Electrostatique

Electromètre

Énoncé

Un électromètre est constitué de deux boules métalliques identiques de masse m et de rayon r suffisamment petit pour qu'elles puissent être considérées comme ponctuelles. Elles sont suspendues à un même point O par deux files isolants de longueur b. Une boule notée A est fixe et sur la verticale passant par O. L'autre notée P est mobile. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.

On donne $b = 12\,\mathrm{cm}$, $m = 2,55\,\mathrm{g}$, $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$, $\dfrac{1}{A\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\,\mathrm{SI}$.

Dans un premier temps, la boule P n'est pas chargée et la boule A porte une charge électrique Q. On met les deux boules en contact. Il en résulte une déviation du fil OP d'un angle φ par rapport à la verticale.

1. Après la mise en contact, quelle va être la charge des deux boules ?

2. Donner l'expression de la norme de la force électrostatique f qui s'exerce sur P.

3. Déterminer l'expression de φ_e à l'équilibre

4. Déterminer l'expression de l'intensité T de la tension du fil isolant OP à l'équilibre.

5. On mesure $\varphi_e = 60^{\mathrm{o}}$. En déduire la valeur de Q.

6. Calculer, à une constante près, l'énergie potentielle de P.

7. Retrouver φ_e et étudier la stabilité de l'équilibre.

Corrigé

1. Les deux boules étant identiques, et parfaitement conductrices, la charge va s'équi-répartir entre les deux boules, avec une charge de $Q/2$ chacune.

2. Il s'agit d'une interaction coulombienne :

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4||AP||^2}. \tag{1}$$

On calcule, à l'aide de trigonométrie dans le triangle OAP, isocèle. On a alors $||AP|| = 2\,b\sin(\varphi/2)$ donc finalement :

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{16b^2\sin^2(\varphi/2)} = \frac{B}{\sin^2(\varphi/2)}. \tag{2}$$

3. Pour déterminer l'expression de l'angle d'équilibre, on écrit le PFD en statique. Puis on le projette suivant l'axe perpendiculaire à OP (pour ne pas avoir la tension du fil). Pour cela on odéfinit l'angle α entre la force $\overrightarrow{f}$ l'axe parallèle à OP. Dans le triangle OAP on a alors $2\alpha + \varphi = \pi$. On a :

$$f\sin\alpha - mg\sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{B\cos(\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} = 2mg\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2). \tag{3}$$

On obtient finalement :

$$\sin^3(\varphi_e/2) = \frac{Q^2}{128mgb^2\pi\varepsilon_0} \tag{4}$$

4. On projette maintenant le PFD sur l'axe parallèle à OP. On obtient alors :

$$-T + mg\cos\varphi_e + f\sin\alpha = 0 \Rightarrow T = mg\cos\varphi_e + \frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 b^2\sin(\varphi_e/2)}. \tag{5}$$

5. On calcule $Q = 4\times 10^{-7}\,\mathrm{C}$.

6. Si on considère comme origine des énergies potentielles l'état initial, l'énergie potentielle due au poids s'écrit $E_p^{Poids} = -mgb\cos\varphi_e$. L'énergie potentielle électrostatique est :

$$E_p^{elec} = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4||AP||^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4||AP||} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{8b\sin(\varphi/2)}. \tag{6}$$

L'énergie potentielle totale est la somme de ces deux énergies.

7. On cherche l'angle tel que la dérivée par rapport à φ de l'énergie potentielle soit nulle. On retrouve l'expression voulue. On étudie maintenant la dérivée seconde. Elles est positive donc l'équilibre est stable.