Mécanique des fluides

Écoulement de Poiseuille plan de deux liquides non miscibles

Énoncé

On réalise un écoulement de Poiseuille plan de deux liquides non miscibles, considérés tous deux comme incompressibles, entre deux plaques planes horizontales. Les masses volumiques des liquides sont ρ_1 et ρ_2. Ils sont tous deux newtoniens, de viscosités dynamiques η_1 et η_2. L'écoulement est stationnaire. On travaille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, dans lequel les deux plaques sont fixes. L'axe (Oz) du repère cartésien est vertical ascendant. Le liquide indicé 2 occupe la zone comprise entre $z = -b/2$ et $z = 0$. Le liquide indicé 1, celle comprise entre $z = 0$ et $z = b/2$. On néglige les effets de bord c'est-à-dire qu'on suppose ces deux zones infiniment étendues selon (Ox) et (Oy). On néglige aussi l'influence de la gravité. On impose une pression P_e uniforme dans le plan $x = 0$, et une pression $P_s < P_e$ dans le plan $x = L$.

1. Quelle est la relation d'ordre entre ρ_1 et ρ_2 ? Justifier

2. On néglige désormais l'effet du poids. On admet que le champ des vitesses est de la forme :

$$\overrightarrow{v_1} = v_1(z)\overrightarrow{e_x} \text{ et } \overrightarrow{v_2} = v_2(z)\overrightarrow{e_x} \tag{1}$$

Montrer que la pression ne dépend que de x.

3. **(a)** Quelles sont les valeurs de vitesse au contact des plaques ?

(b) Quelles est la condition de vitesse à l'interface entre les deux fluides ?

(c) Quelle est la dernière condition à l'interface quil faut prendre en compte ? L'expliciter.

4. Après avoir explicité la valeur des forces dues à la friction visqueuse, établir les expressions des deux champs des vitesses.

5. Donner les allures possibles du champ des vitesses en fonction de z selon la valeur du rapport η_1/η_2.

Corrigé

1. On a $\rho_1 < \rho_2$ sinon le fluide le plus dense serait au-dessus, ce qui génèrerait un système instable.

2. Considérons une particule de fluide dans un des deux fluides. Comme les lignes de courant sont parallèles, et que l'écoulement est stationnaire, les particules restent sur des lignes de courant correspondant à la même vitesse. Leur accélération est donc nulle. La particule de fluide de volume $d\tau$ subit alors les forces de pression et les forces visqueuses colinéaires au mouvement. Le PFD appliqué à cette particule donne alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau - f_v \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0}. \tag{2}$$

Par conséquent, le gradient de pression est uniquement suivant $\overrightarrow{e_x}$ et donc la pression ne dépendra que de x.

3. **(a)** Au contact des plaques, la condition de non-glissement impose une vitesse nulle, soit :

$$v_1(b/2) = 0 \text{ et } v_2(-b/2) = 0. \tag{3}$$

(b) A l'interface, la vitesse doit être continue : $v_1(0) = v_2(0)$.

(c) Il y a aussi continuité de la contrainte de cisaillement à l'interface :

$$-\eta_1 \frac{dv_1}{dz}|_{z=0} = -\eta_2 \frac{dv_2}{dz}|_{z=0}. \tag{4}$$

4. La force de friction due à la viscosité s'écrit, pour une particule de fluide de volume $d\tau = dxdydz$, est la somme des forces de friction venant de la particule en z et de celle en $z + dz$:

$$f_v = -\eta \frac{dv}{dz}(z)dxdy + \eta \frac{dv}{dz}(z + dz)dxdy = \eta \frac{d^2v}{dz^2} dxdydz. \tag{5}$$

Le PFD projeté suivant $\overrightarrow{e_x}$ donne alors :

$$\eta \frac{d^2v}{dz^2} - \frac{dP}{dx} = 0. \tag{6}$$

Le premier terme ne dépend que de z, le second que de x. Par conséquent, pour que la relation soit valable pour tout couple (x, z), il est nécessaire que chacun des deux membres soient égale à un même constante K. Cela nous amène à $P(x) = Kx + C$. Avec les conditions aux limites sur la pression, on a $C = P_e$ et $K = (P_s - P_e)/L$.

