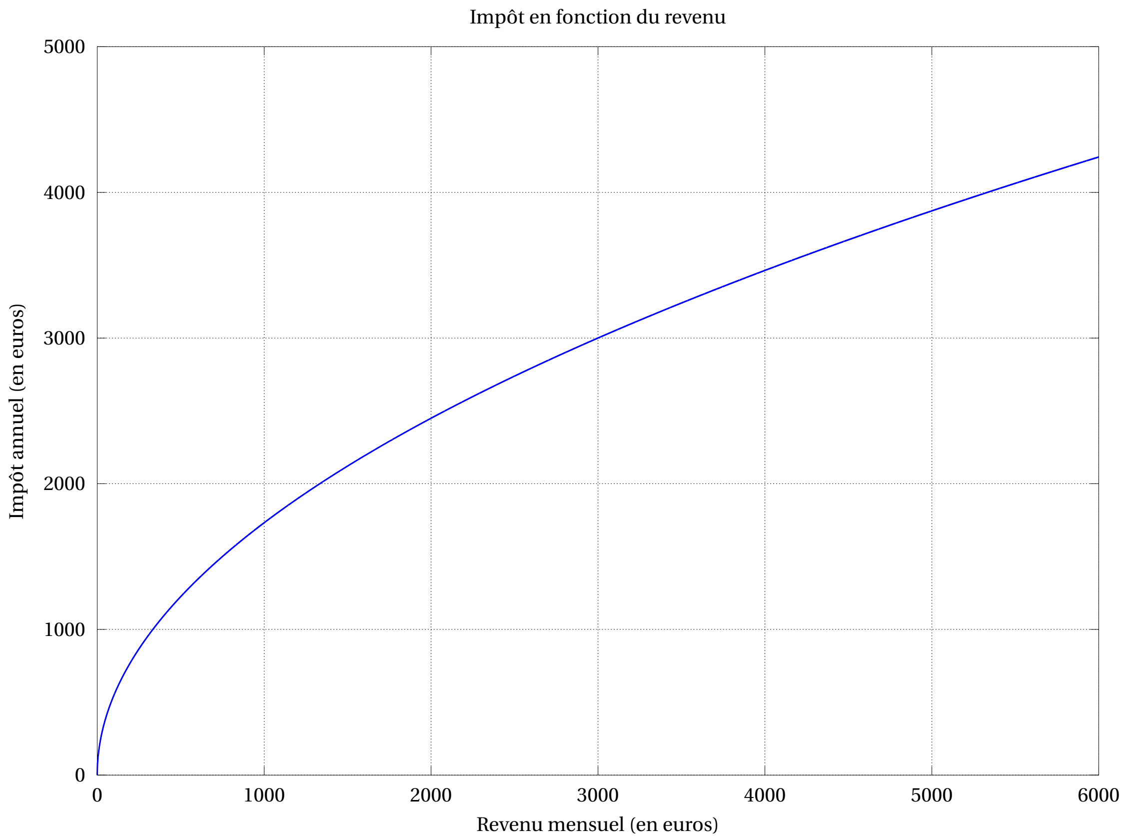
Tout au long de ce devoir, nous allons travailler sur les impôts. Vous avez besoin de votre ***calculatrice*** *et d'une règle. Des rappels sont écrits après les questions. Pour avoir la totalité des points à une question, il faut écrire une phrase. La présentation de la copie compte pour l'obtention des points.*

Bon courage !

1 Exercice (19 points)

Nous présentons dans cet exercice une version simplifiée de l'impôt sur le revenu. Cet impôt est vu ici comme une fonction racine du revenu. C'est à dire que votre salaire mensuel est noté x et l'impôt que vous devrez payer à la fin de l'année est noté $y = f(x)$ avec $f(x) = 54.772\sqrt{x}$. Le graphique de cette fonction est présenté ci dessous et la courbe s'appelle $\mathscr{C}_f$.



Nous allons étudier cette courbe avant de commencer l'exercice.

