Stabilité des systèmes linéaires incertains à commande contrainte

Didier Henrion

Thèse de doctorat de l'INSA Toulouse
préparée au LAAS-CNRS Toulouse
sous la direction de Sophie Tarbouriech

PLAN

PLAN

$\boxed{\textbf{1. Introduction}}$

2. Problème d'analyse

3. Problème de synthèse

    3.1. Commande saturante

    3.2. Commande linéaire par morceaux

    3.3. Commande polynomiale

4. Conclusion

1. INTRODUCTION

Phénomènes omniprésents dans les systèmes dynamiques

- incertitudes

- contraintes sur la commande

Nombreux travaux consacrés à l'étude de ces phénomènes, considérés **séparément**

- commande robuste

- commande limitée en amplitude

▶ Nous désirons étudier les effets **simultanés** de ces phénomènes

COMMANDE ROBUSTE

Motivation : erreurs ou approximations de modélisation, variations de paramètres, dynamiques rapides négligées

Deux grandes approches

- Méthodes fréquentielles, incertitude non-structurée (Lyapunov, LQG-LTR, approche $\mathcal{H}_\infty$, optimisation $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$)

- Méthodes temporelles, incertitude structurée (Lyapunov, Kharitonov, robustesse paramétrique)

▶ Nous considérons des **incertitudes non structurées**

COMMANDE LIMITEE EN AMPLITUDE

Motivation : limites physiques des actionneurs, non-linéarités de saturations

Deux grandes approches

- Méthodes prenant en compte les contraintes implicitement ou a posteriori (anti wind-up, méthodes fréquentielles ad hoc), ce sont les plus utilisées

- Méthodes prenant en compte les contraintes explicitement ou a priori (commande saturante et commande contrainte)

▶ Nous prenons en compte **explicitement** les contraintes

Commande **contrainte**, système linéaire en boucle fermée

- invariance positive

- programmation convexe

Commande **saturante**, système non-linéaire en boucle fermée

- stabilisation globale

- stabilisation semi-globale

- stabilisation locale

▶ Nous étudions des lois de commande **saturantes** et des lois de commande **contraintes**

▶ Nous étudions uniquement la stabilisation **locale**, sans hypothèse de stabilité en boucle ouverte

DISTINCTION ENTRE COMMANDE SATURANTE ET COMMANDE CONTRAINTE

Exemple d'un système linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

commandé par un retour d'état saturant

$$u = \text{sat}(Kx)$$

tel que $A + BK$ soit stable, et où

$$\text{sat}(u_i) = \begin{cases} \overline{u}_i & \textbf{si} \quad u_i > \overline{u}_i > 0 \\ u_i & \textbf{si} \quad -\overline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \\ -\overline{u}_i & \textbf{si} \quad u_i < -\overline{u}_i < 0 \end{cases}$$

Le système en boucle fermée est **non-linéaire**

$$\dot{x} = Ax + B\text{sat}(Kx)$$

mais dans la région de linéarité polyédrale

$$\{x : |K_i x| \leq \overline{u}_i, i = 1, \ldots, m\}$$

il est localement **linéaire**

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Deux cas de figure

- La commande est telle que l'état ne quitte jamais la région de linéarité : le système reste linéaire mais la commande est dite **contrainte**, c'est l'approche la plus utilisée

- L'état peut quitter la région de linéarité, le système est non-linéaire et la commande est dite **saturante**

OUTILS NUMERIQUES ET GEOMETRIQUES

Objectif: étude des systèmes incertains à commande limitée en amplitude

Nous utilisons **systématiquement** un ensemble d'outils numériques classiques mais efficaces et fiables

- équations algébriques de Riccati (ARE)
- inégalités matricielles linéaires (LMI)
- matrices polynomiales
- ellipsoïdes et polyèdres

▶ Nous utilisons des programmes MATLAB pour manipuler ces objets

PLAN

1. Introduction

$\boxed{\textbf{2. Problème d'analyse}}$

3. Problème de synthèse

   3.1. Commande saturante

   3.2. Commande linéaire par morceaux

   3.3. Commande polynomiale

4. Conclusion

2. PROBLEME D'ANALYSE

Motivation : étudier la stabilité d'un système linéaire incertain à commande limitée en amplitude, la loi de commande étant **donnée**

Plusieurs méthodes suivant la modélisation des saturations (polytopique, régions de saturations, non-linéarité de secteur) et la nature de la région de stabilité envisagée (polyèdre, ellipsoïde, région de type Lur'e)

▶ Nous utilisons une modélisation **polytopique** des saturations et des régions de stabilité **ellipsoïdales**

Précédents travaux sur les systèmes certains uniquement. Aucune approche unifiée pour les systèmes incertains

▶ Notre approche est unifiée dans le sens où nous utilisons **systématiquement** des outils numériques classiques et puissants

POSITION DU PROBLEME

Système continu

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

Incertitudes

- bornées en norme

$$\begin{array}{rcl} A(t) & \in & \{A_0 + DF(t)E_1, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\ B(t) & \in & \{B_0 + DF(t)E_2, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1\} \end{array}$$

- ou polytopiques

$$\begin{array}{rcl} A(t) & \in & \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{n_A}\} \\ B(t) & \in & \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_{n_B}\} \end{array}$$

Saturations : retour d'état

$$u = \mathrm{sat}(Kx)$$

avec K donné et seuil de saturation $\overline{u}$

Pas d'hypothèse sur la stabilité de $A(t)$

Certaines trajectoires du système incertain en présence de saturations

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\text{sat}(Kx) \qquad\qquad (S)$$

peuvent être **instables**

Trouver l'ensemble de toutes les conditions initiales pour lesquelles le système est stable est un problème **très difficile** en général

▶ Nous allons **approcher** cet ensemble par un **ellipsoïde**

$$\mathcal{E} = \{x : x'Px \leq 1/r\}$$

où $r > 0$ et $P = P' \succ 0$, avec $V(x) = x'Px$ une fonction de Lyapunov locale pour le système

MODELISATION POLYTOPIQUE DES SATURATIONS

Le système (S) peut s'écrire

$$\dot{x} = Ax + BG(x)Kx$$

où $G(x)$ est une **matrice diagonale** dont les composantes sont

$$g_i(x) = \begin{cases} \overline{u}_i/K_ix & \text{si} \quad K_ix > \overline{u}_i \\ 1 & \text{si} \quad |K_ix| \leq \overline{u}_i \\ -\overline{u}_i/K_ix & \text{si} \quad K_ix < -\overline{u}_i \end{cases}$$

pour $i = 1, \ldots, m$

$g_i \to 0$: pas de retour sur la commande u_i

$g_i = 1$: pas de saturation sur la commande u_i

Le domaine d'évolution de x est **limité** à $\mathcal{E}$, donc il existe un vecteur constant $\underline{g}$ tel que

$$\underline{g}_i = \min\{g_i(x) : x \in \mathcal{E}\} \leq g_i(x) \leq 1$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$

