0.0.1 Rappel sur les vecteurs

Qu'est ce qu'un vecteur ?

Avant de se lancer dans des calculs vectoriels qui peuvent sembler complexes, nous allons voir ce qu'est exactement un vecteur. Loin des définitions mathématiques que l'on peut trouver dans des bouquins assez avancés, on va parler vecteur coté pratique de la chose ;) .

Commençons par le commencement, un vecteur, c'est une flèche ! Mais bon, quand vous dessinez une flèche et que vous souhaitez que votre voisin dessine la même, il n'y a pas 30.000 solutions, vous allez donner des caractéristiques essentielles comme sa **longueur**, son **point de départ**, sa **direction** et son **sens**. Attardons nous sur ce vocabulaire un peu complexe. Sa longueur (souvent appelé norme, ne me demandez pas pourquoi...) est simplement la distance entre le point de départ et celui d'arrivé. Sa direction, quand à elle, porte plus à confusion car on ne sait pas ce que c'est ! Et bien, imaginez que vous ayez déjà votre point de départ et celui d'arrivé, la direction est **la droite qui passe par ces deux points**. C'est simple maintenant ! Il ne faut surtout pas confondre avec le sens qui est la façon dont nous suivons la droite, vers le haut, vers le bas... Finalement, c'est notre flèche.

Petit exemple : j'ai mon point de départ, je trace ma direction et là, je te dis que le point d'arrivé est sur cette droite, plus en haut de 3cm. Normalement on arrive à trouver le point d'arrivé !

Maintenant que l'on sait ce que c'est, parlons un peu de leur représentation mathématique.

Un vecteur se représente avec une flèche au dessus de son nom : $\vec{u}$ ou $\vec{F}$ ...

Jouons à la carte au trésor !

Maintenant, nous sommes dans un plan. On connaît notre point de départ $A = (2; 5) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et celui d'arrivé $B = (3; 15) = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

> J'ai noté ici les deux manières communes de représenter les coordonnées d'un point : $A = (x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec x son abscisse (sur l'axe horizontal) et y son ordonnée (sur l'axe vertical).

Il parait évident qu'il va exister des coordonnées pour un vecteur allant de A vers B. Il s'agit d'une soustraction des coordonnées de B et de A. On va jusqu'à B depuis A donc

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 15-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Comme promis, nous allons jouer à la carte au trésor.

Voilà notre jolie carte, trouvons maintenant quelques vecteurs, histoire de s'exercer un peu.

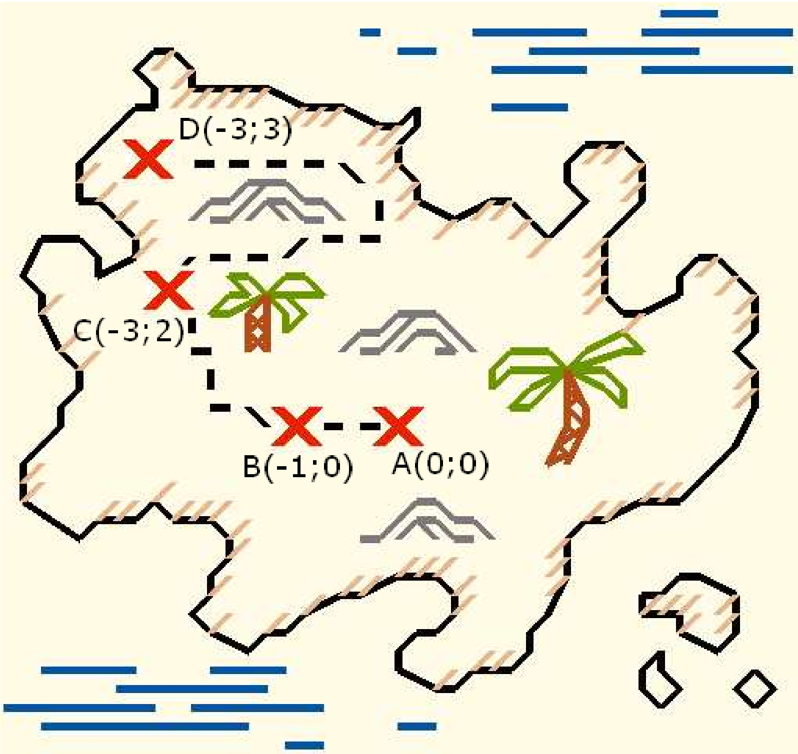

FIGURE 1 – La carte aux trésors.