1. Commençons par quelques questions générales sur la fonction racine :
   — Notons $h(x) = \sqrt{x}$. Si k est un nombre réel quelconque, alors la fonction $g(x) = k \times h(x)$ est-elle toujours croissante ? En déduire si f est croissante ou décroissante. *(1 + 0.5 point)*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

— La fonction f est-elle positive pour $x \geq 0$? *(0.5 point)*

. . . .
. . . .

— Calculer à l'aide de la calculette $f(0)$, $f(2000)$ et $f(3000)$? (vous pouvez donner un arrondi avec 2 chiffres après la virgule) *(0.5 point)*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

— Graphiquement, quel est le minimum de f pour les $x \geqslant 0$? *(0.5 point)*

. . . .
. . . .

2. On cherche à savoir combien l'on dépense en impôt chaque année pour pouvoir mettre cet argent de côté.

— Soit la fonction $\ell(x) = x$. Quelle est cette fonction (racine, inverse, carrée, cube, linéaire, affine...) ? *(0.5 point)*

. . . .

— Tracer la courbe $\mathscr{C}_\ell$ associée à la fonction ℓ sur le graphique précédent et décrire rapidement comment vous avez tracé cette courbe. *(1 point)*

. . . .
. . . .
. . . .

— On cherche l'intersection de $\mathscr{C}_\ell$ avec $\mathscr{C}_f$. Déterminer graphiquement ce**s** point**s**. *(0.5 point)*

. . . .
. . . .
. . . .

— Si nous gagnons 2000 euros par mois, quel pourcentage de notre **salaire annuel** dépense-t'on avec les impôts ? (donnez un arrondi avec votre calcutrice à 3 chiffres après la virgule) *(1.5 points)*

....

....

....

— Même question pour un salaire de 4000 euros par mois. *(1.5 points)*

....

....

....

3. Comme nous venons de le voir, le pourcentage de notre salaire annuel dépensé dans les impôts diminue avec le salaire que l'on gagne. Autrement dit, l'impôt n'est pas proportionnel à l'argent que l'on gagne. Si l'impôt était proportionnel au salaire, quelle serait la nouvelle courbe de cette fonction (droite, parabole, cube, racine, inverse [1]) ? *(0.5 point)*

....

....

4. Vous devenez premier ministre et vous voulez changer la situation en rendant l'impôt proportionnel au revenu. Votre première idée est d'utiliser une fonction affine. Cette nouvelle fonction est $f_2(x) = 500 + 0.97x$.

— Quelle est la courbe associée à une fonction affine ? (droite, parabole, cube, racine, inverse) Est-ce que l'impôt est propotionnel au salaire avec cette fonction ? *(1 point)*

....

....