A partir du vecteur $\underline{g}$, nous définissons les matrices **sommets**

$$A(t) + B(t)\underline{G}_k K$$

pour $k = 1, \ldots, 2^m$, où les matrices $\underline{G}_k$ sont les 2^m matrices diagonales dont les éléments peuvent être égaux à 1 ou à $\underline{g}_i$ pour $i = 1, \ldots, m$

Par exemple pour $m = 2$ nous construisons les 4 matrices

$$\underline{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{G}_2 = \begin{bmatrix} \underline{g}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \underline{g}_2 \end{bmatrix} \quad \underline{G}_4 = \begin{bmatrix} \underline{g}_1 & 0 \\ 0 & \underline{g}_2 \end{bmatrix}$$

Dans le **polyèdre**

$$\mathcal{P} = \{x : |K_i x| \leq \underline{u}_i/\underline{g}_i\} \supset \mathcal{E}$$

nous décrivons le système (S) par l'équation dynamique

$$\dot{x} = A_{cl}(t)x \qquad (P)$$

où la matrice en boucle fermée satisfait

$$A_{cl}(t) \in \mathbf{Co}\{A + B\underline{G}_1 K, \ldots, A + B\underline{G}_{2^m} K\}$$

Le système saturé (S) peut être représenté **localement** par le système **polytopique** (P) dans le polyèdre $\mathcal{P}$ et donc dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$

CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILITE

Existence de P, $\underline{g}$ et r solutions des **inégalités matricielles**

– pour les incertitudes bornées en norme

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (A_0 + B_0\underline{G}_k K)'P + \\ P(A_0 + B_0\underline{G}_k K) \end{pmatrix} & PD & E_1' + K'\underline{G}_k E_2' \\ D'P & -I & 0 \\ E_1 + E_2\underline{G}_k K & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

– pour les incertitudes polytopiques

$$(A_i + B_j\underline{G}_k K)'P + P(A_i + B_j\underline{G}_k K) \prec 0$$

– inclusion de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{P}$

$$\begin{bmatrix} P & \underline{g}_l K_l' \\ \underline{g}_l K_l & r w_l^2 \end{bmatrix} \succeq 0$$

pour tout $i = 1, \ldots, n_A$, $j = 1, \ldots, n_B$, $k = 1, \ldots, 2^m$ et $l = 1, \ldots, m$

RESULTAT PRINCIPAL

Théorème : S'il existe P, $\underline{g}$ et r vérifiant les inégalités matricielles précédentes, alors l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \{x : x'Px \leq 1/r\}$ est un domaine de conditions initiales pour lesquelles le système incertain saturé (S) est stable

Corollaire : La maximisation de la taille de $\mathcal{E}$ peut s'effectuer en minimisant les critères r, trace P ou $\log\det P$

Obstacle : Les inégalités matricielles sont bilinéaires en P et $\underline{g}$, or les BMIs sont très difficiles à résoudre en général

RELAXATIONS LMI

Sources potentielles de **conservatisme** de notre approche : représentation des incertitudes, des saturations, matrice de Lyapunov unique

Inutile d'utiliser les méthodes lourdes et complexes d'optimisation globale pour résoudre les BMIs, une solution **approchée** suffit

Nous avons choisi une méthode d'approximation très simple basée sur des **relaxations LMI successives**, obtenues en fixant alternativement certaines variables de décision

Avantage : simplicité de la mise en oeuvre

Inconvénient : pas de garantie de convergence

EXEMPLE

Considérons le système

$$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0.1 & -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) x$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F(t) \right) u$$

avec incertitude bornée en norme $\|F(t)\|_2 \leq 1$ et commandes limitées

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} \leq u \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nous recherchons une approximation de l'ensemble des conditions initiales stabilisables par le retour d'état optimal

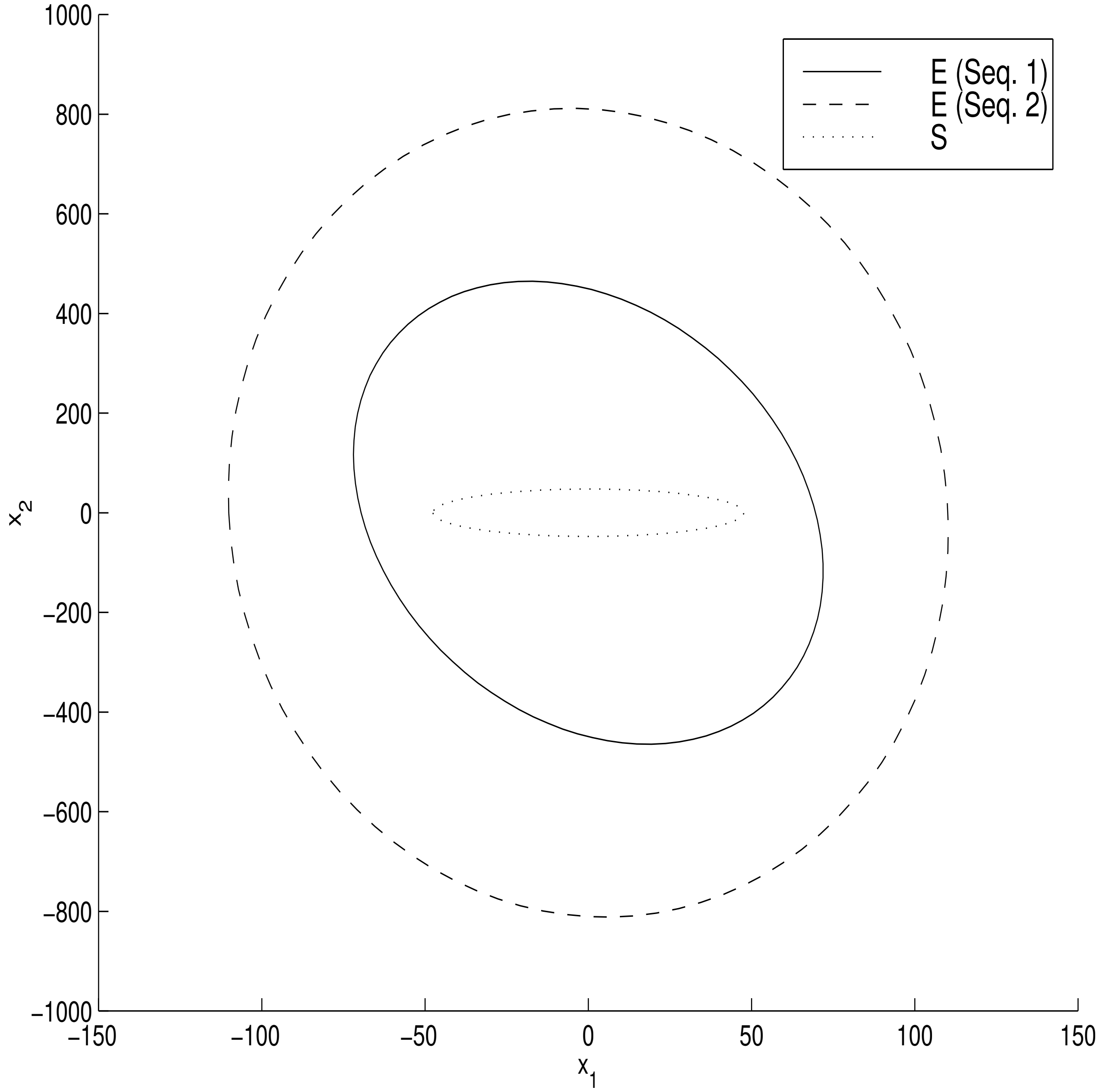
$$u = - \begin{bmatrix} 0.7283 & 0.0338 \\ 0.0135 & 1.3583 \end{bmatrix} x$$

