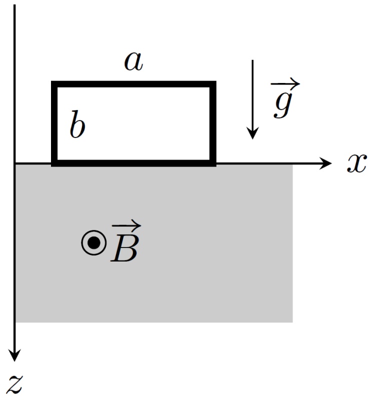
Induction

Freinage par induction

Énoncé



La plupart des manèges des parcs d'attraction utilisent des dispositifs de freinage inductif en plus du freinage par friction. On modélise dans cet exercice une attraction proposant aux passagers d'une cabine d'ascenseur de tomber en chute quasi-libre pendant quelques secondes avant d'être brutalement freinés. La première étape du freinage est magnétique. Dans le châssis de la cabine d'ascenseur est placée une spire conductrice modélisée par un rectangle de côtés a et b, de masse m et de résistance R. Sa position est repérée par la cote z du bas de la spire. Dans le demi-espace $z > 0$ règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent. À l'instant $t = 0$, la cabine se trouve dans la situation représentée sur la figure ci-contre où $z = 0$, sa vitesse valant alors $\vec{v} = v_0\vec{u_z}$. Pour simplifier, les frottements de l'air seront négligés dans tout l'exercice.

1. Montrer que le mouvement ultérieur de la cabine reste une translation verticale selon l'axe (Oz), en particulier qu'elle ne se met pas à tourner sur elle-même.

2. Établir les équations mécanique et électrique.

3. En déduire une équation différentielle portant sur la vitesse v de la cabine. Résoudre cette équation. Que se passe-t-il lorsque $z = b$?

4. Justifier qu'un freinage magnétique ne peut pas suffire à arrêter la cabine d'ascenseur.

5. On considère maintenant que la résistance du cadre est nulle. Que se passe-t-il?

Corrigé

1. On considère un point O à l'aplomb du centre de masse du cadre. Les forces qui s'appliquent sur le cadre sont le poids, vertical, et la force d'induction qui, d'après la loi de Lenz, s'oppose aux causes qui lui donnent naissance. Il s'agit de la vitesse, verticale initialement, donc cette force est verticale. Les résultantes de ces forces s'appliquent au centre de masse du cadre, et le moment des forces qui s'appliquent au cadre, calculé en O, est nul. Ainsi, le moment cinétique du cadre, perpendiculaire à la vitesse, est constant. Ainsi, le vecteur moment cinétique est de direction constante, et il en va donc de même pour la vitesse. Le mouvement reste plan. L'absence de moment des forces fait que le cadre ne peut pas pivoter.

2. Il existe deux phases du mouvement : (i) lorsque seule une partie du cadre est plongée dans le champ, et (ii) lorsque tout le cadre est plongé dans le champ. On considère cette première phase.

On commence par l'équation mécanique. La force de Laplace qui s'applique sur le cadre s'écrit :

$$\vec{F_L} = \oint i\vec{d\ell} \wedge \vec{B}. \tag{1}$$

Il n'y a des forces que sur la partie du cadre pongée dans le champ. Les forces s'appliquant sur les parties verticales se compensent. Par conséquent, on a $\overrightarrow{F_L} = -i(t)aB\overrightarrow{e_z}$. On prendra garde à l'orientation de $\overrightarrow{d\ell}$ qui va vers les x décroissants ici. Le PFD nous donne alors suivant $\overrightarrow{e_z}$:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - i(t)aB. \tag{2}$$

La loi de Faraday nous permet de déterminer la force électromotrice : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$. Ici $\Phi = -Baz(t)$ où $z(t)$ repère l'altitude la partie basse du cadre. Attention à l'orientation de la surface délimitée par le cadre ! On a donc, en posant la résistance R du cadre, l'équation électrique :

$$Ri(t) = Bav(t). \tag{3}$$

3. On peut donc écrire, après avoir découplé les équation, un équation différentielle sur $v(t)$:

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{B^2a^2}{R}v(t) = mg. \tag{4}$$

On résout cette équation et l'on obtient, en posant $\tau = mR/(Ba)^2$ et $v_\infty = mgR/(Ba)^2$:

$$v(t) = (v_0 - v_\infty)\exp(-\frac{t}{\tau}) + v_\infty. \tag{5}$$

Attention, cette expression n'est valable que pour $z(t) \leq b$. Au-delà, il n'y a plus de force de Laplace et on retrouve une équation différentielle de chute libre.

4. Lorsque tout le cadre est dans le champ, on se retrouve dans une situation de chute libre, et le cadre accélère de nouveau.

5. Si $R = 0$ il faut prendre en compte le phénomène d'auto-induction. Le courant créé par le champ extérieur génère en effet un champ propre qui n'est plus négligeable devant le champ extérieur (car le courant n'est plus petit). La force électromotrice s'écrit alors :

$$e = abv(t) - L\frac{di(t)}{dt}, \tag{6}$$

avec L le coefficient d'auto-inductance. L'équation électrique est immédiate, à savoir $e(t) = 0$ car il n'y a plus de résistance. On obtient alors un oscillateur harmonique sur la vitesse :

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \omega_0^2 v(t), \tag{7}$$

avec $\omega_0 = (aB)^2/mL$. La solution est, compte-tenu de la condition initiale,

$$v(t) = v_0\cos(\omega_0 t) + \frac{g}{\omega_0}\sin(\omega_0 t). \tag{8}$$

Avec la condition $z(0) = 0$, on obtient :

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t) + \frac{g}{\omega_0^2}(1 - \cos(\omega_0 t)). \tag{9}$$