\Omega\sin(\Omega t). \tag{3}$$

D'après la loi des mailles l'équation électrique s'écrit :

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{SB}{L}\Omega\sin(\Omega t). \tag{4}$$

4. L'équation différentielle décrit un circuit en forçage harmonique de pulsation Ω. La pulsation du courant dans la bobine en régime permanent est donc Ω. Passer l'équation différentielle en représentation complexe pose une difficulté à cause du terme de droite. En représentation complexe $\cos(\Omega t) \rightarrowtail \exp(i\Omega t)$ et $\sin(\Omega t) \rightarrowtail -i\exp(i\Omega t)$. L'équation différentielle devient :

$$i\Omega\underline{I}\exp(j\Omega t) + \frac{R}{L}\underline{I}\exp(j\Omega t) = -j\Omega\frac{SB}{L}\exp(j\Omega t), \tag{5}$$

soit

$$\underline{I} = -\frac{j\Omega SB}{R + jL\Omega} = -\frac{j\Omega SB(R - jL\Omega)}{R^2 + L^2\Omega^2} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2}(jR + L\Omega), \tag{6}$$

et finalement

$$\underline{I}\exp(j\Omega t) = -\frac{\Omega SB}{R^2+L^2\Omega^2}(L\Omega - jR)(\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)). \tag{7}$$

On prend la partie réelle et :

$$i(t) = -\frac{\Omega SB}{R^2+L^2\Omega^2}(L\Omega\cos(\Omega t) - R\sin(\Omega t)). \tag{8}$$

5. Le moment magnétique de la spire est égal à $\overrightarrow{m}(t) = i(t)S\overrightarrow{n}(t)$, et le couple magnétique auquel la spire est soumise vaut

$$\overrightarrow{\Gamma}(t) = \overrightarrow{m}(t) \wedge \overrightarrow{B} = \| \overrightarrow{m} \| \| \overrightarrow{B} \| \sin\theta(t)\overrightarrow{e_x} \Rightarrow \overrightarrow{\Gamma} = i(t)SB\sin(\Omega t)\overrightarrow{e_x}, \tag{9}$$

d'où

$$\Gamma = i(t)SB\sin(\Omega t) \Rightarrow \Gamma = -\frac{\Omega(SB)^2}{R^2+L^2\Omega^2}(L\Omega\cos(\Omega t) - R\sin(\Omega t))\sin(\Omega t). \tag{10}$$

On calcule la moyenne (1/2 pour un cosinus ou sinus carré, 0 pour un produit de sinus et cosinus) et :

$$\langle\Gamma\rangle = \frac{R\Omega(SB)^2}{2(R^2+L^2\Omega^2)}. \tag{11}$$

6. Lorsque la vitesse de rotation est nulle, $\omega = 0$ et $\Omega = \omega'$. Le couple moyen exercé sur le rotor est donc non-nul : le moteur asynchrone est donc en mesure de démarrer seul.

7. En régime permanent, le couple moteur moyen $\langle\Gamma\rangle$ doit compenser le couple résistant. Le point de fonctionnement du moteur asynchrone correspond donc à la (aux) vitesse(s) de rotation ω telle(s) que $\langle\Gamma\rangle = \Gamma_r$. Les deux cas sont représentés ci-dessous : le(s) point(s) de fonctionnement sont situés aux intersections des courbes. Dans le premier cas, un seul point de fonctionnement est possible, et la charge est entraînée à une vitesse de rotation ω légèrement inférieure à ω'. Dans le second cas, deux points de fonctionnement sont envisageables. Celui à plus basse vitesse de rotation est instable : si le couple résistant augmente par exemple sous l'effet d'une perturbation, alors d'après la loi du moment cinétique la vitesse de rotation du moteur diminue ... mais dans ce cas le couple moteur moyen diminue aussi. Le moteur ne peut donc plus entraîner la charge et décroche. Au contraire, pour le point de fonctionnement à plus haute vitesse de rotation, le couple moteur augmente si ω diminue, ce qui permet de compenser la perturbation.

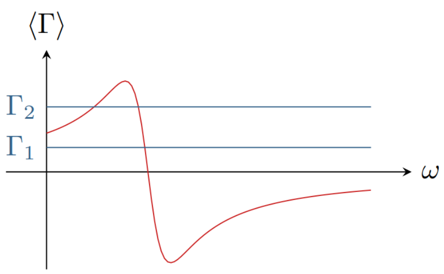


Figure 1: Points de fonctionnement du moteur asynchrone. Les points de fonctionnement sont les points d'intersection des droites bleues représentant le couple résistant et de la courbe rouge représentant le couple moteur moyen.