Le plus grand ensemble de conditions initiales obtenu dans la littérature est la sphère

$$\mathcal{S} = \{x : x'x \leq 2265\}$$

Nous testons 2 séquences de relaxations LMI différentes

Les rapports entre les volumes des ellipsoïdes $\mathcal{E}$ obtenus et celui de la sphère $\mathcal{S}$ sont respectivement 676.8 et 1877



Comparaison des ensembles de conditions initiales stabilisables

2. PROBLEME D'ANALYSE
CONCLUSION

Conservatisme inhérent à la méthode : modélisation des incertitudes, modélisation des saturations, matrice de Lyapunov unique

Un résultat sembable peut être obtenu à l'aide d'**AREs** : moins de souplesse mais complexité algorithmique moindre

Etude plus **systématique** d'un critère pour le choix des relaxations

Autres **modélisations** des saturations

PLAN

1. Introduction

2. Problème d'analyse

$\boxed{\textbf{3. Problème de synthèse}}$

3.1. Commande saturante

3.2. Commande linéaire par morceaux

3.3. Commande polynomiale

4. Conclusion

3. PROBLEME DE SYNTHESE

Motivation : stabiliser un système incertain à commande limitée en amplitude

Pour résoudre le problème d'analyse, nous cherchons le domaine de stabilité. Pour résoudre le problème de synthèse, nous cherchons **simultanément** le domaine de stabilité et une commande stabilisante

▶ Nous étudions uniquement la stabilisation **locale**

▶ Nous considérons **explicitement** les limitations en amplitude

▶ Nous proposons **trois** approches : la première est de type commande saturante, les deux suivantes sont de type commande contrainte

PLAN

1. Introduction

2. Problème d'analyse

3. Problème de synthèse

   $\boxed{\textbf{3.1. Commande saturante}}$

   3.2. Commande linéaire par morceaux

   3.3. Commande polynomiale

4. Conclusion

3.1. COMMANDE SATURANTE

Approche similaire à la méthode d'analyse précédente

Extension au retour de **sortie dynamique**

Détermination d'un compensateur dynamique stabilisant le système incertain saturé dans le plus grand ellipsoïde de conditions initiales

Saturations **autorisées**

Approche basée sur un couple d'AREs ou de successions de relaxations LMIs

EXEMPLE

Considérons le système

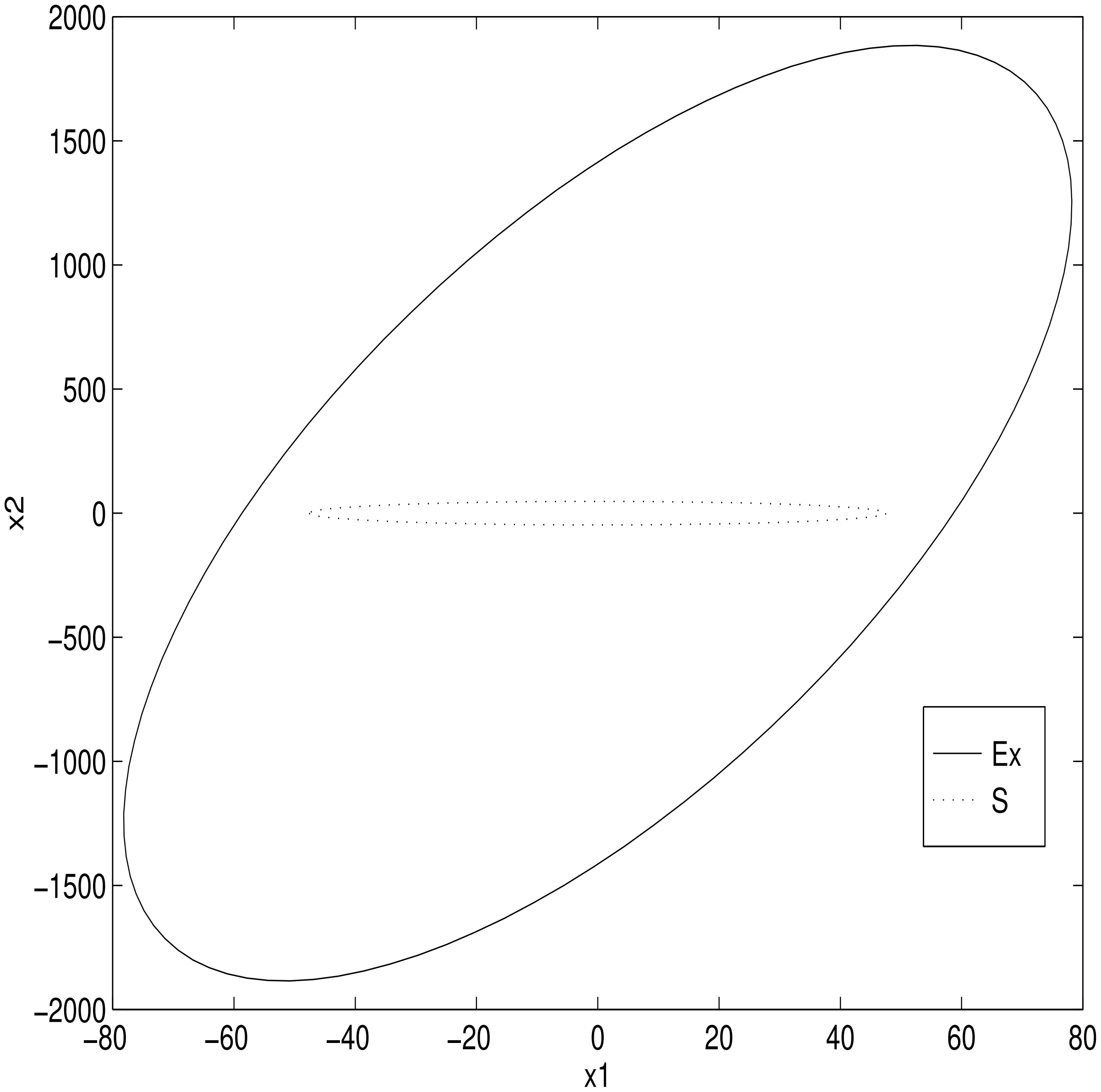
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \left(\begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0.1 & -3 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) x \\
&\quad + \left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F(t) \right) u \\
y &= x
\end{aligned}
$$

