Numéro d'ordre : 529 **Année : 1999**

Thèse

Préparée au
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

en vue de l'obtention du titre de
Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

Specialité : **Automatique et Informatique Industrielle**

par

Didier HENRION

Ingénieur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES INCERTAINS À COMMANDE CONTRAINTE

Soutenue le 12 octobre 1999 devant le jury :

Président	C.	BURGAT
Rapporteurs	L.	DUGARD
	M.	MALABRE
Examinateurs	J.	BERNUSSOU
	V.	KUČERA
	B.	PRADIN
Directeur de thèse	S.	TARBOURIECH

Rapport LAAS Numéro 99449

A mes parents et à ma douce Jana.

I'm worried that sometimes what I'm doing sounds like just academic exercises, and I'm trying more and more to make it sound prettier.

John Coltrane, cité par Nat Hentoff, 1960.

Robert Reisner has told of an occasion when Bud Powell received a visitor in the hospital. He had drawn the piano keys on the wall, and banging his fingers against the drawing, asked his guest "Listen, what do you think of these chords ?"

Rapporté par Gary Giddins, 1987.

Avant-Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du CNRS. Je remercie M. Jean-Claude Laprie, directeur du LAAS, pour m'avoir accueilli dans ce laboratoire et pour avoir mis à ma disposition les ressources nécessaires à l'aboutissement de ce travail. Je remercie également M. Jacques Bernussou, directeur de recherche au CNRS, pour m'avoir accueilli au sein de son groupe.

J'exprime ma reconnaissance envers M. Luc Dugard, directeur de recherche du CNRS au Laboratoire d'Automatique de Grenoble, et M. Michel Malabre, directeur de recherche du CNRS à l'Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Ces remerciements s'adressent aussi à MM. Jacques Bernussou, directeur de recherche au CNRS, Christian Burgat, professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, Vladimír Kučera, professeur à l'Université Technique Tchèque de Prague, ainsi qu'à M. Bernard Pradin, professeur à l'INSA de Toulouse, qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.

Je voudrais tout particulièrement remercier Mlle. Sophie Tarbouriech, chargée de recherche au CNRS, pour le soutien constant qu'elle a pu m'apporter, pour sa disponibilité, sa gentillesse, son ouverture d'esprit et son sérieux.

Je suis également reconnaissant à MM. Bernard Pradin et Germain Garcia, professeurs à l'INSA de Toulouse. Mon intérêt pour l'automatique puise toute son origine dans la qualité et le sérieux de leurs enseignements.

J'exprime ma profonde gratitude à M. Vladimír Kučera, professeur à l'Université Technique Tchèque de Prague, ainsi qu'à M. Michael Šebek, directeur de recherche à l'Académie Tchèque des Sciences de Prague. J'ai eu la chance de bénéficier de leur expertise scientifique mais également de leur soutien moral permanent.

Finalement, je remercie sincèrement toutes les personnes du LAAS qui ont su et pu me supporter durant toutes ces années, et plus particulièrement Jamal Daafouz, Olivier Bachelier, Denis Arzelier, Isabelle Queinnec, Dimitry Peaucelle, Christian Courties et Régis Bertrand.

