Graphes : Travaux Dirigés
3 MIC

MJ. HUGUET
homepages.laas.fr/huguet

Consignes générales

Les TD Graphes durent 7 séances. Lors de ces séances vous travaillerez en groupe de 4 à 5 personnes (le groupe doit rester identique sur l'ensemble des séances). Les exercices notés (*) seront traités en séance, les exercices complentaires peuvent être traités en travail personnel.
Il est vivement conseillé de travailler entre les séances de cours et de TD (relire les notions abordées, reprendre les exercices ayant posé des difficultés).

Remerciements

Ce support a bénéficié des contributions de collègues de l'INSA ou du LAAS (Colette Mercé, Patrick Esquirol, Pierre Lopez, Nicolas Jozefowiez, Mikael Capelle, Pierre-François Gimenez [1]). Il s'est également inspiré d'exercices posés par des collègues d'autres établissements d'enseignement supérieur.

Ce document a été rédigé avec LaTeX. Les graphes sont générés avec TikZ.

1. si oubli, ils sont involontaires !

1 Définitions et Modélisations

1.1 Championnat (*)

Cinq équipes, notées A, B, C, D, E, font partie d'un même championnat. Chaque équipe doit rencontrer deux fois les 4 autres équipes (à domicile et à l'extérieur). Certaines rencontres ont déjà eu lieu et sont résumées dans le tableau 1.

Equipe	est allé rencontrer
A	C, D, E
B	A, D
C	A, B, E
D	A, B, C
E	B, C, D

TABLE 1 – Rencontres passées

Question 1. Représentez le graphe des rencontres.

Question 2. Donnez la matrice d'adjacence du graphe.

Question 3. Proposez une interprétation de :

a la somme de chaque ligne de la matrice

b la somme de chaque colonne de la matrice

c la somme de tous les termes de la matrice

Question 4. Comment déterminer (via la matrice d'adjacence) le nombre de rencontres jouées par chaque équipe. Quelle est la complexité ?

Question 5. Avec une liste d'adjacence, quelle est la complexité pour calculer :

a pour une équipe X donnée : le nombre de rencontres à l'extérieur et le nombre de rencontres à domicile ?

b pour toutes les équipes du championnat : le nombre de rencontres à l'extérieur et à domicile ?

c le nombre total de rencontres ?

Question 6. Quelle est la représentation ayant la meilleure complexité pour chacun de ces calculs ?

1.2 Lemme des poignées de mains

Le lemme des poignées de main dit que dans tout graphe non orienté (ayant un nombre fini de sommets) le nombre de sommets de degré impair est soit nul soit pair. De manière imagée, dans une réunion de plusieurs personnes dont certaines se serrent la main, un nombre pair de personnes devra serrer un nombre impair de fois la main d'autres personnes.
Demontrez ce lemme.

1.3 Graphe inversé (*)

On considère le graphe orienté G_1 de la figure 1

Question 1. Construisez le schéma du graphe inversé G_1^{-1} (il s'agit juste de renverser le sens des arcs). Le graphe G_1^{-1} fournit-il plus ou moins d'information que le graphe G_1 ?

Question 2.

a Soit $M(G_1)$ la matrice d'adjacence du graphe G_1, par quelle opération matricielle peut-on obtenir la matrice $M(G_1^{-1})$? Quelle est la complexité de cette méthode ?

b Soit $Tab(G_1)$ la liste d'adjacence du graphe G_1, proposez une méthode (ie. un algorithme) pour obtenir $Tab(G_1^{-1})$ et donnez sa complexité.

Question 3. Pour un graphe orienté donné, peut-il être intéressant de mémoriser la liste des successeurs et la liste des prédécesseurs de chacun des sommets ? Justifiez vos réponses.

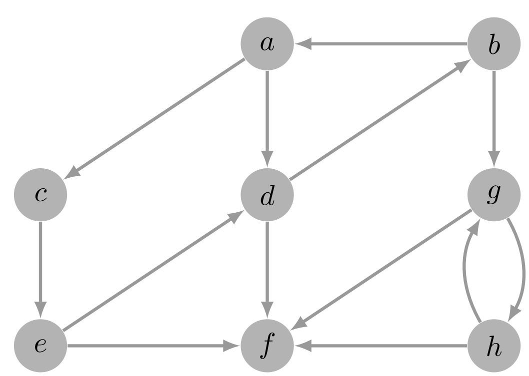


FIGURE 1 – Graphe G_1

1.4 Recupérer du liquide (*)

On doit récupérer 4 litres d'un liquide contenu dans un tonneau (de grande contenance). Nous disposons pour cela de deux récipients contenant respectivement 5 litres et 3 litres. Ces deux récipients ne sont pas gradués, nous ne connaissons que leur contenance totale.

a Modélisez ce problème par un graphe : définissez les sommets et les arcs

b Quelles sont les caractéristiques de ce graphe ?

c Proposez une solution sur ce graphe permettant d'obtenir la quantité attendue

2 Parcours de Graphes

Travail personnel préparatoire

2.1 Applications des algo (*)

On considère le graphe non orienté G_2 de la figure 2

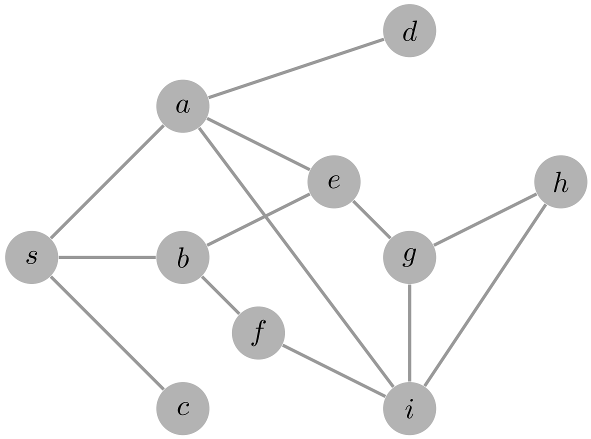


FIGURE 2 – Graphe G_2

Question 1. Parcours en profondeur. Appliquez l'algorithme de parcours en profondeur sur le graphe G_2 à partir du sommet s. Lorsque plusieurs sommets peuvent être sélectionnés, choisissez l'ordre alphabétique. Représentez l'arborescence obtenue et la numérotation des sommets (marqués comme visités).

Question 2. Parcours en largeur. Appliquez l'algorithme de parcours en largeur sur le graphe G_2 à partir du sommet s. Lorsque plusieurs sommets peuvent être sélectionnés, choisissez l'ordre alphabétique. Représentez l'arborescence obtenue et la numérotation des sommets (marqués comme visités).

Question 3 (optionnelle). Parcours dans des graphes orientés. Reprenez le graphe G_1 de la section 1 pour appliquer un parcours en profondeur et un parcours en largeur à partir du sommet a.

2.2 Cycle - Graphe non orienté

Soit un graphe non orienté G, il existe une propriété aussurant l'existence d'un cycle dans un tel graphe. Cette propriété est : si tout sommet de G est de dégré supérieur ou égal à 2 alors G possède au moins un cycle.
Nous n'allons pas chercher à montrer cette propriété (voir les livres ou sites internet sur le sujet).
Remarque : une conséquence de cette propriété est qu'un graphe non orienté sans cycle possède au moins un sommet de degré 0 ou 1.

