Electromagnétisme

Chauffage par induction

Énoncé

On étudie dans cet exercice un dispositif modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0 cos(\omega t)$ de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique γ. Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.

1. - Faire un schéma du dispositif et donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on négligera tout effet de bord, ce qui revient à l'assimiler à un solénoïde infini.

2. Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.

3. Montrer que le champ électrique induit dans le métal est de la forme $\overrightarrow{E} = E_\theta(r,t)\overrightarrow{e_\theta}$.

4. Exprimer $\overrightarrow{E}$ en fonction notamment de r et I_0.

5. En déduire la densité de courant induite dans le matériau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ?

Donnée : $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}.$

Corrigé

1. Le système est représenté ci-dessous. En orientant l'axe z par rapport au courant i (règle de la main droite), le champ créé par le solénoïde s'écrit $\overrightarrow{B} = \mu_0 n i \overrightarrow{e_z}$ avec n le nombre de spires par unité de longueur. L'expression est identique dans l'ARQS et en magnétostatique.

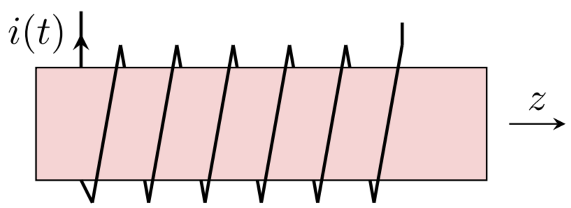

Figure 1: Dispositif de soudure inductive.

2. L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique dépendant du temps est source de champ électrique. Au sein du métal, ce champ électrique va faire apparaître une densité de courant $\overrightarrow{j}$ et céder de l'énergie au métal par effet Joule.

Une autre justification moins orientée "équations" consisterait à dire que le métal est un conducteur placé dans un champ magnétique variable, et est donc le siège d'un phénomène d'induction. Ce sont les courants induits (les courants de Foucault) qui vont chauffer le matériau par effet Joule.

3. L'analyse des invariances est identique à celle menée en électrostatique. Le champ électrique ne va dépendre ici que de r. En revanche, celle des symétries est beaucoup plus subtile à cause du champ magnétique variable : comme c'est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}$ qui intervient dans l'équation de Maxwell-Faraday, alors un plan de symétrie de $\partial\overrightarrow{B}/\partial t$ est plan d'antisymétrie de $\overrightarrow{E}$, ce qui est la propriété inverse par rapport à la charge électrique, car ρ apparaît dans l'équation de Maxwell-Gauss qui porte sur $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}$. Ainsi, comme tout plan contenant $\overrightarrow{z}$ est plan de symétrie de $\partial\overrightarrow{B}/\partial t$, c'est donc un plan d'antisymétrie de $\overrightarrow{E}$, qui est donc orthogonal à ce dernier, donc suivant $\overrightarrow{e_\theta}$.

4. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} = -\mu_0 n\frac{di}{dt}\overrightarrow{e_z} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\overrightarrow{e_z}, \tag{1}$$

et en utilisant le formulaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}\overrightarrow{e_z} \tag{2}$$

et donc

$$\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} = mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t). \tag{3}$$

On intègre par rapport à r et l'on obtient :

$$rE_\theta = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{r^2}{2} + f(t). \tag{4}$$

Comme on intègre une dérivée partielle pour laquelle certaines variables (ici t) sont fixées, alors la constante d'intégration est une "constante partielle", c'est-à-dire une fonction des variables fixées.

On montre que la fonction f est nulle en se plaçant en $r = 0$: comme il n'y a "rien de spécial" en ce point, la composante E_θ y prend une valeur finie. Finalement,

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{2}\mu_0 n r I_0 \omega \sin(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}. \tag{5}$$

5. D'après la loi d'Ohm locale,

$$\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E} = \frac{1}{2}\mu_0 \gamma n r I_0 \omega \sin(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}. \tag{6}$$

On en déduit la puissance volumique dissipée par effet Joule :

$$p_v = \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E} = \frac{1}{4}\gamma\mu_0^2 n^2 r^2 I_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t). \tag{7}$$

Elle est maximale quand r est maximal, c'est donc sur les bords du cylindre que le métal chauffe le plus et qu'il fond en premier. On retrouve un phénomène d'effet de peau analogue à celui rencontré avec les ondes électromagnétiques.