Statique des fluides

Ascension d'un ballon sonde

Énoncé

1. On note Oz l'axe vertical ascendant avec $z = 0$ au sol. La troposphère est la partie de l'atmosphère inférieure à 10 km. On la considère comme un gaz parfait à la pression $P(z)$, de température $T(z)$ et de volume massique $v(z)$. Au sol $P(z = 0) = P_0$, $T(z = 0) = T_0$. Elle est en équilibre thermodynamique et mécanique et obéit à la loi polytropique :

$$P^{-k}(z)T(z) = \text{cste} \quad \text{avec} \quad k = 0.15. \tag{1}$$

(a) Comment peut-on qualifier la transformation correspondant à $k = 0$?

(b) Définir les mots "homogène" et "isotrope". Caractérisent-ils la troposphère ?

(c) Donner l'équation d'état d'un gaz parfait reliant R, M_{air} et les données du problème.

(d) Exprimer la loi de la statique des fluides avec g, $\dfrac{dP}{dz}$ et $v(z)$.

(e) On appelle gradient thermique la variation de $T(z)$ par mètre $\dfrac{dT}{dz} = -\delta$. Déduire δ en fonction de k, M_{air}, g et R. Analyse numérique.

(f) Déterminer $T(z)$.

(g) On considère une quantité de n moles de gaz parfait à l'altitude z qui évolue dans la troposphère. On note $V(z)$ le volume qu'elle occupe à z et $V_0 = V(z = 0)$. Déterminer $\dfrac{V(z)}{V_0}$ en fonction de δ, z, T_0 et k.

2. Un ballon sonde dégonflé et instrumenté a une masse totale $m_B = 1,2\,\text{kg}$. On gonfle au sol son enveloppe avec n_0 moles de dihydrogène. Son volume est alors V_0. L'enveloppe reste fermée tant que son volume est tel que $V(z) < 10\,V_0$. Lorsque $V(z) = V_{max}$, l'enveloppe se déchire et le ballon retombe au sol.

(a) Sur ce ballon s'exerce une force de frottement $\vec{F_f}$. La force totale s'exerçant sur le ballon est $(F - mg)\vec{e_z} + \vec{F_f}$. En effectuant un bilan des forces, déterminer le terme F en fonction de n_0, de g, de la masse molaire du dihydrogène $M_{H_2} = 2\,\text{g/mol}$ et de celle de l'air M_{air}.

(b) Calculer la valeur minimale n_{min} de n_0 pour que le ballon décolle.

(c) On admet le modèle de troposphère précédent. Durant l'ascension on peut considérer que température et pression sont quasiment identiques à l'intérieur et à l'extérieur du ballon. Calculer h, l'altitude pour laquelle le ballon explose, sachant que $T_0 = 293\,\text{K}$. Commenter le résultat.

Corrigé

1. **(a)** Si $k = 0$, la transformation est isotherme.

(b) Homogène signifie que les variables d'état sont les mêmes en tout point. Isotrope signifie que les propriétés sont les mêmes dans toutes les direction. Ici il y a une direction spécifique, la verticale, et la masse volumique dépend de l'altitude, donc on est ni isotrope ni homogène.

(c) On a le volume d'un volume mésoscopique qui vaut $V = nM_{air}v(z)$. Ainsi,

$$P(z)V = nRT \Rightarrow P(z)v(z) = \frac{RT}{M_{air}}. \tag{2}$$

(d) $v(z) = 1/\rho(z)$ où ρ est la masse volumique. On a alors :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{g}{v(z)}. \tag{3}$$

(e) On appelle C la constante de la loi fournie reliant P et T. On cherche $\frac{dT}{dz}$. Or on a $T = CP^k$ où $C = P_0^{-k}T_0$. On a donc :

$$\frac{dT}{dz}Ckp^{k-1}\frac{dP}{dz}. \tag{4}$$

Avec $P^{k-1} = \frac{T}{CP}$ on a :

$$\frac{dT}{dz}k\frac{T}{P}\frac{dP}{dz} = k\frac{M_{air}v(z)}{R}\left(-\frac{g}{v(z)}\right) = -\frac{M_{air}kg}{R} \Leftrightarrow \delta = \frac{M_{air}kg}{R} = 5,1 \times 10^{-3}\,\mathrm{K.m^{-1}}. \tag{5}$$

(f) On intègre et l'on obtient $T(z) = T_0 - \delta z$.

(g) On applique la loi des gaz parfaits à l'altitude z et au sol : $P(z)V(z) = nRT(z)$ et $P_0V_0 = nRT_0$. On fait le rapport de ces deux équations puis on utilise la loi dite polytropique donnée dans l'énoncé :

$$\frac{V(z)}{V_0} = \frac{T(z)}{T_0}\frac{P(z)}{P_0} \Rightarrow \frac{V(z)}{V_0} = \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{1-1/k}. \tag{6}$$

Avec l'expression de $T(z)$:

$$\frac{V(z)}{V_0} = \left(1 - \frac{\delta z}{T_0}\right)^{1-1/k}. \tag{7}$$

2. **(a)** La force F est égale à la poussée d'Archimède moins le poids du dihydrogène. Étant donné que l'on suppose les deux gaz parfaits, le gaz dans le ballon et le gaz déplacé occupent le même volume correspondant au même nombre de moles n_0.

$$F = n_0(M_{air} - M_{H_2})g. \tag{8}$$

(b) Pour que le ballon décolle il faut $F > mg$ soit $n > n_{min} = \frac{m}{M_{air} - M_{H_2}}$.

(c) L'altitude maximale est atteinte lorsque le volume du ballon atteint $10\,V_0$. En utilisant l'expression obtenue à la fin de la première partie, on en déduit :

$$h = \frac{T_0}{\delta}\left(1 - \left(\frac{10\,V_0}{V_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right) = 19,2\,\mathrm{km}. \tag{9}$$

C'est supérieur à la limite de la troposphère donc le modèle n'est plus valable.