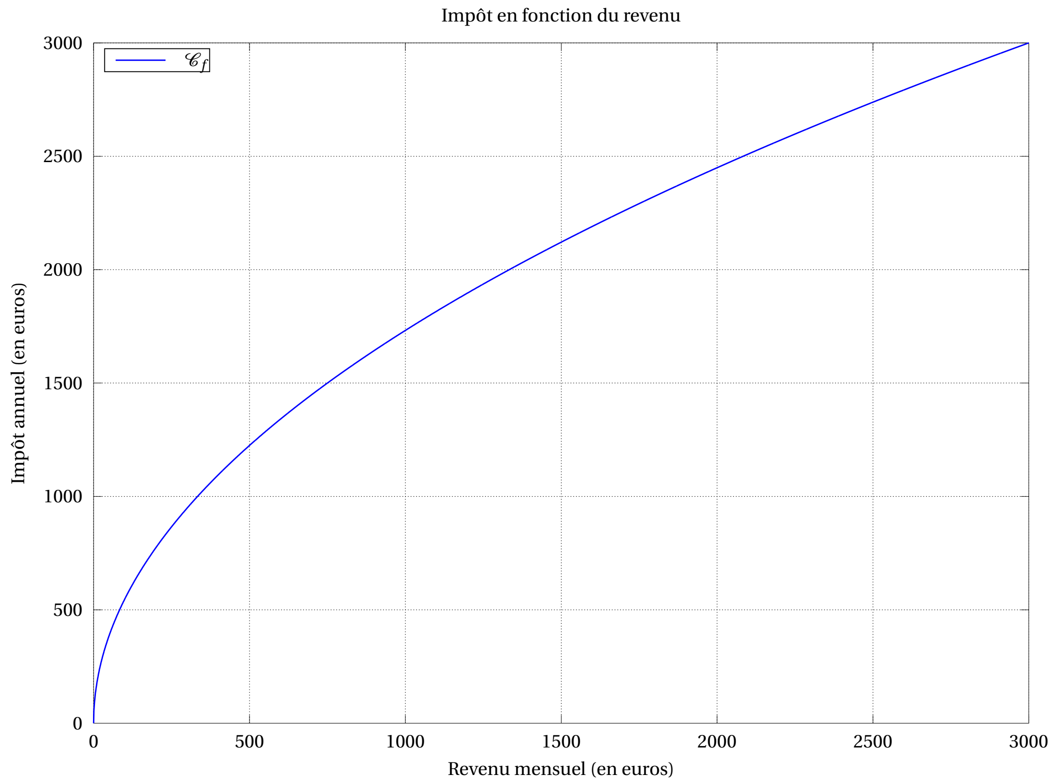
— Tracer cette courbe sur le graphique ci-dessous en expliquant rapidement comment vous avez fait. Vous ne pouvez pas être précis, mais faites de votre mieux. (On pourra utiliser le point $x = 1000$ pour avoir des calculs plus simples). *(1 point)*

....

....

....

1. on dit hyperbole.



— On cherche les points d'intersections entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f2}$. Faites la résolution en utilisant votre calculatrice [2]. *(1 point)*

....

....

....

— Nous pouvons également calculer les points d'intersection. Pour cela, on cherchera les points x_c tels que $f(x_c)^2 = f_2(x_c)^2$. On pourra utiliser le rappel si besoin et on arrondira à 2 chiffres après la virgule. *(2 points)*

$\left(f(x_c)\right)^2 - \left(f_2(x_c)\right)^2 =$

....

....

....

....

$\Delta = b^2 - 4ac =$

....

....

....

2. Attention à avoir la bonne fenêtre. Lire le rappel pour ça.

. . . .

$x_c = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} =$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

$x'_c = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} =$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Conclure

. . . .
. . . .
. . . .

— Comparer les valeurs numérique et graphique. *(0.5 point)*

. . . .
. . . .