avec incertitude bornée en norme $\|F(t)\|_2 \leq 1$ et commandes limitées

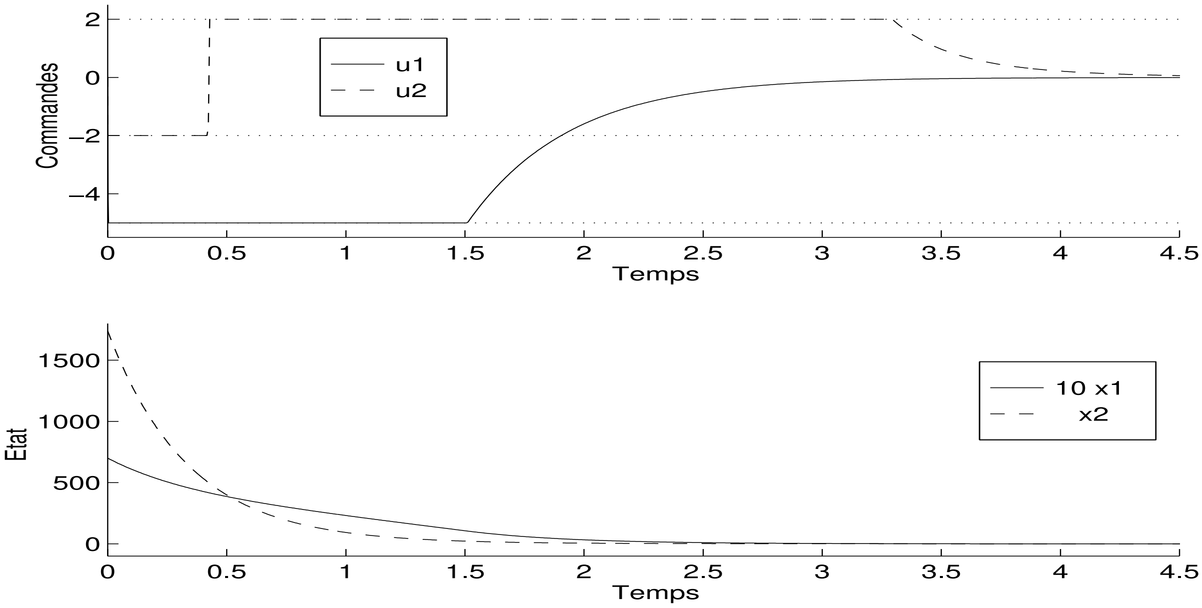
$$
\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} \leq u \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

A l'aide de la méthode LMI nous obtenons le compensateur dynamique

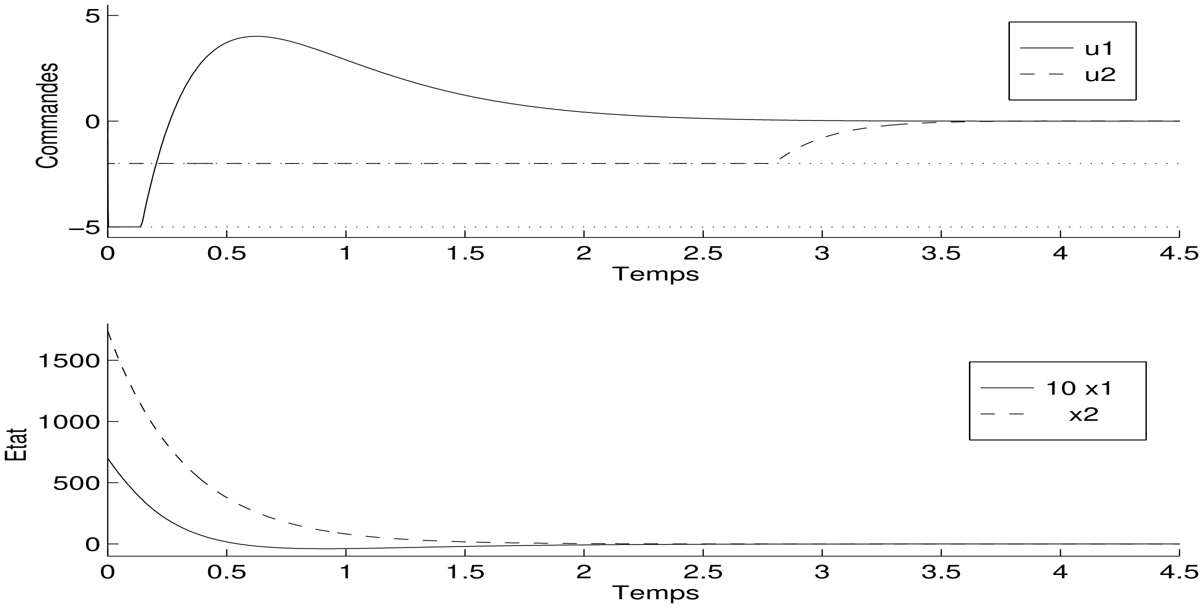
$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \begin{bmatrix} -171.2 & 27.06 \\ -68.00 & -626.8 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -598.2 & 5.539 \\ -4.567 & 149.8 \end{bmatrix} y \\
u &= \begin{bmatrix} 0.146 & 0.088 \\ -6.821 & -5.670 \end{bmatrix} z
\end{aligned}
$$