Question 1. Graphe acyclique et nombre d'arêtes. Montrez, par induction sur le nombre de sommets, qu'un graphe acyclique d'ordre n (ie. ayant n sommets) possède au plus $n-1$ arêtes.

Question 2. Recherche d'un cycle. La propriété précédente ne permet pas d'obtenir un cycle dans le graphe non orienté. Vous allez déterminer une méthode pour cela.

a Proposez une méthode, basée sur un algorithme de parcours en profondeur, pour obtenir un cycle.

b Appliquez votre méthode sur le graphe de la figure 2, puis sur le même graphe dans lequel vous supprimez les arêtes (a, e) et (a, i).

2.3 Tri topologique (*)

L'ensemble des composants (ie. chapitres) d'une formation peut être représenté par le graphe orienté de la figure 3. Dans ce graphe, les sommets représentent les enseignement et il y a un arc du sommet x vers le sommet y si le chapitre x est un pré-requis du chapitre y.

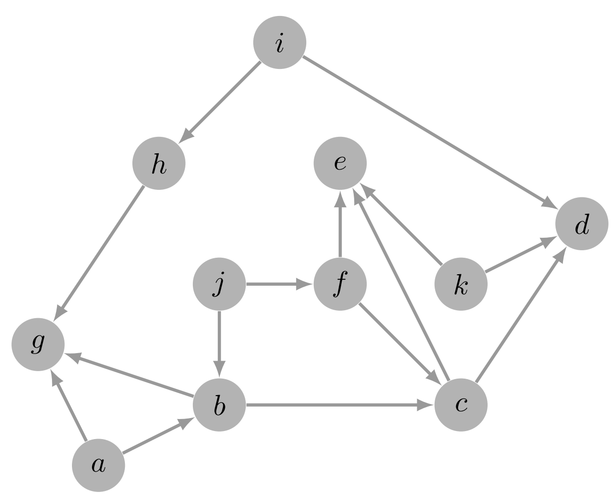


FIGURE 3 – Maquette d'une formation

Pour une meilleure lisibilité on souhaite ré-organiser la représentation du graphe de telle sorte que tous les arcs soient orientés de la gauche vers la droite.

Question 1. Schéma.

a Proposez un schéma avec cette ré-organisation

b Est-ce toujours possible ?

Définition. Une telle représentation peut s'appuyer sur une relation d'ordre entre les sommets, appelée ordre topologique. Avec cette relation d'ordre, un numéro est associé à chaque sommet, tel que le numéro du sommet x est inférieur au numéro du sommet y s'il y a un arc de x vers y.

Question 2.

a Proposez une adaptation d'un parcours en profondeur pour obtenir un ordre topologique des sommets

b Appliquez votre méthode à l'exemple et donnez l'ordre topologique obtenu (représentez la solution dans le tableau ci-dessous).

c Pour un graphe donné, l'ordre topologique des sommets est-il unique ? Justifiez.

d Peut-on obtenir un ordre topologique des sommets lorsque le graphe comporte un cycle ?

e Pourriez-vous adapter un parcours en largeur ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

2.4 Décomposition en niveaux (*)

La représentation basée sur l'ordre topologique ne permet pas de connaitre les composants pouvant être enseignés en « parallèle ». Pour cela, nous allons reprendre le graphe de la figure 3 et considérer une décomposition en niveaux du graphe. Le principe de la méthode de décomposition est le suivant :

1. le premier niveau est composé de tous les sommets sans prédécesseurs
2. le second niveau est composé de tous les sommets dont les précédesseurs sont déjà classés dans le premier niveau
3. et ainsi de suite : classez dans chaque niveau les sommets dont les prédécesseurs sont dans les niveaux antérieurs.

Question 1. Appliquez cette méthode au graphe de la figure 3 et donnez le graphe obtenu

Question 2. Que se passe-t-il si le graphe comporte un cycle ?

Question 3. Comment feriez-vous (au niveau implémentation) pour déterminer si tous les prédécesseurs d'un sommet sont classés dans un niveau ?

3 Exercices complémentaires

Les exercices proposés sont liés aux notions abordées dans les sections 1 et 2.

3.1 Parcourir un labyrinthe

Nous disposons d'une carte, donnée en figure 4 représentant un labyrinthe dans lequel il y a plusieurs entrées et un trésor.

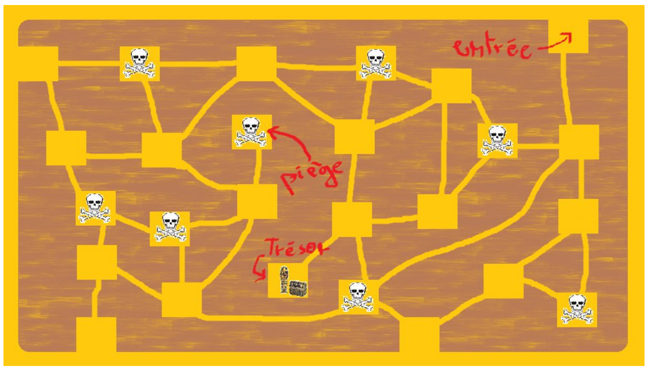


FIGURE 4 – Carte du labyrinthe

Question 1. Modélisation.

a Modélisez ce labyrinthe par un graphe

b Donnez les caractéristiques de ce graphe

Question 2. Chasse au trésor.

a Proposez une adaptation d'un parcours en profondeur permettant de découvrir le trésor

b Votre adaptation donne-t-elle le trajet à suivre ? Si ce n'est pas le cas, ajoutez une nouvelle adpatation pour mémoriser le trajet.

3.2 Faire le buzz

Votre réseau social est représenté par le graphe de la figure 5. Vous venez de réaliser une contribution géniale (article, vidéo, démonstration de P $\neq$ NP [2]) que vous diffusez immédiatement à vos contacts. Ceux-ci la re-diffusent dans l'heure qui suit à leurs propres contacts. Votre contribution est tellement exceptionnelle qu'elle se propage de manière virale aux contacts de vos contacts. On supposera que la diffusion entre deux personnes en contact se fait dans l'heure (le temps de prendre connaissance de ce que vous avez fait ....).

2. rayez la mention inutile

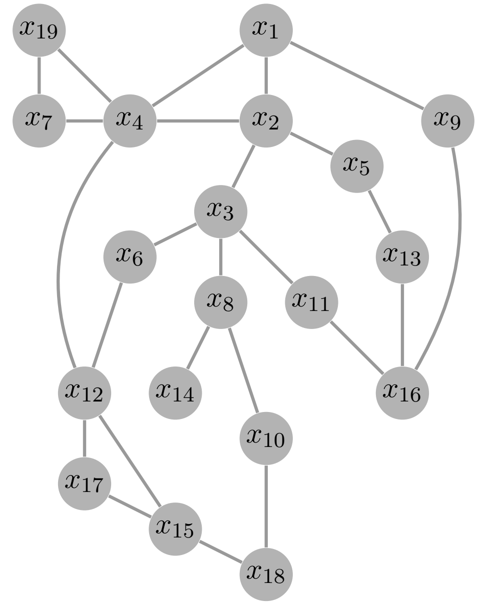


FIGURE 5 – Réseau social (extrait)

A partir de votre réseau social (vous êtes le sommet x_1), vous souhaitez connaitre la liste des personne ayant vu votre travail en fonction de l'heure.