Table des matières

Introduction Générale

De nombreux progrès ont été accomplis récemment dans le domaine de l'automatique des systèmes linéaires. Depuis la fin des années soixante-dix, de gros efforts ont été entrepris afin que les méthodes de commande prennent en compte d'éventuelles *incertitudes* affectant les modèles des systèmes étudiés. Ces incertitudes proviennent essentiellement d'erreurs ou d'approximations de modélisation, de variations de paramètres, de problèmes de précision numérique ou encore de dynamiques rapides négligées. Nous mentionnons ici une anectode de H. S. Black [15] illustrant ceci : "... toutes les heures et ceci vingt-quatre heures sur vingt-quatre, quelqu'un devait régler le courant du filament à sa valeur correcte. Ceci faisant, on tolérait une variation de plus ou moins 0.5 à 1 dB sur le gain d'amplification, bien que j'eus souhaité que ce gain soit absolument parfait. De plus, toutes les six heures il était nécessaire de régler la tension d'alimentation, sinon le gain d'amplification échappait à tout contrôle. Il y avait également d'autres complications...". Tous ces phénomènes induisent un écart parfois considérable entre le comportement réel d'un système et son modèle simulé numériquement. Afin d'éviter ces écarts indésirables, plusieurs techniques ont été mises en oeuvre et regroupées sous l'étiquette de commande robuste [124, 25]. Le système de commande mentionné ci-dessus par Black n'était manifestement pas robuste. L'abondante littérature sur la commande robuste permet d'attester de l'importance considérable qu'a acquis cette thématique ces dernières années. On distingue généralement deux classes de méthodes de commande robuste. La première regroupe les méthodes dites fréquentielles, où l'incertitude est non-structurée, c'est-à-dire qu'aucune information n'est disponible sur la façon dont elle affecte le modèle. Dans cette classe nous pouvons par exemple inclure la commande LQG/LTR, l'approche $\mathcal{H}_\infty$ on encore l'optimisation $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [124]. Une deuxième classe de méthodes de commande robuste est constituée par les approches dites temporelles, où l'incertitude est structurée, c'est-à-dire qu'elle est supposée affecter le modèle suivant une représentation particulière. Ces méthodes temporelles peuvent faire appel à la théorie de Lyapunov comme par exemple l'approche quadratique [25], ou encore aux ramifications du théorème de Kharitonov [9, 13].

Parallèlement au développement de la commande robuste, la prise en compte des *contraintes sur la commande* et donc de saturations lors de la synthèse de lois de commande fait l'objet d'un regain d'intérêt depuis une dizaine d'années environ. Pour des raisons physiques, technologiques, ou de sécurité, tout système physique est soumis à des limitations de fonctionnement qui se modélisent par des contraintes d'amplitude sur les actionneurs et les capteurs. La mise en oeuvre de lois de commande conçues sans prendre en compte ces limitations peut avoir des conséquences fâcheuses pour le système. L'application de perturbations non prévues ou de changements impromptus de consigne peuvent amener les actionneurs en saturation. Le système peut alors évoluer vers un mode de fonctionnement non souhaité avec le risque de ne pas pouvoir revenir à son mode de fonctionnement normal. Un exemple classique des effets catastrophiques pouvant être engendrés en négligeant les contraintes est celui de la centrale nucléaire de Tchernobyl en 1986, mentionné dans [101]. Une des causes du désastre fut attribuée aux limitations sur la vitesse à laquelle les barres de contrôle pouvaient être placées et retirées du noyau du réacteur nucléaire. Quand la réaction s'accéléra, la loi de commande essaya de placer les barres dans le noyau aussi vite que possible pour ralentir la réaction. Cependant, à cause de la limitation de vitesse sur le mouvement des barres de contrôle, l'action de la loi de commande ne fut pas assez rapide, ce qui mena à une réaction en chaîne incontrôlée. D'autres exemples de limitations physiques de ce genre sont omniprésentes dans l'industrie : des vannes qui présentent une ouverture maximale et une ouverture minimale, des amplificateurs électroniques qui doivent opérer dans des frontières d'alimentation en tension, des actionneurs de chauffage ou de refroidissement dont la puissance fournie ou retirée du système ne peut pas dépasser certaines limites, des convertisseurs de puissance électriques qui ne peuvent actionner des machines que dans les limites de puissance pour lesquelles ils ont été conçus, des contraintes sur le couple moteur et la vitesse des machines électriques. Ces problèmes inévitables de saturations ont attiré l'attention de nombreux automaticiens durant ces dernières années [11, 109].

Les outils développés en commande robuste et contrainte ont un intérêt certain car ils sont applicables facilement. En tant que science de l'ingénieur, l'automatique bénéficie régulièrement de nombreuses avancées théoriques, mais également de progrès techniques considérables. Afin d'illustrer cette étroite collaboration entre théorie et pratique, nous pouvons citer l'exemple classique de la résolution de l'équation algébrique de Riccati par les techniques numériquement stables d'algèbre linéaire [75], ou encore l'exemple plus récent des inégalités matricielles linéaires dont la résolution repose sur des méthodes d'optimisation convexe [19]. Avec l'avènement d'*outils numériques puissants et fiables*, de nombreux problèmes d'automatique réputés complexes sont maintenant résolus en l'espace de quelques secondes.

