Corrigé du devoir maison sur les forfaits téléphoniques.

1 Vrai / Faux (10 points)

1. *Si f est une fonction croissante entre 0 et 1 et k un nombre réel, alors $k \times f$ est croissante entre 0 et 1.*
   La première affirmation est **fausse**. En effet, dans votre cours, vous avez vu que si f est une fonction croissante alors $k \times f$ est croissante si k est positif, décroissante si k est négatif. Donc ce n'est pas vrai quelque soit le réel k, mais seulement pour un réel k positif.
2. *Si f et g sont deux fonctions croissantes entre 0 et 1, alors $f + g$ est croissante aussi entre 0 et 1.*
   La somme de deux fonctions croissantes est toujours croissante. C'est donc **vrai**.
3. *La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction tout le temps positive ou nulle entre -1 et 1.*
   C'est **vrai**. La fonction carré est toujours positive, c'est l'une de ses principales caractéristiques. Pour s'en convaincre, il faut tracer son graphique et on constate que la courbe est toujours au dessus de l'axe des x, donc la fonction est positive ou nulle quelque soit le x.
4. *La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction tout le temps croissante entre -1 et 1.*
   La fonction fonction carré est croissante quand $x \geq 0$ et décroissante sinon. Il faut faire le graphique et cela se constate facilement. C'est donc **faux**, elle est décroissante sur $[-1;0]$ et croissante sur $[0;1]$.
5. *La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction tout le temps croissante entre -2 et -1.*
   Encore une fois, il faut dessiner le graphique, et on constate que la fonction inverse est décroissante pour $x < 0$ et décroissante pour $x > 0$, elle n'est donc pas croissante entre -2 et -1. C'est **faux**.

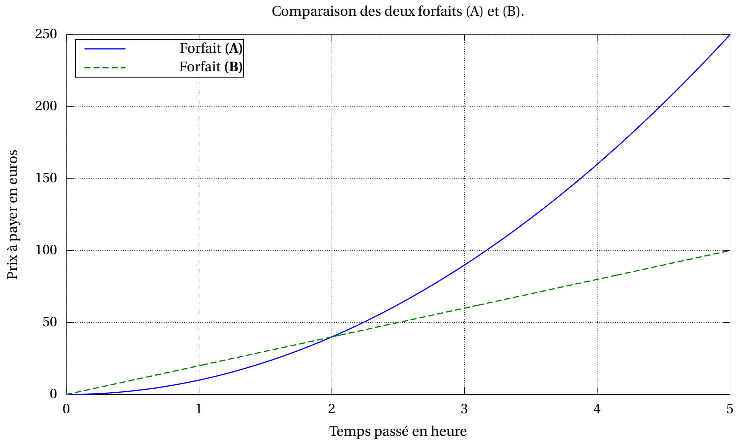
2 Exercice (10 points)

Une compagnie de téléphonie propose deux forfaits différents. Commes vous êtes malins, vous allez réfléchir et trouver le forfait qui vous convient le mieux !

Le premier forfait (A) s'appelle *le carré gagnant* et il est facturé comme 10 fois le carré du nombre d'heures passées au téléphone. En fait, si vous passez x heures au téléphone, vous devrez payer par mois $f(x) = 10x^2$ euros.

Le second forfait (B) s'appelle *l'affiné* et cette fois, celui ci coute 20 fois le nombre d'heures téléphonées. Ainsi, si vous appelez quelqu'un pendant x heures, le prix sera de $g(x) = 20x$.

1. Vous appelez en général pendant 1h au téléphone par mois. Combien cela vous coutera avec le forfait (A) et le forfait (B). *(1 point)*
   On a ici $x = 1h$, donc on dépense avec le forfait (A) : $f(x = 1h) = 10 \times 1^2 = 10$ euros. Avec le forfait (B), on a : $g(x = 1h) = 20 \times 1 = 20$ euros.
2. Finalement, vous êtes plus bavard que prévu et le mois dernier, avec la formule carré gagnant, vous avez passé 3h au téléphone. Quel prix avez vous payé ? Aurait-il mieux valu utiliser l'autre forfait ? *(1.5 points)*
   On a ici $x = 3h$, donc on dépense avec le forfait (A) : $f(x = 3h) = 10 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90$ euros. Avec le forfait (B), on a : $g(x = 1h) = 20 \times 3 = 60$ euros. Ainsi, $g(3) < f(3)$, il vaut mieux utiliser le forfait (B) qui nous coûtera moins cher.
3. Voici le graphique des deux fonctions. Quelle est la bonne courbe pour chaque forfait ? (Ecrire la lettre du forfait dans la légende à la place des ....) *(0.5 point)*



Il s'agit ici de reconnaître la courbe associée à la bonne fonction. La fonction f est une fonction carré, c'est à dire que sa courbe devrait être une hyperbole, c'est donc la courbe en trait plein. La fonction g est une fonction linéaire, sa courbe est une droite passant par 0, ici c'est la courbe en pointillés.