Détermination de la diffusion de cette contribution.

a Proposez une adaptation d'un parcours en largeur pour répondre à cette question.

b Appliquez votre méthode pour connaitre les contacts ayant eu connaissance de votre contribution géniale en 2 heures, puis en 3 heures.

c Pourriez-vous proposez une adaptation d'un parcours en profondeur ? Justifiez.

3.3 Composantes fortement connexes

Question 1. Application de l'algorithme Soit G_3 le graphe orienté de la figure 6. Appliquez l'algorithme de calcul des composantes fortement connexes et donnez l'ensemble des composantes obtenues.

Question 2. Application de la définition. Soit G un graphe orienté a n sommets. Combien de composantes fortement connexes comporte un tel graphe lorsque :

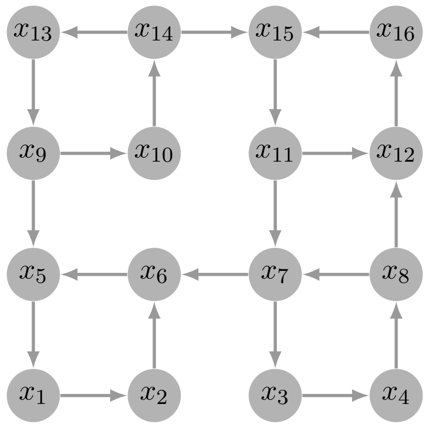


FIGURE 6 – Graphe G_3

a le graphe G est sans circuit.

b le graphe G comporte un circuit élémentaire de longueur n.

Question 3. Graphe réduit Soit un graphe orienté G ayant m composantes fortement connexes, notées $C_1, \ldots, C_m$. On appelle graphe réduit de G, le graphe G' comportant m sommets $x'_1, \ldots, x'_m$ tels que chaque sommet de G' corresponde à une composante fortement connexe de G. Dans le graphe réduit, il existe un arc de x'_i vers x'_j s'il existe un sommet x appartenant à C_i et un sommet Y appartenant à C_j et un arc de x vers y dans G.

a Donnez le graphe réduit de l'exemple de la figure 6.

b Montrez pour tout graphe orienté G, son graphe réduit G' est sans circuit.

4 Plus court chemin

4.1 Application des algo (*)

Algorithme de Dijkstra. Soit le graphe non orienté valué G_4 de la figure 7.

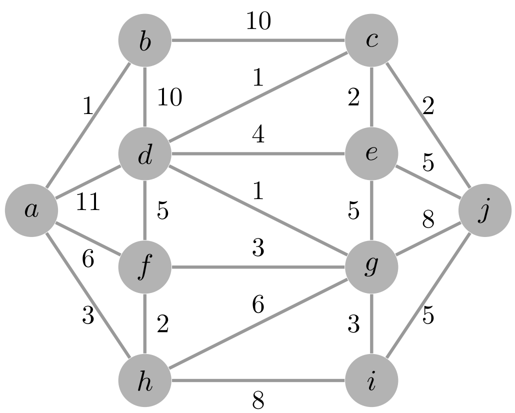


FIGURE 7 – Graphe non orienté valué G_4

Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour calculer le plus court chemin entre le sommet a et le sommet j. Pour cela, utilisez le tableau de calcul ci-dessous. La première ligne de ce tableau correspond à l'étape d'initialisation de l'algorithme. Chaque itération de l'algorithme est représentée par une nouvelle ligne dans le tableau de calcul : sélection du sommet devant être marqué puis actualisation des sommets adjacents. S'il y a plusieurs choix possibles pour sélectionner le sommet à marquer, utilisez l'ordre alphabétique.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
init										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

a Donnez le chemin obtenu de a vers j et son coût.

b Si on cherche le plus court chemin de f vers c, faut-il re-lancer l'algorithme ? Justifiez la réponse.

c Dans le cas général que faut-il faire ? Justifiez la réponse.

d Pouvez-vous utiliser d'autres algorithmes à la place de l'algorithme de Dijkstra ? Pourquoi utiliser celui de Dijkstra plutôt qu'un autre ?

Algorithme de Bellman-Ford. Soit le graphe orienté valué G_5 de la figure 8.

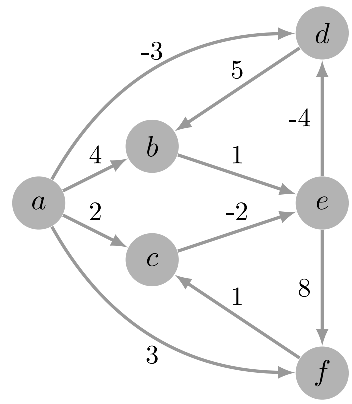


FIGURE 8 – Graphe non orienté valué G_5

Utilisez l'algorithme de Bellman-Ford pour calculer le plus court chemin depuis le sommet a vers le sommet b. Pour cela, utilisez le tableau de calcul ci-dessous. La première ligne de ce tableau correspond à l'étape d'initialisation de l'algorithme. Chaque itération de l'algorithme correspond à une ligne dans le tableau de calcul : actualisation de tous les sommets du graphe pris dans l'ordre alphabétique.

	a	b	c	d	e	f
init						
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Donnez le chemin obtenu et son coût.

4.2 Centre d'un graphe

Pour lutter contre les incendies, la ville de Maximim-les-Pins cherche à déterminer où installer un poste de

secours, de telle façon que chaque secteur à surveiller ne soit pas trop loin du poste. Pour l'aider dans sa tâche, on va s'appuyer sur des méthodes de graphes et utiliser la notion de centre d'un graphe, définie ci-dessous.
Soit un graphe $G = (X, U)$ où X représente l'ensemble des sommets et U l'ensemble des arcs (ou arêtes). Pour 2 sommets x et y, on appelle $sp(x, y)$ la longueur du plus court chemin/chaîne allant de x à y (cette longueur vaut ∞ si de tels chemins/chaînes n'existent pas).
L'écartement d'un sommet x, noté $E(x)$, représente la distance maximum à parcourir pour aller d'un sommet x vers tous les autres sommets du graphe. Il est défini par : $E(x) = \max_{y \in X, y \neq x}(sp(x, y))$.
Un véhicule de secours situé en un point x du graphe pourra atteindre chaque point y ($y \neq x$) en au plus $E(x)$ étapes.
Le centre d'un graphe, noté c, est un sommet d'écartement minimum : $c = argmin_{x \in X}(E(x))$. Pour être le moins éloigné de l'ensemble des points qu'il a sous sa surveillance, un poste de secours devra être installé au centre du graphe.

Question 1. Choix d'une méthode.

a Quelles sont les méthodes de résolution possibles.

b Quelle méthode choisissez-vous ? Justifiez et faites valider votre choix.

