

Corrigé du devoir maison sur les suites.

1 Vrai / Faux (10 points)

1. Pour une suite arithmétique u_n de raison r , on a $u_{n+1} = u_n + r$.
C'est la définition d'une suite arithmétique. C'est donc vrai.
2. Pour une suite géométrique u_n de raison q , on a $u_{n+1} = u_n \times q$.
C'est la définition d'une suite géométrique. C'est donc vrai.
3. Pour une suite arithmétique u_n de raison r et de premier terme u_1 , on a $u_n = u_1 \times r^{n-1}$.
Pour une suite arithmétique, il est possible d'exprimer de rang n en utilisant la formule $u_n = u_1 + (n-1) \times r$ ce qui n'est pas ce qui est écrit dans l'énoncé. C'est donc faux.
4. Pour une suite géométrique u_n de raison q et de premier terme u_1 , on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
Cette fois par contre, c'est bon. Il faut le lire dans le cours. C'est donc vrai.
5. La suite $u_{n+1} = u_n + 2$ est une suite géométrique.
En se référant à la question 2 de ce questionnaire, on voit bien qu'il y a là une addition et non une multiplication. Ce n'est pas une suite géométrique mais arithmétique. C'est faux.

2 Exercice (10 points)

Nous allons essayer de comprendre comment fonctionne la banque CIO (crédit industriel des orgues). Imaginez que vous êtes un industriel et que chaque mois, cette banque vous augmente votre solde de 100 euros. Votre capital au mois 1 est de 500 euros.

On note u_n la somme de votre compte en banque après n mois. Ainsi, vous avez la relation $u_{n+1} = u_n + 100$ et $u_1 = 500$.

1. Votre argent en banque est-il une suite arithmétique ou géométrique ? Quelle est sa raison ? Quel est son premier terme ? (2 points)
Votre argent en banque est la suite u et elle a une addition, elle est donc arithmétique. La définition d'une suite arithmétique c'est $u_{n+1} = u_n + r$ avec r la raison et u_1 son premier terme. Ici, le premier est terme est donc $u_1 = 500$ euros et sa raison est $r = 100$ euros.
2. Quel est votre solde en banque après 10 mois (que vaut u_{10}) ? et après n mois ? (2 points)
**Nous cherchons ici notre argent en banque au mois 10 et $u_n = u_1 + (n-1) \times r$ donc $u_{10} = 500 + (10-1) \times 100 = 500 + 9 \times 100 = 1400$ euros.
On peut aussi faire un tableau des u du mois 1 à 10 en utilisant la formule $u_{n+1} = u_n + r$, on trouverait alors le même résultat mais c'est beaucoup plus long !**

Mois	Solde en banque	Mois	Solde en banque
1	$u_1 = 500$	6	$u_6 = 900 + 100 = 1000$
2	$u_2 = u_1 + 100 = 600$	7	$u_7 = 1000 + 100 = 1100$
3	$u_3 = u_2 + 100 = 700$	8	$u_8 = 1100 + 100 = 1200$
4	$u_4 = u_3 + 100 = 800$	9	$u_9 = 1200 + 100 = 1300$
5	$u_5 = u_4 + 100 = 900$	10	$u_{10} = 1300 + 100 = 1400$

3. Vous vous rendez compte qu'il existe une autre banque : le CIB (crédit industriel de bort). Cette banque propose des intérêts chaque mois. C'est à dire que votre somme en banque est multipliée chaque mois. Son taux d'intérêt est de 5%. Ainsi, chaque mois, votre solde en banque est $v_{n+1} = v_n \times 1.05$ et votre solde initial est $v_1 = 500$. Quelle est la nature de cette suite ? (arithmétique ou géométrique ?) Trouvez la raison de la suite v_n . (2 points)
On constate qu'il y a une multiplication, c'est donc une suite géométrique. En utilisant la définition $v_{n+1} = v_n \times q$ avec v_1 le premier terme et q la raison, on trouve que $q = 1.05$ et $v_1 = 500$.
4. Quel sera votre solde après 10 mois (que vaut v_{10}) ? et après n mois ? (2 points)
Comme tout à l'heure, il est possible de faire un tableau mais c'est assez laborieux. On préférera utiliser la formule $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ donc $v_{10} = 500 \times 1.05^{10} \approx 814,45$ euros pour notre solde en banque après 10 mois.

5. Vous vous demandez laquelle des banques vous apportera le plus d'argent. C'est à dire que vous souhaitez choisir celle qui vous semble vous donner le plus d'argent. Comparez u_{10} et v_{10} ? De même avec u_{50} et v_{50} ? Qu'en déduisez vous sur le long terme, la première banque est-elle la meilleure ou l'inverse? (2 points)

Nous avons déjà calculer u_{10} et v_{10} , et nous avons $u_{10} > v_{10}$. $u_{50} = u_1 + (50 - 1) \times r = 500 + 49 \times 100 = 5400$. Quant à $v_{50} = v_1 \times q^{50-1} = 500 \times 1.05^{49} = 5460,67$. Nous avons alors $u_{50} < v_{50}$.

Conclusion : lorsque l'on passe 10 mois en banque, la première banque est plus intéressante. Par contre, après 50 mois, la seconde banque est meilleure.

6. (Question bonus : +2 points) Saurez vous trouvez le nombre mois n à partir duquel $v_n > u_n$? Vous pouvez résoudre cette question avec la calculatrice.

On peut tracer les deux courbes à la calculatrice : $\mathcal{C}_1 : y = 500 + (x - 1) \times 100$ et $\mathcal{C}_2 : y = 500 \times 1.05^{x-1}$. Après avoir choisi comme fenêtre autour de $x = 50$ et $y = 5400$, on trouve que l'intersection des deux est juste avant $x = 50$. Donc à partir de 50 mois, il vaut mieux choisir la seconde banque car elle nous rapportera plus d'argent que la première banque.