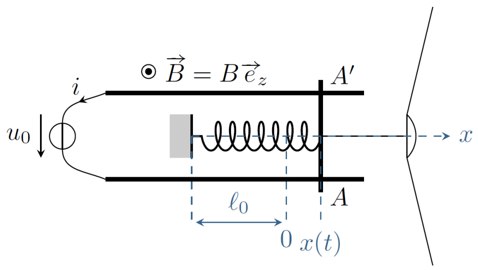
Induction

Haut-parleur de Laplace

Énoncé



On s'intéresse dans cet exercice à un modèle très simplifié de haut-parleur, dans une configuration proche des rails de Laplace où la membrane du haut-parleur est fixée solidairement à la tige mobile, qui est également reliée élastiquement à un bâti. La tige mobile a pour longueur $AA' = a$, et sa position est repérée par son abscisse x, dont l'origine correspond à la position de repos. Les frottements de l'air sur la membrane se traduisent par une force de frottement linéaire $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{e_x}$. Le système est forcé électriquement par la tension de commande u_0. On note R la résistance électrique de l'ensemble, et on néglige l'auto-induction.

1. Exprimer en fonction de $\dot{x}$ la f.é.m. induite.

2. Écrire les équations électrique et mécanique.

3. Découpler ces équations pour aboutir à une unique équation différentielle portant sur la position x de la tige mobile. Quel type d'équation obtient-on ? L'analyser physiquement : comment se traduisent les phénomènes d'induction ? Commenter leur signe.

4. Procéder à un bilan de puissance du système et interpréter physiquement chaque terme.

Corrigé

1. Le flux du champ magnétique s'écrit ici $\Phi = Ba(\ell_0 + x(t))$. La force électromotrice induite est donc :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\dot{x}(t). \tag{1}$$

2. On commence par l'équation électrique. Il s'agit d'un circuit avec la f.é.m. e et une résistance R (en négligeant l'auto-induction). On a donc :

$$e(t) + u_0 = Ri(t) \Rightarrow Ri(t) = -Ba\dot{x}(t) + u_0. \tag{2}$$

Pour l'équation mécanique, on fait le bilan des forces qui s'appliquent sur la barre. Le frottement fluide est $\overrightarrow{f} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{e_x}$. Le rappel élastique s'écrit $\overrightarrow{f_e} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{e_x} = -kx(t)\overrightarrow{e_x}$ où k est la raideur élastique. La force de Laplace s'écrit $\overrightarrow{f_L} = \oint i(t)\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$. Le sens de la force dépend du sens de déplacement. On prend donc une intensité algébrique (positive quand la barre va vers les x décroissants, négative sinon). Les forces de Laplace sur les parties horizontales du circuit se compensent. On obtient $\overrightarrow{f_L} = iaB\overrightarrow{e_x}$. On a alors, grâce au PFD projeté sur $\overrightarrow{e_x}$, l'équation mécanique suivante :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx - iaB = 0. \tag{3}$$

3. Grâce à l'équation électrique, on remplace $i(t)$ dans l'équation mécanique et l'on obtient :

$$m\ddot{x} + \left(\alpha + \frac{(Ba)^2}{R}\right)\dot{x} + kx = \frac{u_0 aB}{R}. \tag{4}$$

On obtient une équation d'oscillateur amorti. Les phénomènes d'induction ajoutent de l'amortissement. Leur signe est le même que pour un frottement fluide.

4. On reprend l'équation précédente et on la multiplie par la vitesse v de déplacement de la barre. On obtient alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -\frac{(aB)^2}{R}v^2 - \alpha v^2 + \frac{u_0 aB}{R}v. \tag{5}$$

On multiplie l'équation électrique par l'intensité :

$$Ei - Bavi = Ri^2. \tag{6}$$

On couple les équations et on obtient :

$$Ei = Ri^2 + \alpha v^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right). \tag{7}$$

La puissance fournie par le générateur est partiellement dissipée par effet Joule, sert à émettre une onde sonore, et à mettre en mouvement le système tige-membrane.