Question 2. Application.

a Appliquez la méthode au graphe de la figure 9 (partagez-vous le travail !). Utilisez le tableau fourni pour noter vos résultats.

- Donnez les valeurs $sp(x, y)$ pour toutes les paires de sommets du graphe.
- Donnez les valeurs $E(x)$ pour tous les sommets du graphe.
- Quel est le centre du graphe ?

Les définitions d'écartement d'un sommet et de centre d'un graphe données précédemment restent valables dans le cas de graphes orientés. Sans faire de calcul, déterminez le centre du graphe de la figure 10. Justifiez votre réponse.

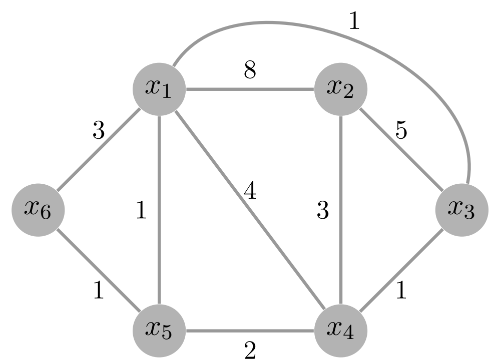


FIGURE 9 – Réseau à surveiller

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$E(x)$
x_1							
x_2							
x_3							
x_4							
x_5							
x_6							

TABLE 2 – Résultats : $sp(x, y)$ et $E(x)$

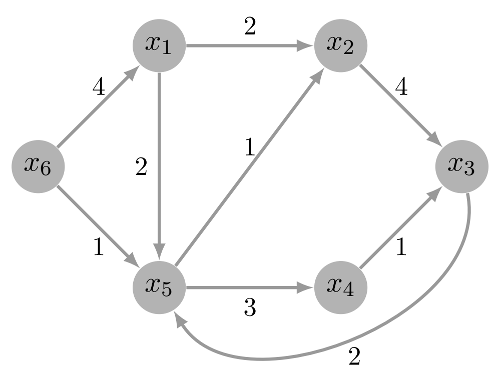


FIGURE 10 – Nouveau réseau à surveiller

4.3 Isochrones (*)

Lors de l'implantation de nouveaux services (transport, aménagement, magasin), on peut être amené à réaliser des études d'accessibilité. Ces études visent à établir les parties d'un graphe accessibles à partir d'un point donné tout en se fixant une limite dans le parcours de ce graphe. Par exemple : évaluer dans un graphe routier les zones accessibles (ie. les nœuds et les arcs) en 10 minutes, 20 minutes à partir d'un nœud donné. La zone accessible est aussi appelé isochrone.

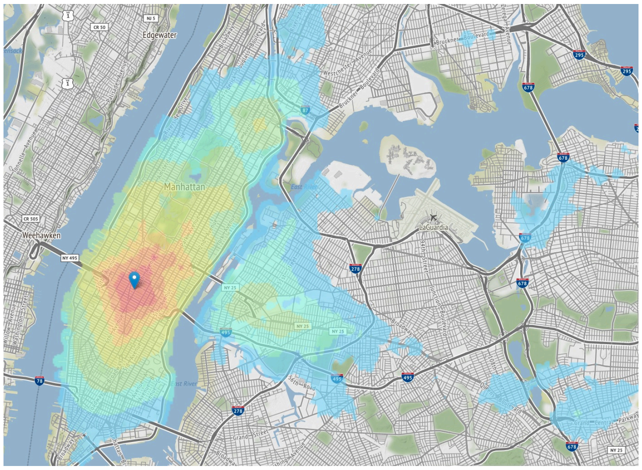


FIGURE 11 – Exemple d'isochrones à partir de Time Square en transport en commun (par pas de 10 minutes)

Pour calculer un isochrone, il est possible d'adapter l'algorithme de Dijkstra en remplaçant la condition « arrêt quand tous les sommets sont marqués »par « arrêt quand le cout du sommet marqué est supérieur à la valeur de l'isochrone ».

- a Testez cette méthode sur le graphe de la figure 12 : à partir du sommet x_4, recherchez les sommets appartenant à l'isochrone de valeur 8.
- b Donnez la liste des sommets composant l'isochrone avec le cout de chacun d'eux.
- c Peut-on remplacer la condition de l'algorithme de Dijkstra par « arrêt quand le cout du sommet marqué est EGAL à la valeur de l'isochrone » ? Justifiez votre réponse (en raisonnant dans un cas général et pas uniquement sur l'exemple).

4.4 Gestion de projet - PERT (*)

Pour réaliser un projet informatique, le travail à effectuer a été découpé en 10 activités notées A, B, C, D, E, F, G, H, I et J. Pour chacune de ces activités, les durées (en jours) et les contraintes de séquencement sont fournies dans le tableau 3.
On représente le problème par le graphe de la figure 13. Les sommets représentent le **début des activités**, et un arc entre les sommets i et j, pondéré

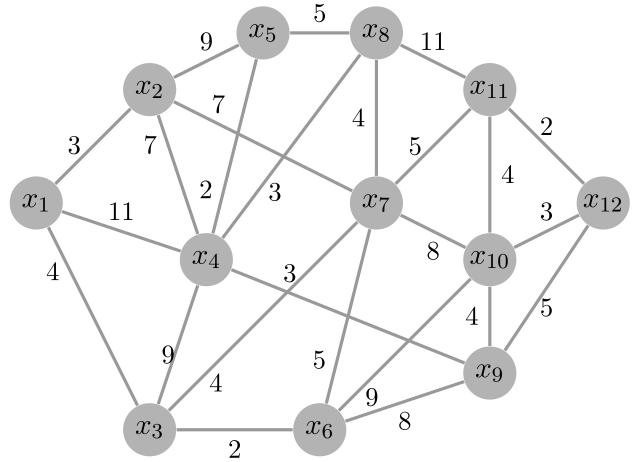


FIGURE 12 – Application isochrones

Activités	Durées	Contraintes
A	4	après fin de H ; après fin de D
B	6	8j après fin de J
C	2	14j après fin de J
D	12	4j après fin de G ; après fin de F
E	4	après fin de C
F	2	après fin de G ; 2j après fin de C
G	4	4j après fin de J
H	20	après fin de E ; 8j après fin de F
I	10	4j après fin de J ; après fin de H ; 10j après fin de B
J	2	

TABLE 3 – Données du projet

par l, représente la contrainte : le début de l'activité j peut commencer au moins l jours après le début de i (cela prend en compte la durée de l'activité i).

Remarque. On ne peut pas réaliser le projet s'il y a des dépendances mutuelles entre les activités. On ne trouve pas de telles dépendances dans l'exercice. Le graphe est donc sans circuit.
Pour les questions ci-dessous, vous pouvez utiliser les graphes de la page suivante.

Question 1. Décomposition en niveaux.

- a Calculez et représentez les niveaux sur ce graphe.