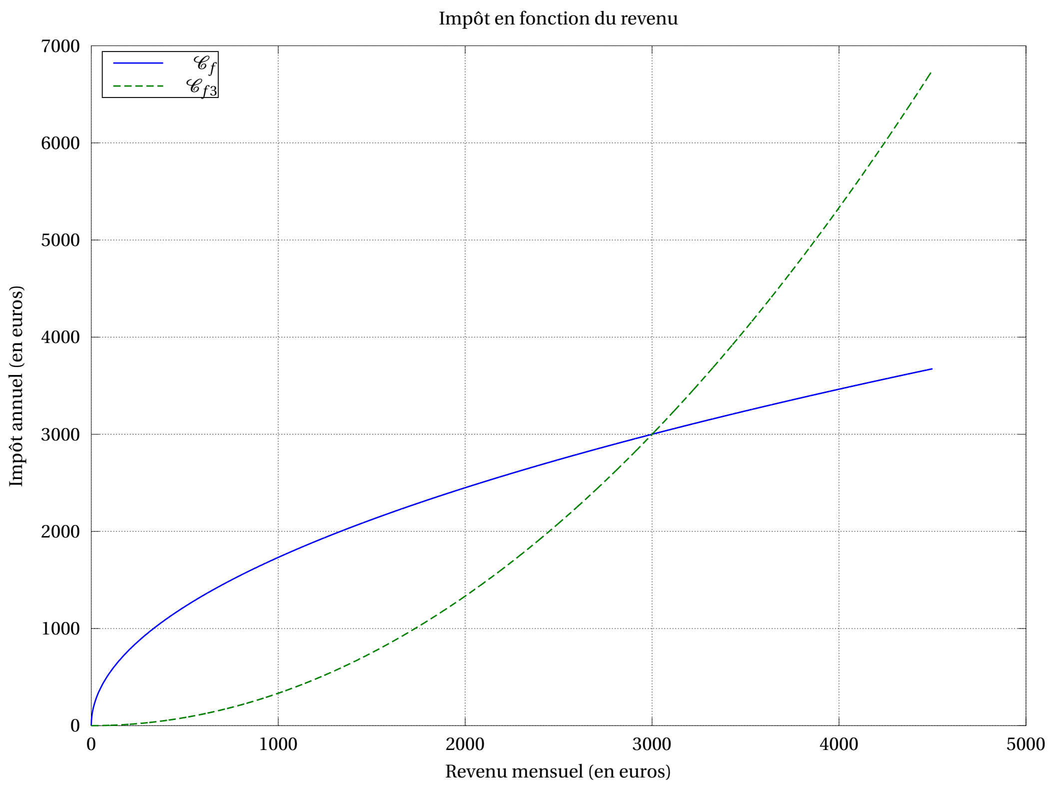
— A l'aide du graphique complété précédent et des questions précédentes, il est possible de résoudre l'équation $f(x) \geq f_2(x)$. La résoudre. Qu'est ce que cela signifie ? *(1 + 1 points)*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

— Calculer $f_2(0)$. Est-ce un résultat cohérent avec la réalité ? *(0.5 point)*

. . . .
. . . .
. . . .

5. Finallement, votre passage en tant que premier ministre fut assez court car votre réforme n'était pas à la hauteur. Le ministre suivant décide de faire une autre réforme. Cette fois, l'impôt sera $f_3(x) = \frac{1}{3000}x^2$. Les graphiques de ces fonctions sont dessinés ci dessous :



— Cette question est à résoudre avec le graphique. Laquelle des deux fonctions (f ou f_3) est la plus intéressante pour des petits revenus mensuels ? *(0.5 point)*

....

....

— Cette question est à résoudre avec le graphique. A partir de quel revenu la réforme fait-elle payer plus d'impôt qu'avant ($f_3(x) \geq f(x)$) ? *(0.5 point)*

....

....

6. Finallement, les personnes riches quittaient la France pour partir dans un autre pays depuis cette réforme. Le gouvernement s'est mis d'accord sur une dernière fonction $f_4(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f_3(x)$.

— La fonction f_4 est elle croissante ou décroissante pour $x \geq 0$? Pour répondre correctement à cette question, vous pouvez suivre la démarche suivante.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)$ est-elle croissante pour $x \geq 0$? *(0.5 point)*

....

....

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}f_3(x)$ est-elle croissante pour $x \geq 0$? *(0.5 point)*

....

....

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)$ est-elle croissante pour $x \geq 0$? *(0.5 point)*

....

....

— Une personne paye 2000 euros d'impôt avec la fonction f_4. Trouver à la calculette son revenu mensuel. *(Bonus + 2 points)*

....

....

....

Présentation	+	Questions	+	Bonus	=	Total
/1		/19		/2		/20

2 Rappels

Pour une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ et on a les cas suivants :

— Si $\Delta > 0$: il y a deux solutions $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,

— Si $\Delta = 0$: il y a une solution double $x = \frac{-b}{2a}$,

— Si $\Delta < 0$: il n'y a pas de solution

Pour la fenêtre de cette exercice, on peut se servir du graphique numéro 2 de cette feuille. Ainsi, $x_{min} = 0$ et $x_{max} = 3000$, $y_{min} = 0$, $y_{max} = 3000$. Les autres valeurs sont sans importance.

Pour la résolution par la calculatrice, n'oubliez pas d'utiliser les flèches pour voir s'il y a plusieurs intersections.