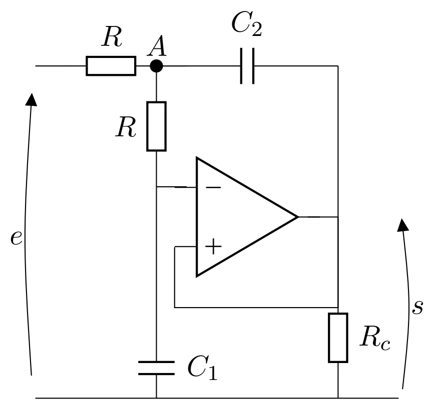
Filtre de Butterworth

Énoncé

On considère le montage ci-dessous où l'ALI est idéal.



1. Calculer la fonction de transfert de ce montage.

2. Déterminer la condition que doivent vérifier C_1 et C_2 pour que le module de la fonction de transfert s'écrive :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}. \tag{1}$$

Donner alors la valeur de ω_0 en fonction de R et C_1.

3. Étudier les variations du gain. En déduire le tracé réel et le tracé asymptotique du gain en décibels en fonction de de $\log \omega$.

4. Définir et calculer la bande passante du filtre.

5. Étudier et tracer le déphasage en fonction de $\log \omega$.

Corrigé

1. On formule l'hypothèse que l'ALI est en régime linéaire. En effet, dans le cas contraire, la notion de fonction de transfert n'a pas de sens. On applique la loi des noeuds en A. On a alors :

$$\frac{e - V_A}{R} + \frac{V^- - V_A}{R} = jC_2\omega(V_A - s). \tag{2}$$

Comme $V^- = V^+ = s$ on a :

$$e = V_A(2 + jRC_2\omega) - s(1 + jRC_2\omega). \quad (3)$$

Par ailleurs, on peut écrire un diviseur de tension :

$$-RV_A = \left(R + \frac{1}{jC_1\omega}\right)(s - V_A) \Rightarrow V_A = s(1 + jRC_1\omega). \quad (4)$$

On obtient alors :

$$H = \frac{1}{1 + 2jRC_1\omega - R^2C_1C_2\omega^2}. \quad (5)$$

2. Le module s'écrit :

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^4C_1^2C_2^2\omega^4 - 2R^2C_1C_2\omega_2 + 4R^2C_1^2\omega^2}} \quad (6)$$

Pour écrire le module sous la forme proposée, il faut annuler le terme en ω^2 soit $C_2 = 2C_1$. On a par ailleurs $\omega_0 = 1/(R\sqrt{C_1C_2})$.

3. Le gain est une fonction décroissante de ω.Les asymptotes sont plates pour $\omega \to 0$ et avec une pente de -40dB par décade pour les grands ω.

4. La bande passante est définie par les valeurs de ω telles que $|H| > |H|_{max}/\sqrt{2}$. Cela impose $\omega < \omega_0$ donc la bande passante est $[0, \omega_0]$.

5. On retourne à la fonction de transfert. On utilise la condition $C_2 = 2C_1$. On a alors :

$$\tan\phi = -\frac{2RC_1\omega}{1 - 2R^2C_1^2\omega^2}. \quad (7)$$

Pour $\omega < \omega_0$, $\cos\phi > 0$, sinon le cosinus est négatif. On a donc pour $\omega < \omega_0$:

$$\phi = -\arctan\frac{2RC_1\omega}{1 - 2R^2C_1^2\omega_2}, \quad (8)$$

et si $\omega > \omega_0$:

$$\phi = \pi - \arctan\frac{2RC_1\omega}{1 - 2R^2C_1^2\omega_2}. \quad (9)$$

L'étude de ces fonctions montre une décroissance du déphasage de 0 à $-\pi/2$ puis de $3\pi/2$ à π.