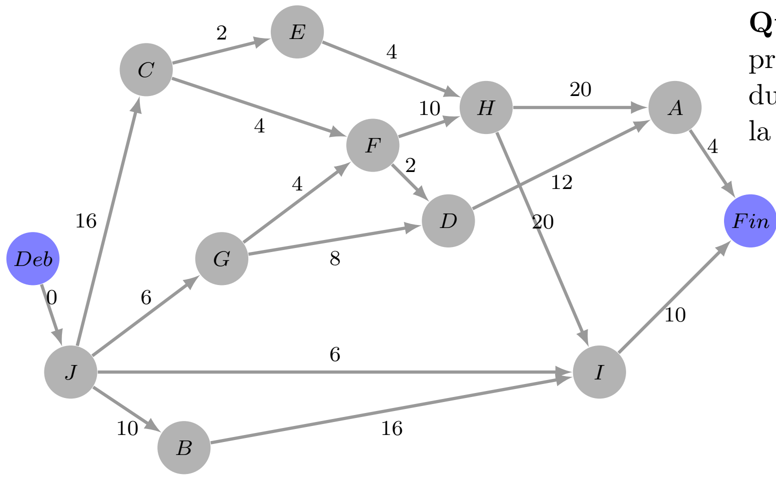


Figure 13 – Graphe associé au projet

Question 2. Durée minimale du projet et dates de début au plus tôt des activités. Utilisez les schémas fournis page suivante.

a Calculez la durée minimale de réalisation du projet ainsi que les dates de début au plus tôt des différentes activités. Quelle méthode utilisez-vous ?

b Donnez le chemin qui conduit à cette durée minimale.

Question 3. Dates de début au plus tard des activités. On se fixe comme durée du projet, la valeur minimale trouvée à la question précédente.

a Calculez les dates de début au plus tard des différentes activités. Quelle méthode utilisez-vous ?

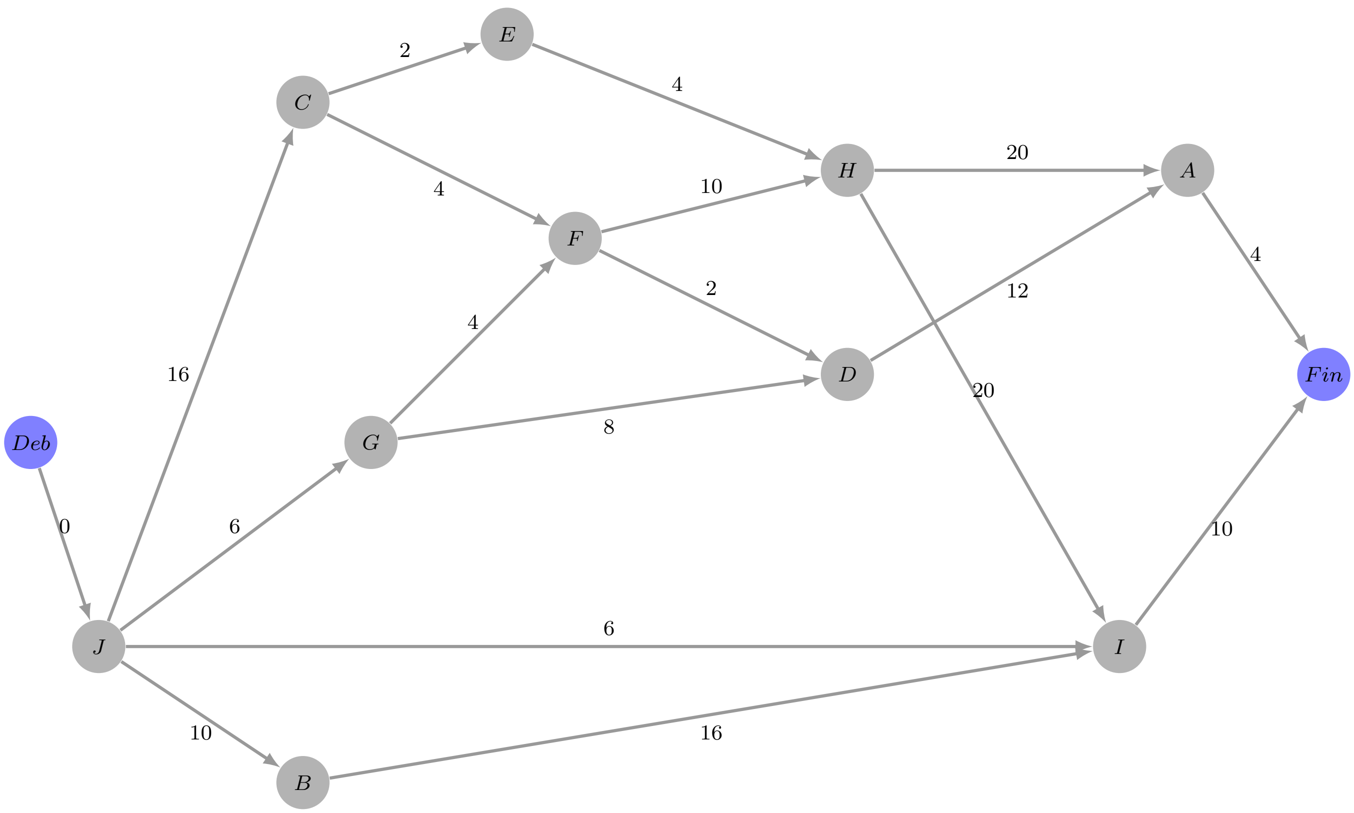
b Donnez les marges (Mg) des différentes activités.

c Donnez le chemin critique.