Le travail présenté dans ce mémoire a pour objectif l'utilisation d'*outils numériques puissants et fiables* afin d'étudier les systèmes linéaires *incertains* en présence de *contraintes* sur la commande. En effet, si les techniques de commande des systèmes incertains et des systèmes contraints mentionnées ci-dessus s'avèrent à présent relativement bien développées, il n'existe jusqu'à maintenant qu'un nombre très restreint de travaux combinant les deux approches, ceci en dépit de l'omniprésence des incertitudes et des contraintes dans les systèmes physiques. L'objectif principal de cette thèse est de combler partiellement ces lacunes.

Le mémoire est organisé en trois parties brièvement décrites ci-dessous.

Dans une première partie, le chapitre 1 est dédié aux modèles mathématiques utilisés dans le mémoire pour représenter les *systèmes* linéaires dynamiques. Nous mentionnons les différents types d'incertitudes que nous avons plus particulièrement étudiés et qui peuvent affecter ces systèmes. Nous décrivons également les différents modèles de saturations sur la commande. Nous rappelons la notion classique de stabilité asymptotique et ses extensions aux systèmes incertains. Nous insistons particulièrement sur la stabilité quadratique, qui sera l'une des composantes essentielles des techniques exposées dans ce mémoire. Finalement, nous rappelons à l'aide d'un simple exemple la distinction fondamentale que nous faisons entre les problèmes d'analyse et de synthèse. Le chapitre 2 rappelle ensuite les principaux *outils* numériques sur lesquels sont basées toutes les techniques de ce mémoires. Nous mentionnons successivement les équations algébriques de Riccati, les inégalités matricielles linéaires, les propriétés géométriques des polyèdres et ellipsoïdes, et enfin les matrices polynomiales.

Dans la deuxième partie, constituée du seul chapitre 3, nous étudions le problème d'*analyse* de stabilité d'un système incertain et contraint. Nous désirons déterminer des régions de stabilité pour le système incertain en boucle fermée avec des commandes saturantes. Nous étudions ce problème dans le cas des systèmes incertains à temps continu, à l'aide de la notion de stabilité quadratique.

Dans la troisième partie, nous étudions le problème de *synthèse* d'une loi de commande prenant en compte, a priori, les contraintes ou saturations des commandes. Dans le chapitre 4, nous étudions ce problème dans le cas des systèmes incertains à temps continu. Nous autorisons explicitement les saturations et nous utilisons la notion de stabilité quadratique. Dans le chapitre 5, nous étudions également le problème de synthèse dans le cas des systèmes incertains à temps continu, mais cette fois-ci en interdisant les saturations sur la commande. Afin d'assurer une certaine performance en boucle fermée, nous proposons une commande linéaire par morceaux basée sur les techniques de commande à coût garanti. Finalement, dans le chapitre 6, nous étudions le problème de synthèse dans le cas des systèmes à temps discret en l'absence d'incertitudes et en interdisant les saturations sur la commande. Nous utilisons les techniques de commande polynomiale et mentionnons comment nos travaux peuvent être étendus aux systèmes incertains.

Première partie

Préliminaires

Chapitre 1

Systèmes

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions fondamentales de l'automatique liées aux systèmes linéaires dynamiques.

Tout d'abord, nous décrivons dans la section 1.2 les objets mathématiques que nous utilisons pour modéliser ces systèmes, à savoir l'approche par matrice de transfert et l'approche par équations d'état. Etant donné que ce mémoire est basé sur l'étude des systèmes incertains soumis à des limitations en amplitude sur le signal de commande, nous décrivons d'une part les principales incertitudes qui nous intéressent, et d'autre part la façon dont nous prendrons en compte par la suite les contraintes sur la commande, à savoir en autorisant la saturation de la commande. Dans ce sens, nous exprimons les représentations du système saturé que nous avons retenues pour mener à bien notre étude.