4. Pouvez vous déduire du graphique précédent à partir de combien d'heures est-il plus avantageux de choisir le forfait (B) par rapport au forfait (A) ? *(2 points)*

   Sur un graphique comme celui ci, le prix à payer est sur l'axe des y. Ainsi, plus on sera « haut » dans le graphique, plus nous devrons payer cher. Il est donc plus avantageux d'utiliser le forfait (B) que le forfait (A) dès que la courbe de (B) passe sous la courbe de (A). Ceci se passe après l'intersection. On lit facilement sur le graphique que l'intersection se fait au point $(x = 2; y \simeq 40)$. A partir de 2h, il est plus avantageux d'utiliser le forfait (B) que le forfait (A).

5. Une autre compagnie propose un forfait (C) un peu différent. Chaque mois, il y a un montant fixe de 20 euros puis 10 euros par heure passée au téléphone. C'est-à-dire pour x heures passées au téléphone, le prix à payer est de $h(x) = 20+10x$. Dessinez cette courbe sur le deuxième graphique avec déjà une courbe. Elle représente le forfait (A). *(3 points)*

   Pour répondre à cette question, nous devons déjà analyser la fonction h. C'est une fonction affine, c'est à dire que sa courbe est une droite. Pour pouvoir dessiner une droite, nous avons besoin de deux points. Nous allons donc chercher deux points qui appartiennent à la courbe et ont pour coordonnées $(x, y = h(x))$. Ici, nous allons choisir deux valeurs simples donc $x = 0$ avec $h(x = 0) = h(0) = 20$ et $x = 1$ avec $h(x = 1) = h(1) = 30$. On peut rajouter ces deux points sur le graphique et tracer la droite qui passe par ces deux points, c'est la courbe de h.

6. Pour quel nombre d'heures le forfait (A) et le forfait (C) valent-ils le même prix ? Autrement dit, on cherche x tel que $f(x) = h(x)$. Résoudre graphiquement et numériquement. *(2 points)*

   Cette question est super classique, à savoir par coeur !

   La résolution graphique est très rapide. Il faut trouver l'intersection entre les deux courbes. Ici, il s'agit encore du même point $x = 2h$ et $y = 40$ euros.

   Pour la résolution numérique, il faut faire plus de travail. On cherche x_c tel que $f(x_c) = h(x_c)$, c'est à dire $10x_c^2 = 20+10x_c$. Donc $10x_c^2 - 10x_c - 20 = 0$. On tombe sur la formule du rappel avec les coefficients suivants :

$$\begin{cases} a = 10 \\ b = -10 \\ c = -20 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = \underbrace{(-10)^2}_{100} - 4 \times 10 \times (-20) = 100 - 40 \times (-20) \\ &= 100 + 800 = 900 \end{aligned}$$

   $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions qui sont :

$$\begin{cases} x_c = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10)-\sqrt{900}}{2\times 10} = \frac{10-30}{20} = \frac{-20}{20} = -1 < 0 \\ x'_c = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10)+\sqrt{900}}{2\times 10} = \frac{10+30}{20} = \frac{40}{20} = 2 \end{cases}$$

Dans notre cas ici, x_c est négatif. Cette solution n'est pas possible car ça voudrait dire que l'on a passé $-1h$ au téléphone. Pour $x'_c = 2h$ passées au téléphone, les deux forfaits valent le même prix : $h(x_c = 2) = f(x_c = 2) = 10 \times 2^2 = 40$ **euros.**

7. *(Question bonus : +2 points)* Vous avez dépensé 20 euros. Saurez vous retrouver combien d'heures vous avez passées avec le forfait (A) ? Et avec le forfait (B) ?

   Cette question est assez simple. Si on a dépensé 20 **euros avec le forfait (A), cela veut dire que l'on a passé** x **heures au téléphone avec** $f(x) = 20$ **euros. Donc** $10x^2 = 20$ **soit** $x^2 = \frac{20}{10} = 2$**. Pour résoudre une telle équation, on peut utiliser le rappel, ou bien savoir que** $\sqrt{x^2} = x$ **pour** x **positif. On peut prendre la racine, comme on sait que** x **doit être positif, on trouve** $x = \sqrt{2} = 1.414$ **heures passées au téléphone pour un prix de 20 euros. Or** $0.414h$ **donne** 0.414×60 **minutes donc environ** 25 **minutes soit** $x = 1$**h**25**min.**

   C'est plus facile pour le forfait (B) car on a $g(x) = 20$**, donc** $20x = 20$**. Ainsi,** $x = \frac{20}{20} = 1$**, on a passé** $1h$ **au téléphone pour un prix de 20 euros.**