Alors, on va suivre le chemin, allez de A à B, B à C et C à D. On va donc calculer chacun des vecteurs, ne regardez pas tout de suite la correction !

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} (-1) - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela semble normal, cela veut dire que l'on se déplace de -1 cran à droite donc un à gauche (on peut compter en kilomètres si cela permet de meilleures représentations). On a décidé que dans un repère traditionnel, quand on se déplace vers la droite, c'est un signe + et vers la gauche un signe -. De même, si on se déplace vers le haut ce sera un + et un - si on va vers le bas.

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} (-3) - (-1) \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On part de B maintenant et on se déplace bien de 2 vers la gauche et 2 en haut.

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} (-3) - (-3) \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, si on voulait aller de A à C directement, on aurait :

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} (-3)-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On peut apprendre à faire une somme de vecteur maintenant.

En effet, si on suit le chemin de A à B puis C, on devrait arriver en C, et en allant directement de A à C, on arrive aussi en C, ça devrait donc être pareil. On a alors : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$. Et si on écrit ça avec des coordonnées :

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On trouve bien pareil que tout à l'heure, l'addition de vecteur a donc bien un sens. On dit que c'est la relation de Chasles. On insère une lettre entre le vecteur d'origine pour avoir une somme ainsi :

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$$

C'est une formule très intéressante, je vous invite à bien la retenir, elle sera utile ;) !

Multiplions un vecteur

Dans cette sous-partie, on utilise ce nouveau schéma de la carte au trésor ci dessous.

La multiplication d'un vecteur est une opération plus simple. On prend une valeur (2 par exemple), et on cherche $2\vec{AB}$.

Pour cela, on écrit :

$$2\vec{AB} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, plus généralement, on aura avec

$$\lambda\vec{AB} = \begin{pmatrix} -\lambda\times 1 \\ \lambda\times 0 \end{pmatrix}$$

avec λ le nombre que l'on veut.

On peut se demander ce que cela signifie, et bien on va faire une relation de Chasles ! On fait deux fois le parcours, on va de A jusqu'à B puis on refait le même trajet depuis B. Finalement, on arrive en E d'après notre schéma ! Tout cela a bien un sens !

On voit ici clairement qu'il n'est pas toujours simple de sommer des vecteurs. On décompose