Après avoir défini les systèmes que nous souhaitons étudier, nous détaillons dans la section 1.3 les concepts dont nous avons besoin : la seconde méthode de Lyapunov et la stabilisabilité quadratique. Notre objectif étant la stabilisation locale des systèmes incertains et saturés, nous définissons la notion de région de stabilité locale. Nous terminons ce chapitre en présentant dans la section 1.4 les deux principaux problèmes pour lesquels nous apporterons des solutions dans la suite de ce mémoire, à savoir les problèmes d'analyse et de synthèse.

Ce chapitre n'est nullement exhaustif. Il constitue uniquement une introduction informelle aux concepts de base utilisés dans ce mémoire. Un lecteur familier de l'automatique pourra aisément s'affranchir de sa lecture.

1.2 Modèles

Afin d'étudier plus facilement les propriétés des systèmes dynamiques, nous faisons appel à un certain nombre d'objets mathématiques permettant de modéliser leur comportement. Dans cette section, nous rappelons brièvement les modèles couramment utilisés.

1.2.1 Systèmes Linéaires

La première étape lors de la conception d'un système automatisé est la modélisation. Il est très important d'obtenir une représentation mathématique reproduisant aussi convenablement que possible le comportement du système à commander.

La classe des systèmes abordée dans ce mémoire est celle des systèmes linéaires, de dimension finie, déterministes et multivariables. Cette classe de systèmes, qui semble très restreinte a priori, permet en fait d'étudier un grand nombre de systèmes rencontrés en pratique. Elle représente un compromis entre la complexité de modélisation du système et la simplicité de la conception de la commande. En particulier, de nombreuses techniques de linéarisation et d'identification fournissent des modèles linéaires simplifiés qui permettent d'obtenir des résultats pratiques tout à fait satisfaisants.

Nous étudions indifféremment les systèmes à temps continu ou à temps discret, avec une préférence pour la représentation qui simplifie le développement et la présentation des résultats. Soulignons que tous les résultats de ce mémoire concernant les systèmes continus peuvent être étendus aux systèmes discrets et vice versa.

Dans la plupart des cas, on peut décrire le comportement d'un système dynamique linéaire de deux façons distinctes : l'une dite fréquentielle, basée sur la notion de matrice de transfert, et l'autre temporelle, basée sur la notion de représentation d'état. Nous rappelons brièvement ces deux concepts. On pourra consulter l'ouvrage fondamental [64] pour une étude complète et rigoureuse.

Matrice de transfert

Il s'agit de représenter les relations existant entre les signaux d'entrée et de sortie du système à l'aide de leur transformée de Laplace. Historiquement, cette approche est la plus ancienne. Elle trouve son origine en électronique et notamment dans les travaux de Bode dans les années 1940-1950, dans le cas monovariable. Son extension au cas multivariable date de la fin des années 1970.

Si l'on dénote la variable de Laplace par s, et les transformées de Laplace des signaux d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ du système par $u(s)$ et $y(s)$ respectivement, la représentation mathématique dans le domaine fréquentiel du système s'écrit

$$y(s) = G(s)u(s)$$

où $G(s)$ est la *matrice de transfert*. La matrice $G(s)$ est une matrice rationnelle, c'est-à-dire que ses composantes sont des fractions de polynômes en s. Notons que traditionnellement la notation s est réservée pour les systèmes à temps continu. Pour les systèmes à temps discret, l'équivalent de la variable de Laplace est l'opérateur d'avance temporelle. Nous noterons son inverse, c'est-à-dire l'opérateur de retard, par d.