Comparaison des ensembles de conditions initiales stabilisables



Simulation pour $F(t) \equiv 1$



Simulation pour $F(t) \equiv -1$

PLAN

1. Introduction

2. Problème d'analyse

3. Problème de synthèse

   3.1. Commande saturante

   $\boxed{\textbf{3.2. Commande linéaire par morceaux}}$

   3.3. Commande polynomiale

4. Conclusion

3.2. COMMANDE LINEAIRE PAR MORCEAUX

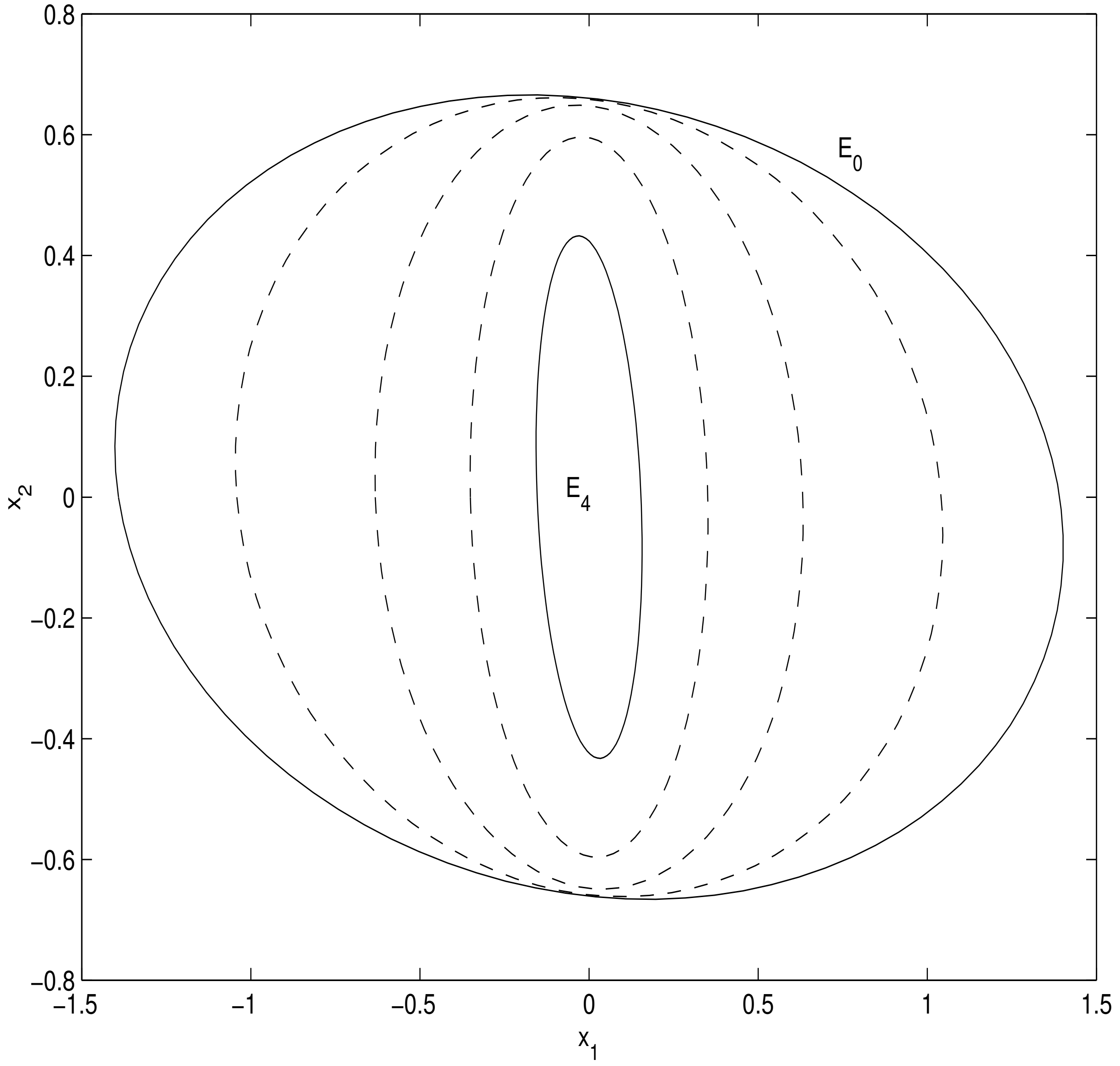
Méthode **évitant les saturations** en respectant les contraintes sur la commande, tout en garantissant une certaine **performance**

Construction d'une famille d'AREs paramétrées et d'une famille d'ellipsoïdes **inclus** les uns dans les autres

Initialisation de l'état du système dans l'ellipsoïde le plus grand, gain de retour d'état **faible**

Application d'un gain **croissant**

Dans l'ellipsoïde le plus petit, application d'un gain fort de **coût garanti**



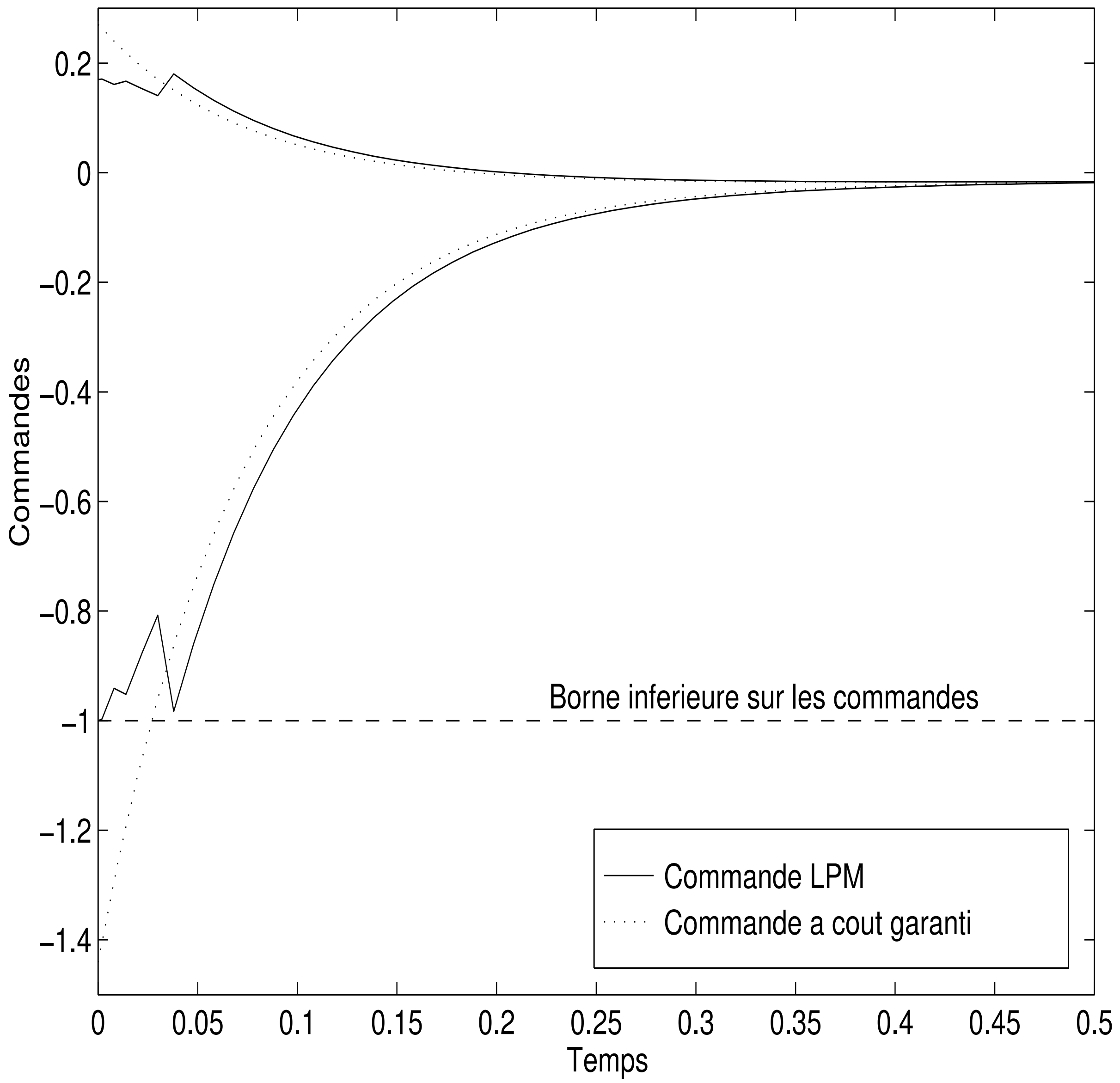
Commande LPM. Les surfaces de commutation sont les ellipsoïdes imbriqués $\mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{E}_4$