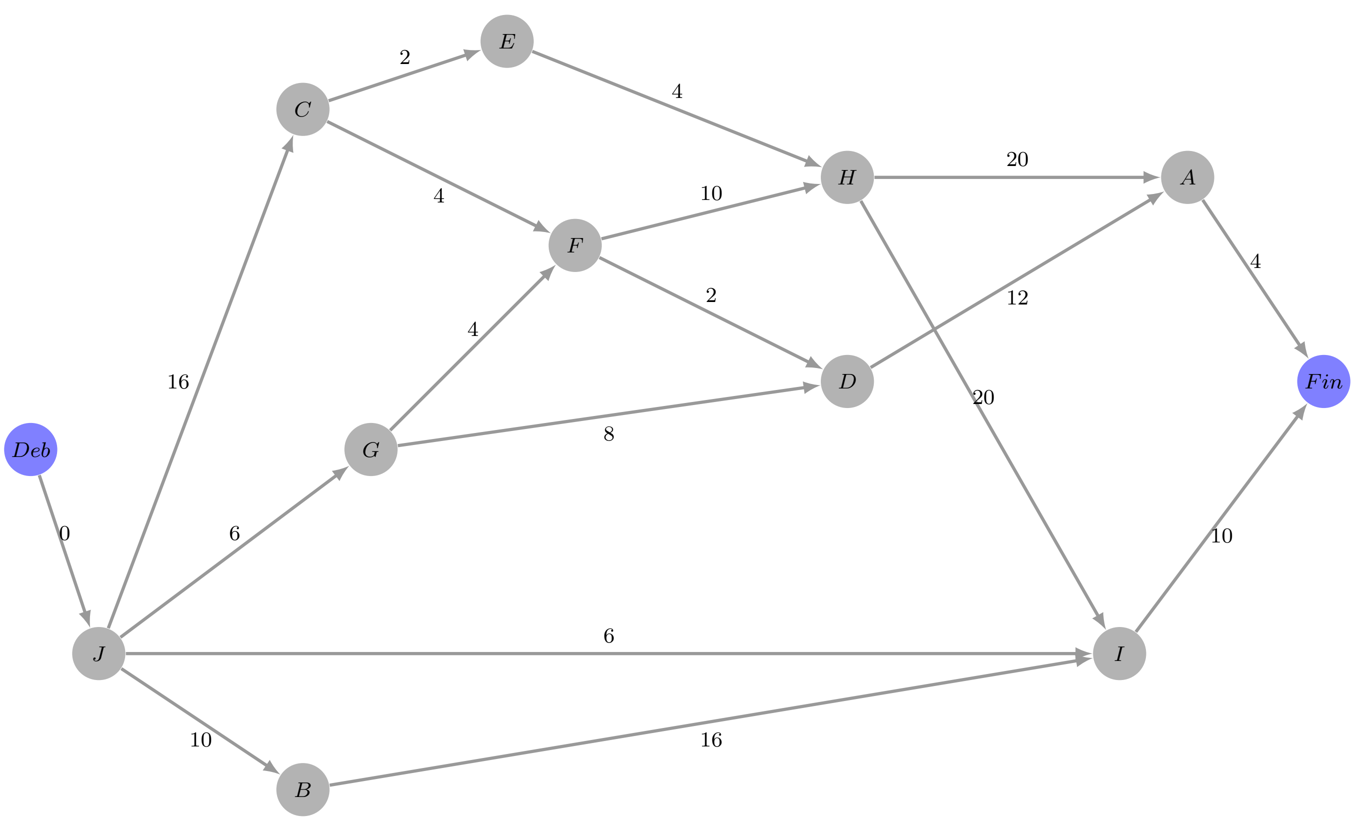
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Deb plus tôt										
Deb plus tard										
Mg										

Table 4 – Résultats obtenus

Question 4. Réduction. On souhaite réaliser le projet en 52 jours. On a la possibilité de réduire la durée des activités D, H et I. Proposez la réduction la plus simple. Précisez votre raisonnement.



Deb
J
C
E
F
G
H
D
A
I
B
Fin
0
16
6
6
10
2
4
4
4
10
2
8
20
12
20
4
10
16



Deb
J
C
E
F
G
H
D
A
I
B
Fin
0
16
6
6
10
2
4
4
4
10
2
8
20
12
20
4
10
16

5 Graphes de Flot

Définitions (*)

Application du cours. Soit le graphe de flot de la figure 14 dans lequel les arcs sont valués par la quantité de flot circulant et par la capacité maximale.

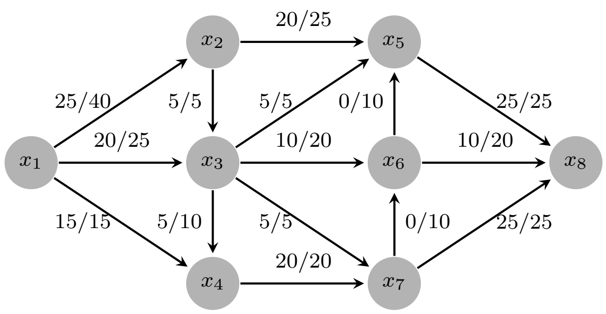


FIGURE 14 – Exemple de graphe de flot

a Donnez le débit de flot circulant sur ce graphe.

b Le graphe de flot est-il admissible ?

c Soit la coupe $K1 = (\{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\})$, donnez sa capacité.

d Soit la coupe $K2 = (\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2, x_5, x_6, x_7, x_8\})$, donnez sa capacité.

e Proposez une borne supérieure pour le débit maximal de flot.

5.1 Circulation (*)

Une centrale située en P reçoit de l'eau de 2 sources situées en S1 et S2 par un réseau représenté par le schéma de la figure 15. Sur chaque arc on a noté la quantité circulant et la capacité maximale possible.

Question 1. Modélisation et compréhension.

a Ajoutez un sommet source S à ce graphe (avec des valeurs de flot et de capacité admissible) afin d'obtenir un graphe de flot.

b La centrale peut-elle recevoir la quantité maximale que les deux sources peuvent fournir ?

c Quelle est la quantité de flot (débit) circulant actuellement dans ce graphe de flot ?

d Quelle est la capacité de la coupe $X = \{S, S1, S2, \}$ et $X' = \{A, B, C, D, E, P\}$?

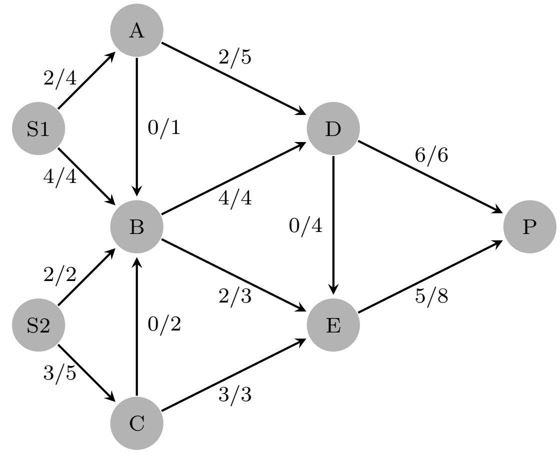


FIGURE 15 – Réseau de circulation

Question 2. Calcul du flot maximal. Appliquez l'agorithme de Ford Fulkerson en utilisant les schémas fournis et en donnant à chaque étape :

- Le graphe d'écart
- L'arborescence du parcours (parcours en largeur en sélectionnant les sommets dans l'ordre alphabétique)
- Le chemin augmentant
- La variation de flot

Résultats obtenus :

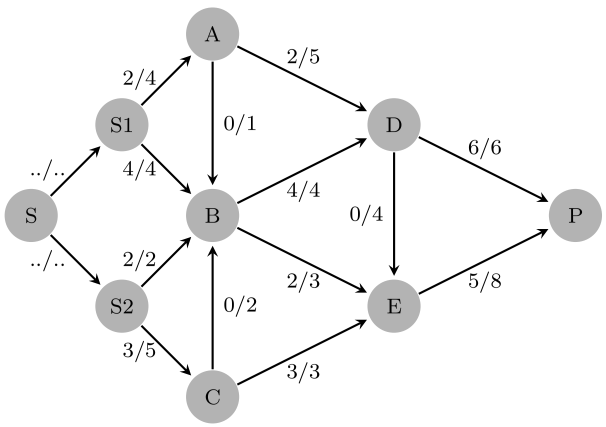
- Valeur du débit maximal de flot =
- Coupe minimale et capacité de cette coupe =

Question 3. Arcs inverses. A partir de cet exemple, quel intérêt avez-vous identifié pour l'utilisation des arcs inverses dans le graphe d'écart.