Il existe plusieurs façons de représenter la matrice $G(s)$. Par exemple, on peut exprimer chaque élément de $G(s)$ comme un rapport entre un polynôme numérateur et un polynôme dénominateur. Une autre possibilité consiste à calculer le plus petit commun multiple de tous les polynômes dénominateurs de $G(s)$, que nous noterons par $p(s)$. La matrice $G(s)$ peut alors s'écrire

$$G(s) = \frac{N(s)}{p(s)}$$

où $N(s)$ est une matrice polynomiale, c'est-à-dire que ses composantes sont des polynômes en s. Une troisième représentation pour $G(s)$ consiste à utiliser des *fractions de matrices polynomiales*. Nous pouvons alors écrire

$$G(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

où $N_R(s)$, $N_L(s)$, $D_R(s)$ et $D_L(s)$ sont des matrices polynomiales avec $D_R(s)$ et $D_L(s)$ carrées inversibles. Le couple $N_R(s), D_R(s)$ est une fraction de matrices polynomiales à droite. Le couple $N_L(s), D_L(s)$ est une fraction de matrices polynomiales à gauche. En particulier, nous avons

$$p(s) = \det D_R(s) = \det D_L(s).$$

A la notion de matrice polynomiale nous associons celle de *zéro*. Un zéro d'une matrice polynomiale $A(s)$ est une valeur de s pour laquelle la matrice $A(s)$ perd son rang normal. Les zéros du polynôme $p(s)$, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles le polynôme s'annule, sont les *pôles* du système. Ce sont également les zéros des matrices polynomiales $D_R(s)$ et $D_L(s)$. Les pôles permettent de conclure quant à la stabilité du système, comme nous le verrons dans la section 1.3.

Avec l'approche par matrice de transfert, *les problèmes de commande reviennent à étudier les propriétés algébriques des matrices polynomiales et de leurs zéros.*

Représentation d'état

Dans les années 1960, un autre type de modèle est introduit pour les systèmes linéaires invariants. Il s'agit de décrire la dynamique du système de manière interne à partir de l'évolution d'un *vecteur d'état* x représentatif des grandeurs intervenant dans le système. Cette représentation se fait au travers d'une équation différentielle du premier ordre

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

pour les systèmes à temps continu, et au travers d'une équation aux différences du premier ordre

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned}$$

pour les systèmes à temps discret. x est le vecteur d'état, u est le vecteur d'entrée ou de commande et y est le vecteur de sortie ou d'observation. Afin de simplifier les notations, nous supprimons dès que possible la dépendance des vecteurs x, u, y en la variable temporelle t ou en l'indice k. On appelle A la matrice d'état ou matrice dynamique, B la matrice d'entrée ou de commande, C la matrice de sortie ou d'observation et D la matrice de transmission directe.

A partir d'une représentation d'état, nous pouvons retrouver la matrice de transfert de la façon suivante

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Les différentes techniques pour passer d'une représentation à l'autre sont énumérées et étudiées dans [64]. Il est alors facile de voir que les pôles du système sont en fait les zéros du faisceau polynomial $sI - A$, c'est-à-dire les zéros du polynôme $\det(sI - A)$. Ces valeurs sont également appelées les valeurs propres de la matrice réelle A.

Avec l'approche par représentation d'état, *les problèmes de commande reviennent à étudier les propriétés algébriques des matrices réelles et de leurs valeurs propres.*

1.2.2 Incertitudes

Les modèles mathématiques étudiés dans le paragraphe 1.2.1 ne sont que des approximations du comportement du système dans des situations de fonctionnement particulières. En pratique, il existe de nombreuses *incertitudes* affectant le système physique et donc son modèle. Elles peuvent être dues à une connaissance imparfaite des valeurs numériques des paramètres du modèle, à des approximations faites lors de la modélisation ou à la présence de certains phénomènes dynamiques dont la modélisation n'a pas tenu compte. On distingue d'une façon très générale des incertitudes structurées, affectant les éléments du modèle d'une manière bien déterminée, et des incertitudes non-structurées pour lesquelles seule une majoration des effets sur le modèle est disponible. Dans ce mémoire, nous nous intéressons uniquement aux incertitudes non-structurées, dont voici un bref tour d'horizon.