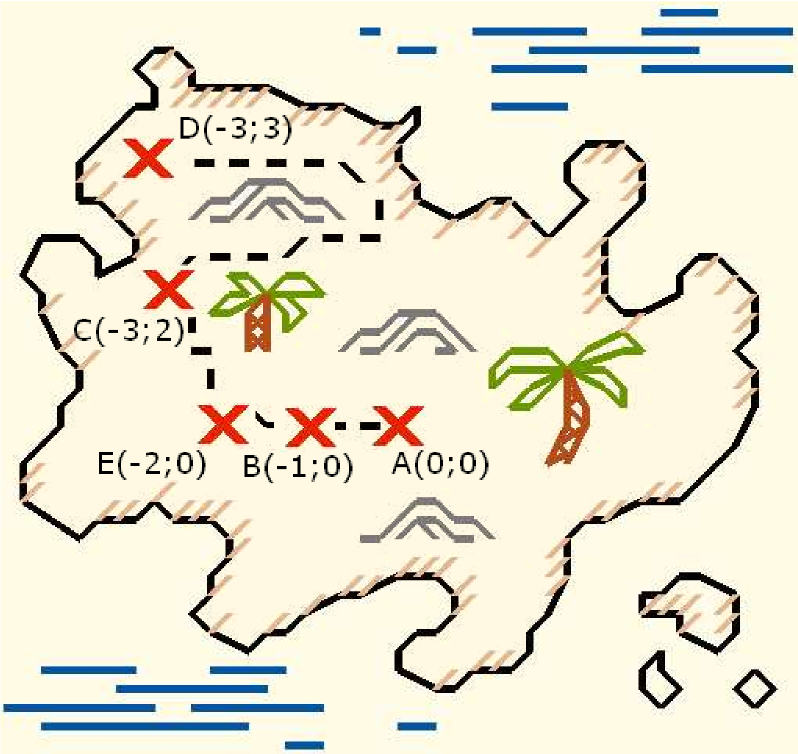

Figure 2 – Nouvelle carte aux trésors.

alors la somme de vecteurs comme elle nous arrange. Prenons un exemple :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{AB} + \vec{BC} \\ &= \underbrace{\vec{AE}}_{\text{La composante de } \vec{u} \text{ selon } \vec{AB}} + \underbrace{\vec{BC}}_{\text{La composante de } \vec{u} \text{ selon } \vec{BC}}\end{aligned}$$

On utilise souvent cette astuce, vous la retrouverez au chapitre suivant, mais ne vous inquiétez pas, vous apprendrez à l'utiliser !

Quel est la longueur de notre vecteur ?

Maintenant, on aimerait savoir quelle distance on a parcouru pour arriver jusqu'à notre trésor !

Et là, on va faire preuve de bon sens, il semble évident que la distance que nous avons parcourue en passant par B et C n'est pas la même que si on y va directement ! Ainsi, on ne peut pas appliquer la relation de Chasles pour calculer une distance, il nous faut décomposer notre trajet en plusieurs étapes.

La longueur d'un vecteur est souvent appelée norme, je la noterai $||\cdot||$. Ainsi la longueur de $\vec{AB}$ sera $||\vec{AB}||$.

On voit souvent l'abus : $||\vec{AB}|| = AB$, que je risque d'utiliser également durant mes périodes moins rigoureuses ;) !

Si nous appelons ℓ la distance parcourue en passant par A, B, C et D, on a :

$$\ell = ||\vec{AB}|| + ||\vec{BC}|| + ||\vec{CD}|| \neq ||\vec{AD}||$$

Cette inégalité se voit bien sur le dessin. Si on passe par A, B, C et D, notre chemin sera plus long que si on va directement de A à D.

Bon, c'est bien beau ça, mais comment on la calcule alors ?

En voilà une bonne question, je ne me justifierai pas, mais voilà le résultat.

Si on utilise une notation un peu mathématique, avec $\vec{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a :

$$||\vec{AB}|| = AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ça ne parait pas très simple...

Pour ceux qui ne connaissent pas, $\sqrt{\cdot}$ c'est une fonction que l'on appelle racine carrée, et on a avec x un nombre : $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$.
Cette fonction se trouve sur votre calculette. Pour finir d'expliquer la formule, on a également : $a^2 = a \times a$.

Voilà, maintenant, si je vous demande la distance AE, vous me dites :

$$\vec{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$AE = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

Mais on sait que $\vec{AE} = 2\vec{AB}$
donc :

$$AE = ||2\vec{AB}|| = \sqrt{(2 \times (-1))^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 0} = 2$$

On trouve bien pareil ! Ouf !

Maintenant, je vous laisse chercher ℓ et AD pour constater que ce n'est pas les mêmes, voilà la réponse :

$$\ell = 3 + \sqrt{5} \simeq 5,2 \neq AD = \sqrt{18} \simeq 4,2$$

Le trajet direct est bien plus court que de faire le tour, on retombe sur nos pattes, et on en a fini avec les vecteurs !