EXEMPLE

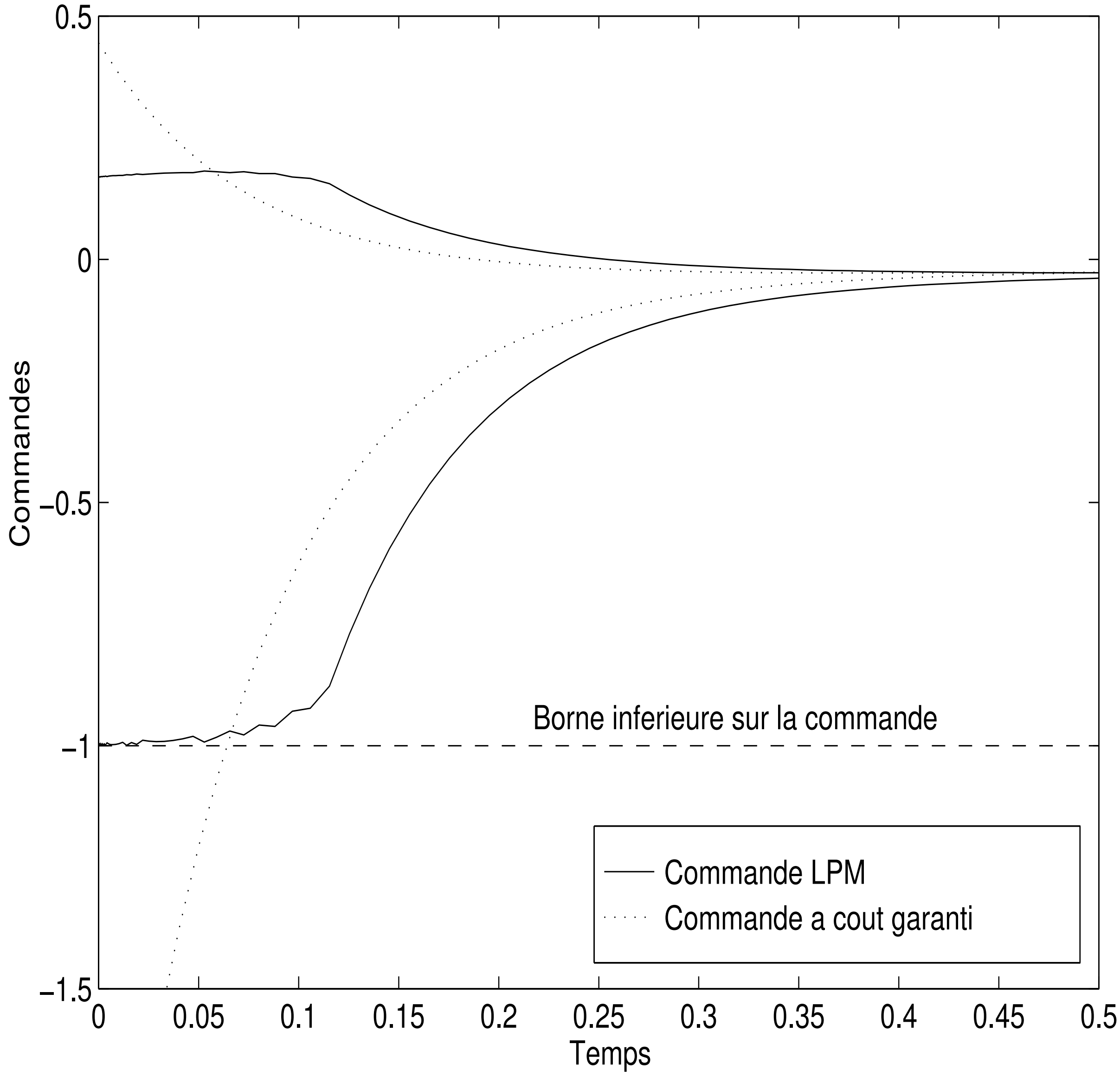
Dynamique simplifiée d'un hélicoptère dans un plan vertical

Système linéaire incertain d'ordre 4 avec deux commandes contraintes $|u_1| \leq 1$, $|u_2| \leq 1$

Comparaison des lois de commandes linéaires par morceaux avec $M = 4$ et $M = 50$ ellipsoïdes



Cas $M = 4$. Comparaison entre la commande de coût garanti sans contraintes et la commande LPM



Cas $M = 50$. Comparaison entre la commande de coût garanti sans contraintes et la commande LPM

CONCLUSION

Tous les calculs se font **hors-ligne**

Utilisation d'AREs mais également de LMIs pour déterminer les ellipsoïdes $\mathcal{E}_i$ et les gains K_i pour $i = 1, \ldots, M$

Avec l'approche LMI, l'ellipsoïde $\mathcal{E}(0)$ de conditions initiales stabilisables est plus étendu qu'avec l'approche ARE

Compromis entre le nombre M d'ellipsoïdes et la souplesse de la commande

Temps de calcul pour $M = 50$ ellipsoïdes avec ARE : 1.4 secondes, avec LMI : 35 secondes

PLAN

1. Introduction

2. Problème d'analyse

3. Problème de synthèse

   3.1. Commande saturante

   3.2. Commande linéaire par morceaux

   3.3. Commande polynomiale

4. Conclusion

3.3. COMMANDE POLYNOMIALE

Méthode **évitant** les saturations en respectant les contraintes sur la commande

Nous restreignons notre étude aux systèmes discrets **certains**

Utilisation des **matrices polynomiales** : équation de Bézout

Utilisation de la **paramétrisation** de Youla-Kučera de l'ensemble des compensateurs stabilisants

POSITION DU PROBLEME

Système linéaire discret

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= F\xi_k + Gu_k \\ z_k &= H\xi_k \end{aligned}$$

avec condition initiale ξ_0

Description équivalente

$$z(d) = S(d)u(d) + T(d)\xi_0$$

avec les matrices rationnelles

$$\begin{aligned} S(d) &= H(I - Fd)^{-1}Gd \\ T(d) &= H(I - Fd)^{-1} \end{aligned}$$

ou les fractions de matrices polynomiales (MFDs)

$$\begin{aligned} S(d) &= B(d)A^{-1}(d) \\ &= \bar{A}^{-1}(d)\bar{B}(d) \\ T(d) &= \bar{A}^{-1}(d)\bar{C}(d). \end{aligned}$$

Commande par compensateur dynamique

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} &= \bar{F}\eta_k + \bar{G}z_k \\ u_k &= \bar{H}\eta_k + \bar{J}z_k \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u(d) = -K(d)z(d)$$

pour

$$\begin{aligned} K(d) &= Y(d)X^{-1}(d) \\ &= \bar{X}^{-1}(d)\bar{Y}(d). \end{aligned}$$

Commande contrainte

$$-u^- \leq u_k \leq u^+$$

Ensemble de conditions initiales stabilisables

– polyèdre

$$\mathcal{P}_N = \{\xi : N\xi \leq \nu\}$$

– ellipsoïde

$$\mathcal{E}_\Pi = \{\xi : \xi'\Pi\xi \leq 1\}$$

où $\Pi = \Pi' \succeq 0$

Problème : Trouver le compensateur dynamique stabilisant le plus grand polyèdre $\mathcal{P}_N$ ou ellipsoïde $\mathcal{E}_\Pi$ de conditions initiales ξ_0 en présence de contraintes sur la commande