Incertitudes sur la matrice de transfert

Dans le domaine fréquentiel, les incertitudes non-structurées sur la matrice de transfert $G(s)$ peuvent être de type *additif*

$$G(s) + \Delta_G(s)$$

ou de type *multiplicatif*

$$G(s)[I + \Delta_G(s)]$$

où $\Delta_G(s)$ est une matrice rationnelle. Seule une borne supérieure sur une norme de $\Delta_G(s)$ est donnée. La norme la plus souvent utilisée est la norme infinie, définie comme

$$\|\Delta_G(s)\|_\infty = \sup_{w \geq 0} \sqrt{\overline{\lambda}[G'(jw)G(jw)]}$$

où $\overline{\lambda}$ représente la valeur propre maximale d'une matrice. Il existe plusieurs autres types d'incertitudes multiplicatives, introduites dans [28] et [29]. Nous ne les étudierons pas dans ce mémoire.

Incertitudes sur la représentation d'état

Dans la représentation par espace d'état, nous supposons que les matrices incertaines du modèle d'état appartiennent à des ensembles compacts. Considérant une matrice incertaine A et l'ensemble compact $\mathcal{A}$, nous pouvons distinguer

- Les incertitudes *bornées en norme*, avec

  $$\mathcal{A} = \{A_0 + DF(t)E,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\}$$

  pour une matrice nominale A_0 et des matrices constantes D, E données. $\|F\|_2$ représente la norme Euclidienne induite, c'est-à-dire $\|F\|_2 = \overline{\lambda}(F'F)$.
- Les incertitudes *polytopiques*, avec

  $$\mathcal{A} = \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{n_A}\}.$$

  où Co représente l'enveloppe convexe et $A_1, \ldots, A_{n_A}$ une série de matrices constantes données.

Il existe plusieurs autres types d'incertitudes non-structurées dans l'espace d'état, voir [25] pour un survol récent et exhaustif. Cependant, dans ce mémoire, nous nous limiterons aux types d'incertitudes définis ci-dessus.

1.2.3 Saturations

La présence de limitations en amplitude, et donc de possibles *saturations* sur les différents signaux intervenant dans tout système physique, est inévitable. Il est donc nécessaire de définir les modèles mathématiques adéquats pour représenter ces saturations.

Fonction de saturation

Les saturations pouvant affecter les états ou les commandes d'un système sont des phénomènes non-linéaires par essence. Une fonction de saturation associe à un vecteur de commande u de m composantes un vecteur de commande saturée

$$\mathrm{sat}(u) = \begin{bmatrix} \mathrm{sat}(u_1) \\ \vdots \\ \mathrm{sat}(u_m) \end{bmatrix}$$

comprenant également m composantes qui sont des fonctions monovariables non-linéaires définies comme suit

$$\mathrm{sat}(u_i) = \begin{cases} \overline{u}_i & \text{si} \quad u_i > \overline{u}_i \\ u_i & \text{si} \quad -\underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \\ -\underline{u}_i & \text{si} \quad u_i < -\underline{u}_i \end{cases}$$

où $\overline{u}_i$ et $\underline{u}_i$ sont des scalaires positifs donnés. La fonction saturation est donc décentralisée, c'est-à-dire que chaque composante $\mathrm{sat}(u_i)$ ne dépend que de la composante i de u, et sans mémoire puisque $\mathrm{sat}(u)$ ne dépend que de la valeur instantanée de u.

Commande saturante et commande contrainte

Tout au long de ce mémoire nous faisons la distinction entre commande saturante et commande contrainte [106]. Les différences existant entre ces deux notions ne sont pas toujours bien comprises. Nous allons essayer de les souligner en prenant par exemple un système linéaire continu similaire à celui défini dans la section 1.2

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

que nous supposons commandé par retour d'état

$$u = Kx$$

où K est une matrice de retour d'état donnée. Si aucune contrainte d'amplitude n'affecte les états et/ou la commande, le système en boucle fermée prend la forme classique

$$\dot{x} = (A + BK)x. \tag{1.1}$$

La stabilité de ce système est alors caractérisée de façon classique par les valeurs propres de la matrice $A + BK$, comme nous le verrons dans la section 1.3.