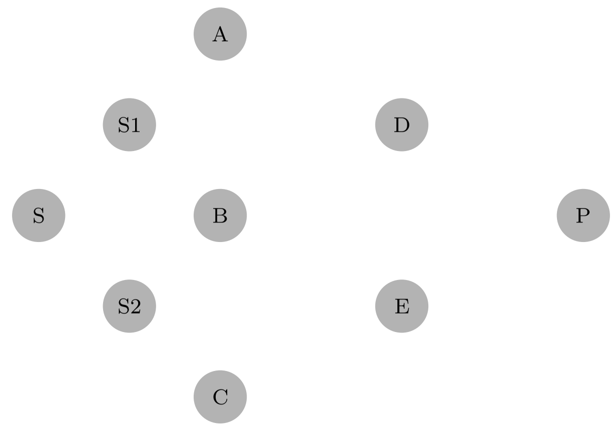
Ces schémas servent pour les questions 1 et 2 de l'exercice.

Itération 1

Graphe de flot (initial)



Graphe d'écart



Parcours

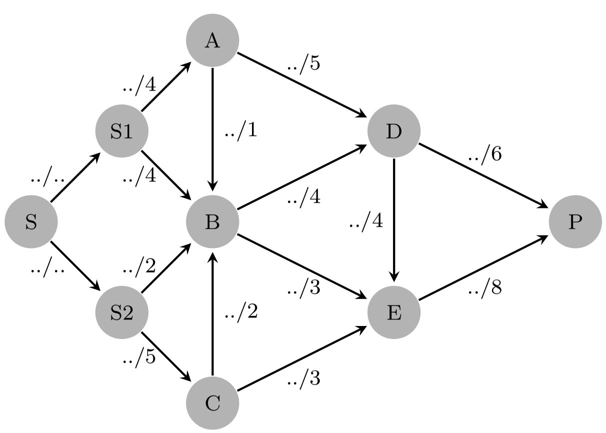
Flot =

Chemin d'incrémentation =

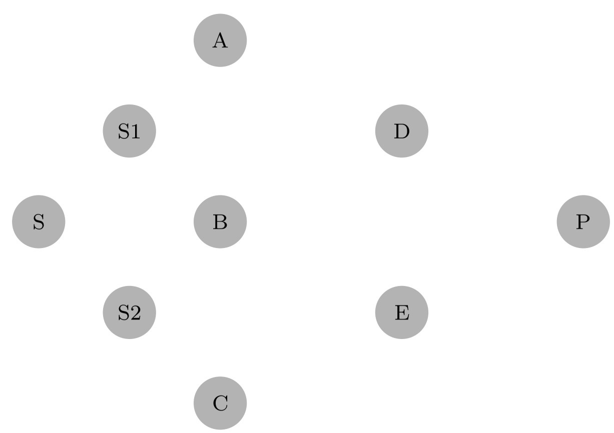
Valeur d'incrémentation =

Itération ...

Graphe de flot



Graphe d'écart



Parcours

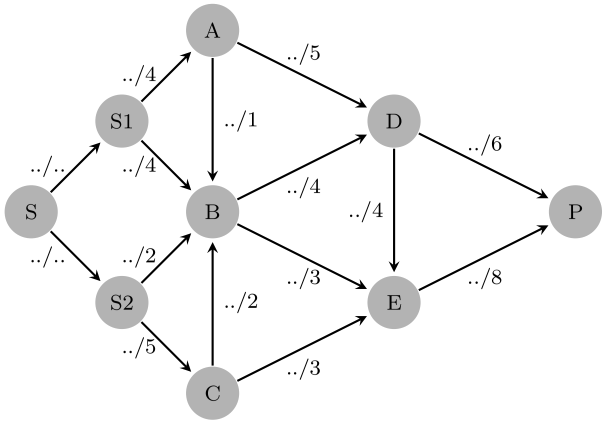
Flot =

Chemin d'incrémentation =

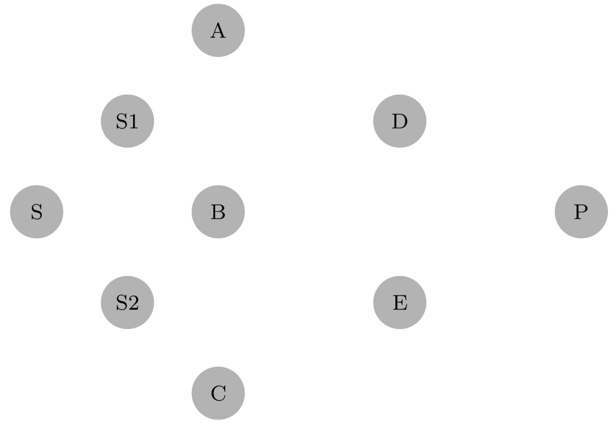
Valeur d'incrémentation =

Itération ...

Graphe de flot



Graphe d'écart



Parcours

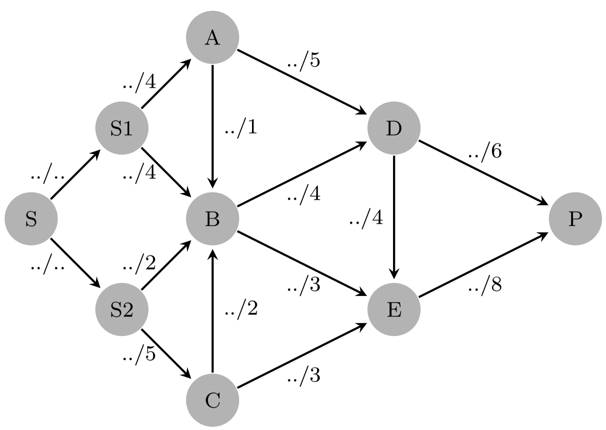
Flot =

Chemin d'incrémentation =

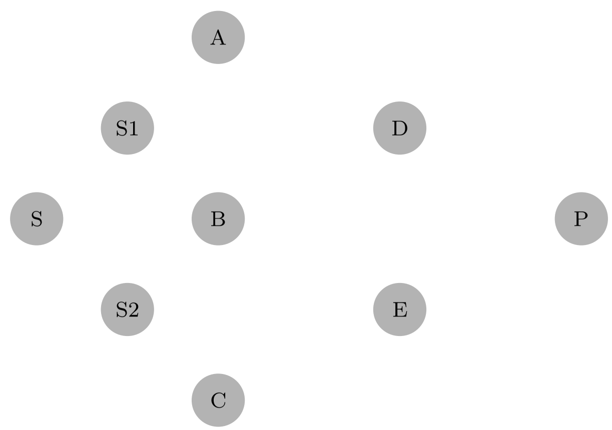
Valeur d'incrémentation =

Itération ...

Graphe de flot



Graphe d'écart



Parcours

Flot =

Chemin d'incrémentation =

Valeur d'incrémentation =

5.2 Transport (*)

Trois dépôts A, B et C disposent respectivement de 30, 20 et 35 tonnes de marchandises. Ces dépôts desservent quatre zones de consommation D, E, F et G demandant respectivement 10, 25, 20 et 25 tonnes. Les caractéristiques et les capacités du réseau de transport des points de dépôt aux points de consommation sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	D	E	F	G
A	5	5	-	20
B	-	20	10	5
C	10	10	10	10

Question 1. Graphe de flot. Donnez le graphe de flots modélisant ce problème de transport : identifiez les sommets source et puit et notez les capacités des arcs.