APPROCHE POLYNOMIALE

MFDs système : $A(d)$, $B(d)$, $\bar{A}(d)$, $\bar{B}(d)$

MFDs compensateur : $\hat{X}(d)$, $\hat{Y}(d)$, $\hat{\bar{X}}(d)$, $\hat{\bar{Y}}(d)$ solutions particulières de la double **identité de Bézout**

$$\left[\begin{array}{cc} \bar{X}(d) & \bar{Y}(d) \\ -\bar{B}(d) & \bar{A}(d) \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} A(d) & -Y(d) \\ B(d) & X(d) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & I \end{array}\right]$$

Paramétrisation de l'ensemble des compensateurs stabilisants

$$\begin{array}{rcl} X(d) & = & \hat{X}(d) + B(d)Q(d) \\ Y(d) & = & \hat{Y}(d) - A(d)Q(d) \\ \bar{X}(d) & = & \hat{\bar{X}}(d) + \bar{Q}(d)\bar{B}(d) \\ \bar{Y}(d) & = & \hat{\bar{Y}}(d) - \bar{Q}(d)\bar{A}(d) \end{array}$$

où $Q(d)$ et $\bar{Q}(d)$ matrices rationnelles stables (paramètres de Youla-Kučera)

CONTRAINTE SUR L'ETAT INITIAL

Nous démontrons que

$$u(d) = [A(d)Q(d)\bar{C}(d) - \hat{Y}(d)\bar{C}(d)]\xi_0$$

donc contraintes sur la commande u
$\Rightarrow$ **contraintes sur l'état initial** ξ_0

En fait

$$-u^- \leq u_k \leq u^+$$

si et seulement si

$$\xi_0 \in \mathcal{P}_M = \{\xi : M(q)\xi \leq \mu\}$$

où $M(q)$ dépend **linéairement** du paramètre $Q(d)$ de Youla-Kučera et $\mu' = [u^+ \, u^- \, u^+ \, u^- \, \ldots]$

RESULTAT PRINCIPAL

Théorème : Les contraintes sur la commande sont vérifiées

– dans le polyèdre $\mathcal{P}_N = \{\xi : N\xi \leq \nu\} \subset \mathcal{P}_M$ si, et seulement si, il existe P non-négative et q

$$\begin{array}{rcl} PN & = & M(q) \\ P\nu & \leq & \mu \end{array}$$

– dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}_\Pi = \{\xi : \xi'\Pi\xi \leq 1\} \subset \mathcal{P}_M$ si, et seulement si, il existe q

$$\begin{bmatrix} \Pi & M_i'(q) \\ M_i(q) & \mu_i^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Le paramètre q permet ensuite de déterminer le compensateur

▶ But : **maximiser** la taille de $\mathcal{P}_N$ ou $\mathcal{E}_\Pi$ à l'aide de ces problèmes **convexes** de programmation linéaire et de programmation semi-définie

MAXIMISATION DE L'ENSEMBLE DE CONDITIONS INITIALES

Maximisation de la taille d'un polyèdre homothétique, à partir d'un polyèdre initial donné, à l'aide de la **programmation linéaire**

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \varepsilon \\ \text{t.q.} & PN = M(q) \\ & P\nu \leq \varepsilon\mu \end{array}$$

Maximisation de la taille de l'ellipsoïde inscrit, à l'aide de la **programmation semi-définie**

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \text{trace}\,\Pi \\ \text{t.q.} & \begin{bmatrix} \Pi & M_i'(q) \\ M_i(q) & \mu_i^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \ldots \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \lambda \\ \text{t.q.} & \lambda I \succeq \Pi \\ & \begin{bmatrix} \Pi & M_i'(q) \\ M_i(q) & \mu_i^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \ldots \end{array}$$

EXEMPLE

Système MIMO

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \xi_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ z_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_k \end{aligned}$$