Supposons maintenant que chaque composante u_i de la commande u est soumise à des contraintes d'amplitude

$$-\underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i$$

où $\underline{u}_i, \overline{u}_i$ sont des scalaires positifs donnés. La loi de commande effectivement appliquée au système en boucle ouverte est alors

$$u = \mathrm{sat}(Kx) = \mathrm{sat}\begin{bmatrix} K_1 x \\ \vdots \\ K_m x \end{bmatrix}$$

et le système en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x} = Ax + B\mathrm{sat}(Kx). \tag{1.2}$$

La nature non-linéaire de la fonction de saturation implique que le système (1.2) est non-linéaire. Si nous définissons la région de linéarité de ce système comme l'ensemble des états pour lesquels les commandes ne sont pas saturées, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{x : -\underline{u}_i \leq K_i x \leq \overline{u}_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

alors nous pouvons dire que le système non-linéaire (1.2) admet localement dans cette région le modèle linéaire (1.1). Nous verrons dans le paragraphe 1.3.3 que la notion de modèle local est étroitement liée à celle de stabilité locale et d'ensemble d'attraction.

Nous pouvons alors distinguer deux cas de figure [106]

- La loi de commande est conçue de telle sorte que l'état du système ne quitte jamais la région de linéarité. Par conséquent la commande du système ne sature jamais et le modèle linéaire (1.1) reste valide localement pour le système (1.2). On parle alors de loi de *commande contrainte*. Voir par exemple [118, 10, 47, 24, 121, 99, 17] pour différentes études de stabilité de systèmes à loi de commande contrainte.
- La loi de commande n'est pas conçue de telle sorte que l'état du système reste dans la région de linéarité, donc la commande du système peut saturer et seul le modèle non-linéaire (1.2) est valide. On parle alors de loi de *commande saturante*. Voir par exemple [26, 76, 67, 69, 94] pour différentes études de stabilité de systèmes à loi de commande saturée.

Cette distinction peut paraître artificielle de prime abord, mais nous allons voir par la suite qu'elle s'avère fondamentale.

Modèle polytopique des saturations

L'effet des saturations sur un système peut se modéliser de plusieurs manières différentes. Une première possibilité consiste à représenter le système saturé à l'aide d'un *modèle polytopique*. C'est l'approche que nous allons utiliser pour développer la plupart des résultats de ce mémoire. Elle est basée sur l'utilisation des inclusions différentielles [6] et a originalement été proposée dans [83].

Dans le cas du retour d'état saturé considéré au paragraphe précédent, on peut réécrire de manière équivalente chaque composante de saturation comme

$$\mathrm{sat}(K_i x) = g_i(x) K_i x$$

avec

$$g_i(x) = \begin{cases} \overline{u}_i/K_i x & \text{si} \quad K_i x > \overline{u}_i \\ 1 & \text{si} \quad -\underline{u}_i \le K_i x \le \overline{u}_i \\ -\underline{u}_i/K_i x & \text{si} \quad K_i x < -\underline{u}_i \end{cases}$$

et donc par définition

$$0 < g_i(x) \le 1$$

pour tout $i = 1, \ldots, m$. Le système non-linéaire en boucle fermée (1.2) peut alors s'écrire

$$\dot{x} = (A + BG(x)K)x \tag{1.3}$$

où $G(x)$ est une matrice diagonale ayant pour composantes les scalaires $g_i(x)$ définis ci-dessus.

En supposant que l'état du système reste dans un ensemble compact $\mathcal{E}$ incluant l'origine, nous pouvons définir une borne minimale pour chaque composante $g_i(x)$, notée

$$\underline{g}_i = \min\{g_i(x) : x \in \mathcal{E}\}$$

et qui satisfait également

$$0 < \underline{g}_i \le 1$$

pour tout $i = 1, \ldots, m$. Nous pouvons alors définir 2^m matrices diagonales $\underline{G}_k$ pour $k = 1, \ldots, 2^m$ dont chaque composante prend la valeur 1 ou $\underline{g}_i$ pour $i = 1, \ldots, m$. Par exemple pour $m = 2$ nous construisons les 4 matrices

$$\underline{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{G}_2 = \begin{bmatrix} \underline{g}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \underline{g}_2 \end{bmatrix} \quad \underline{G}_4 = \begin{bmatrix} \underline{g}_1 & 0 \\ 0 & \underline{g}_2 \end{bmatrix}.$$

En utilisant les résultats classiques d'inclusions différentielles, les trajectoires du système saturé (1.3) peuvent alors être représentées par les trajectoires du système polytopique

$$\dot{x} = \underline{A}(t)x \tag{1.4}$$

où la matrice $\underline{A}$ appartient à un polytope de matrices ayant pour sommets les matrices

$$A + B\underline{G}_k K$$

pour $k = 1, \ldots, 2^m$. Il s'agit donc du même type de modèle polytopique que celui utilisé dans le paragraphe 1.2.2 pour modéliser les incertitudes non-structurées.