Pour le fluide 1 on a alors $\dfrac{d^2v_1}{dz^2} = \dfrac{K}{\eta_1}$. On intègre deux fois cette équations, et avec un choix de constantes permettant une résolution plus aisée, on a :

$$v_1(z) = \frac{K}{2\eta_1}\left(z - \frac{b}{2}\right)^2 + A_1\left(z - \frac{b}{2}\right) + B_1. \tag{7}$$

De la même façon, pour le fluide 2 :

$$v_2(z) = \frac{K}{2\eta_2}\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 + A_2\left(z + \frac{b}{2}\right) + B_2. \tag{8}$$

Les conditions de non glissement aux parois permettent d'écrire $B_1 = B_2 = 0$. La condition de continuité de vitesse impose :

$$A_1 + A_2 = \frac{bK}{4}\left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}\right). \tag{9}$$

La dernière condition permet enfin d'écrire :

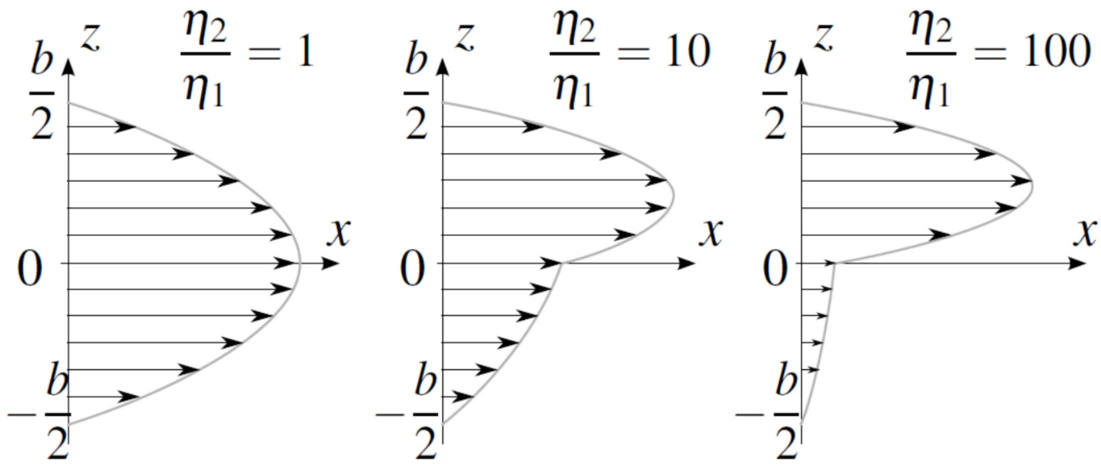
$$\eta_1\left(-\frac{Kb}{2\eta_1} + A_1\right) = \eta_2\left(\frac{Kb}{2\eta_2} + A_2\right). \tag{10}$$

On en déduit finalement :

$$v_1 = \frac{P_s - P_e}{2\eta_1 L}\left(z - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b(P_s - P_e)(3\eta_1 + \eta_2)}{4\eta_1 L(\eta_1 + \eta_2)}\left(z - \frac{b}{2}\right) \tag{11}$$

$$v_2 = \frac{P_s - P_e}{2\eta_2 L}\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b(P_s - P_e)(\eta_1 + 3\eta_2)}{4\eta_2 L(\eta_1 + \eta_2)}\left(z + \frac{b}{2}\right) \tag{12}$$

5. Voici quelques allures de profils.


z
$\frac{b}{2}$
$\frac{\eta_2}{\eta_1} = 1$
x
0
$-\frac{b}{2}$
$\frac{\eta_2}{\eta_1} = 10$
$\frac{\eta_2}{\eta_1} = 100$