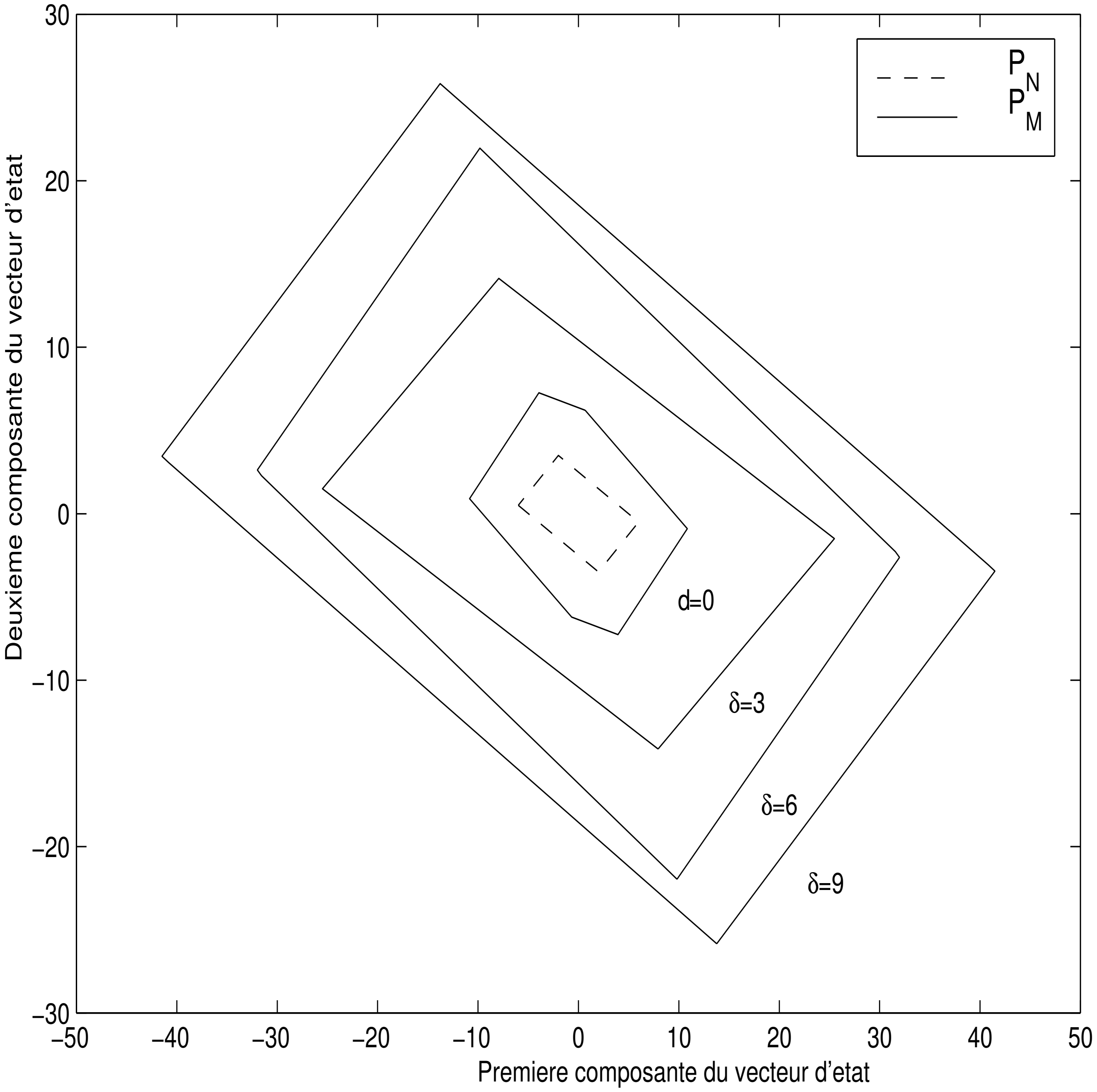
Commande contrainte

$$-7 \leq u_k \leq 7$$

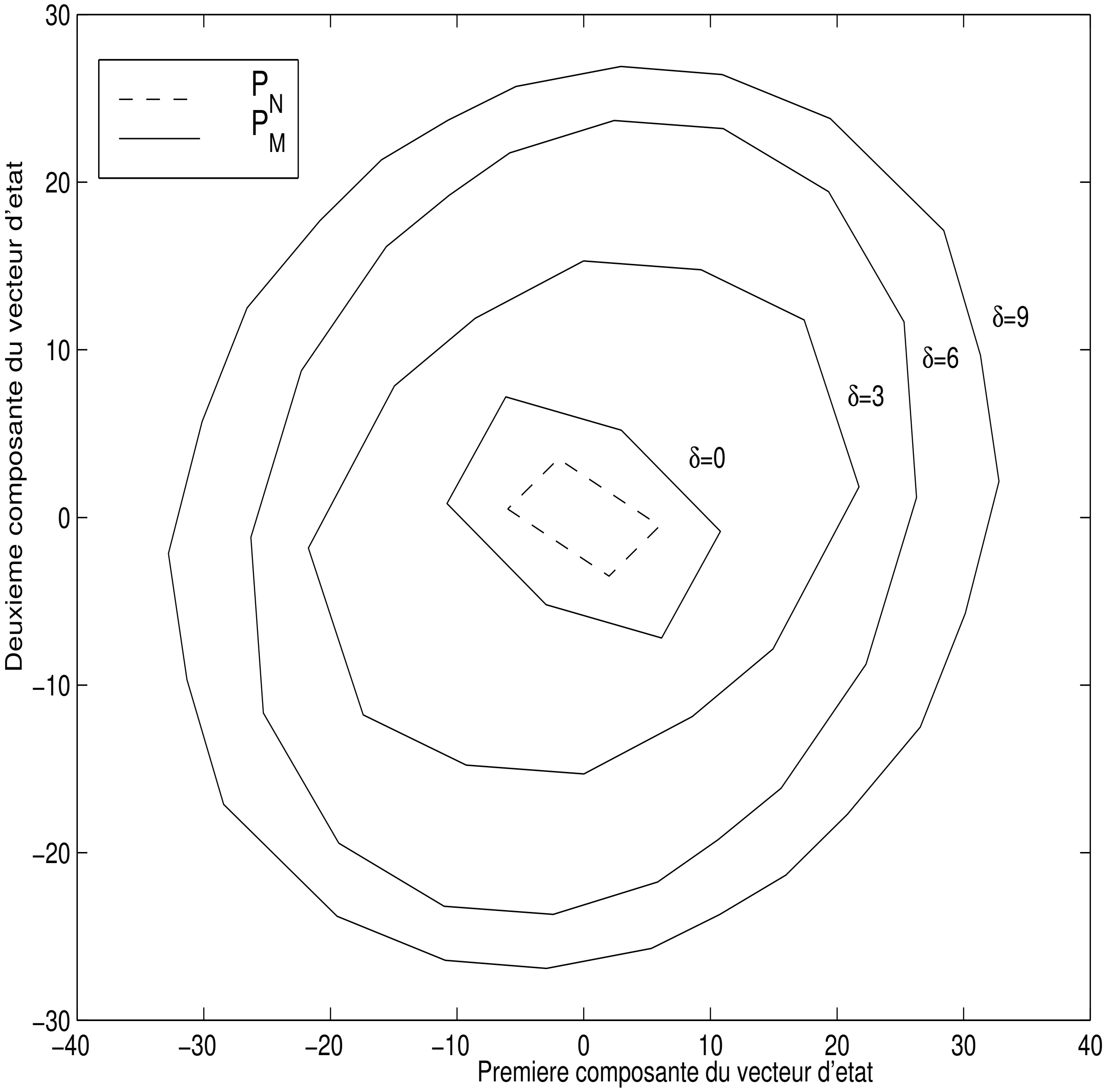
Polyèdre positivement invariant par retour d'état

$$\mathcal{P}_N = \{\xi : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -1.5 & 2 \\ 1.5 & -2 \end{bmatrix}}_{N} \xi \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\nu} \}$$

Nous illustrons les algorithmes de maximisation de polyèdre homothétique et de maximisation d'ellipsoïde inscrit



Polyèdres homothétiques : $\mathcal{P}_M$ pour valeurs successives de δ, le degré de $Q(d)$



Ellipsoïdes inscrits : $\mathcal{P}_M$ pour valeurs successives de δ, le degré de $Q(d)$

CONCLUSION

L'augmentation du **degré** de $Q(d)$ permet d'augmenter la **taille** du domaine de conditions initiales stabilisables (compromis)

Le degré du paramètre $Q(d)$, donc l'ordre du compensateur, doit être **fixé** afin d'obtenir des problèmes à dimension finie

3. PROBLEME DE SYNTHESE
CONCLUSION

Trois approches présentées

- commande saturante

- commande contrainte LPM

- commande contrainte polynomiale

De nombreux tests numériques ne nous ont pas permis de conclure quant à la superiorité d'une approche

Les deux premières approches donnent un compensateur d'ordre maîtrisé, pas la troisième

Les techniques LMI donnent des résultats généralement meilleurs que les techniques ARE, au prix d'une plus grande complexité de calcul

PLAN

1. Introduction

2. Problème d'analyse

3. Problème de synthèse

   3.1. Commande saturante

   3.2. Commande linéaire par morceaux

   3.3. Commande polynomiale

4. Conclusion

4. CONCLUSION

Plusieurs approches au problèmes d'analyse et de synthèse pous les systèmes linéaires incertains à commande contrainte

La première approche (commande saturante) permet d'étudier à la fois le problème d'analyse et le problème de synthèse

Les deux dernières approches (commande linéaire par morceaux, commande polynomiale) sont exclusivement des outils de synthèse

Approches **unifiées** par l'utilisation systématique d'outils numériques et géométriques classiques : AREs, LMIs, polyèdres et ellipsoïdes, matrices polynomiales

EXTENSIONS

Application de nouvelles méthodes de **relaxation** aux problèmes non-convexes de commande robuste et contrainte

Retour de **sortie** pour commande LPM

Approche polynomiale pour systèmes **incertains**

Autres types de **fonctions de Lyapunov**, domaine de stabilité non-convexes

Autres modélisations des **saturations**