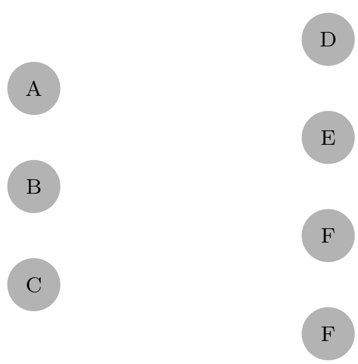


FIGURE 20 – Graphe de flot du problème de transport

Question 2. Borne supérieure du flot. Compte tenu des offres disponibles aux dépôts et des demandes aux zones de consommation, donnez une borne supérieure du flot maximal.

Question 3. Plan de transport. Une société de transport propose le plan d'acheminement suivant :

- Depuis A : acheminer 5 tonnes vers D, 5 tonnes vers E et 20 tonnes vers G
- Depuis B : acheminer 20 tonnes vers E
- Depuis C : acheminer 5 tonnes vers D, 10 tonnes vers F et 5 tonnes vers G

a Explicitez ce plan de transport sur le graphe de flot (schémas page suivante).

b Quelle est la valeur du débit de flot ainsi obtenu ?

c Ce débit permet-il de satisfaire les demandes ? Justifiez votre réponse.

Question 4. Compréhension.

a Votre schéma contient-il des arcs de capacité nulle ?

b Votre schéma contient-il des arcs de flot nul ?

c Quelle différence y-a-t-il entre un arc de capacité nulle et un arc de flot nul ?

Question 5. Amélioration du plan de transport. Nous allons chercher à améliorer la valeur du débit. Pour cela, vous allez appliquer l'algorithme de Ford Fulkerson avec comme flot initial le plan de transport proposé (utilisez les schémas fournis).

Donnez le nouveau plan de transport obtenu :

- depuis A :
- depuis B :
- depuis C :

Itération 1

Figure 21 – **Graphe de flot (initial)**

Figure 22 – **Graphe d'écart**

Figure 23 – **Parcours**

Flot : Chemin d'incrémentation : Valeur d'incrémentation :

Itération ...

Figure 24 – **Graphe de flot**

Figure 25 – **Graphe d'écart**

Figure 26 – **Parcours**

Flot : Chemin d'incrémentation : Valeur d'incrémentation :

5.3 Affectation (*)

Un magasin souhaite affecter des vendeurs à ses n rayons en respectant les contraintes suivantes :

- chaque vendeur est affecté à un rayon et un seul ;
- dans chaque rayon, il y a exactement deux vendeurs ;
- chaque vendeur a des compétences spécifiques exprimant le fait qu'il peut travailler dans un rayon donné ;
- chaque vendeur est compétent dans le rayon où il est affecté.

On suppose que le nombre de vendeurs (m) est supérieur ou égal à $2n$.

Question 1. Proposez une modélisation de ce problème en termes de recherche de flot maximal (explicitez les sommets, les arcs, les capacités du graphe de flot).

Question 2. Que représente la valeur du flot maximal par rapport au problème que vous devez résoudre ?

Question 3. Appliquez votre modélisation sur un exemple dans lequel il y a 3 rayons notés $r1, r2, r3$, et 6 vendeurs notés de $v1$ à $v6$. Les compétences des vendeurs sur les rayons sont les suivantes :

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
r1	1	1	1			1
r2			1	1		1
r3		1		1	1	

Question 4. Déterminez une affectation initiale des vendeurs aux rayons en utilisant l'heuristique triviale suivante : (a) prendre les vendeurs dans l'ordre de leur numéro et (b) placer chaque vendeur sur le premier rayon pour lequel il est compétent, si cela est possible, sinon le vendeur n'est pas affecté.

a Donnez le graphe de flot correspondant

b Donnez la valeur de flot maximal obtenu

c Tous les vendeurs sont-ils affectés à un rayon ?

Question 5. Pour savoir s'il est possible d'améliorer l'affectation obtenue à la question 4, appliquez l'algorithme de Ford Fulkerson. Quelle est la nouvelle solution ?

5.4 Points de contrôle (*)

Le graphe de flot de la figure 27 représente la circulation de produits entre une source s et une destination p. Ces produits doivent être contrôlés lors de leur acheminement. On supposera que le coût de mise en place d'une inspection est proportionnelle à la capacité de l'arc sur lequel elle a lieu.

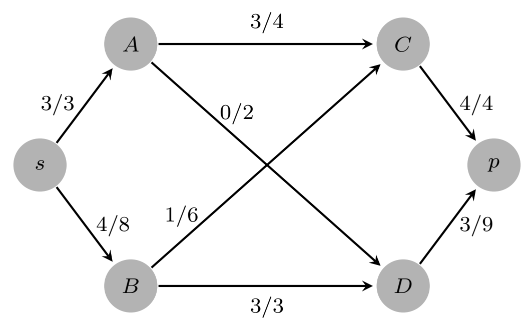


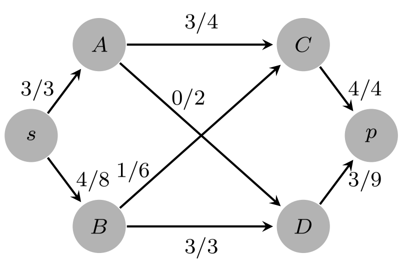
FIGURE 27 – Exemple de graphe de flot

Question 1. En vous appuyant sur un calcul de flot maximal, déterminez où positionner les points de contrôle à coût minimal.

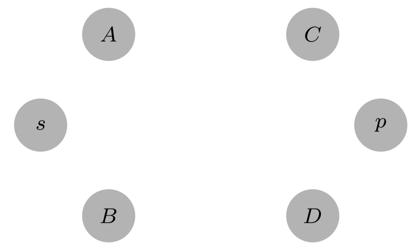
Question 2. Proposez une application de ce problème.

Itération 1

Graphe de flot (initial)



Graphe d'écart



Parcours

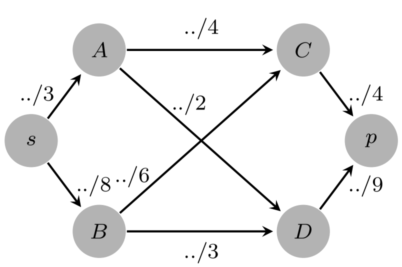
Flot =

Chemin d'incrémentation =

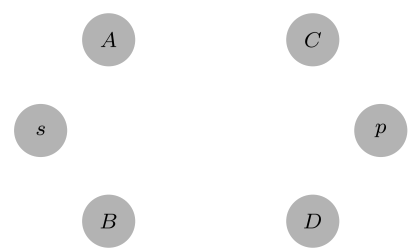
Valeur d'incrémentation =

Itération ...

Graphe de flot



Graphe d'écart



Parcours

Flot =

Chemin d'incrémentation =

Valeur d'incrémentation =