Il est important d'insister sur le fait que le système polytopique (1.4) ne représente le système saturé (1.2) que dans la région de l'espace d'état où $0 < \underline{g}_i \le g_i(x) \le 1$ pour $i = 1, \ldots, m$. Par définition, cette région contient l'ensemble compact $\mathcal{E}$. Néanmoins, pour pouvoir utiliser le modèle polytopique (1.4) afin de conclure quant à la stabilité du système saturé (1.2), il faut être capable de garantir que toutes les trajectoires initialisées dans $\mathcal{E}$ y restent. Nous verrons dans le paragraphe 1.3.1 comment garantir cette propriété.

Autres modèles des saturations

Outre le modèle polytopique étudié dans le paragraphe précédent, il existe d'autres manières de modéliser les saturations. Nous les mentionnons brièvement, mais nous ne les utiliserons pas dans ce mémoire.

Une première approche consiste à considérer la saturation comme une non-linéarité de secteur. La stabilité d'un système linéaire à commande saturante peut être étudiée à l'aide de résultats de stabilité absolue. Nous pouvons alors utiliser les deux critères classiques de stabilité que sont le critère du cercle et le critère de Popov [65]. Cette approche est développée en détail dans [90].

Une deuxième approche consiste à diviser l'espace d'état en régions de saturations. Dans ces régions, le système non-linéaire saturé devient un système linéaire autonome lorsque la commande ne sature pas, c'est-à-dire dans la région de linéarité, et un système linéaire non-autonome, ou système affine, lorsque la commande sature. Cette description donne un modèle exact du système saturé dans l'espace d'état, par opposition aux descriptions polytopique ou par secteur, qui ne donnent qu'un modèle approché. Cependant, elle implique généralement une complexité algorithmique très importante lorsque l'on veut l'utiliser pour étudier la stabilité du système saturé. Cette approche est développée en détail dans [40].

1.3 Stabilité

La *stabilité* est la propriété fondamentale que doivent impérativement vérifier les systèmes décrits dans les paragraphes précédents. D'une manière très qualitative et intuitive, la stabilité d'un système est la capacité de ce dernier à revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il en est ponctuellement écarté. Le but de cette section est de préciser cette notion de stabilité et d'introduire les objets mathématiques associés.

1.3.1 Stabilité Classique

Dans le cas des systèmes linéaires invariants étudiés au paragraphe 1.2.1, la propriété de stabilité peut être testée en vérifiant la localisation des pôles de la matrice de transfert $G(s)$, ou de façon équivalente, des valeurs propres de la matrice A, dans une certaine région du plan complexe. Pour les systèmes continus, cette région est le demi-plan complexe gauche ouvert. Pour les systèmes discrets, il s'agit du disque unitaire ouvert, centré en 0 et de rayon 1. D'autres régions plus complexes peuvent également être considérées pour assurer une certaine performance du système. Il existe différents critères algébriques permettant de tester cette localisation des pôles, comme le critère de Routh-Hurwitz ou le critère de Schur-Cohn [64].

Stabilité au sens de Lyapunov

Dans ce mémoire nous étudions la stabilité plus particulièrement grâce à la *méthode de Lyapunov*, proposée en 1892 dans le cadre de l'étude de la stabilité des systèmes mécaniques. Il s'agit de construire une fonction $V(x)$ de l'état x du système telle que les signes de cette fonction et de sa dérivée temporelle dans un certain voisinage du point d'équilibre donnent une information sur la stabilité du système.

La théorie de stabilité de Lyapunov fait appel à de nombreux concepts que nous ne rappelerons pas. On pourra par exemple trouver les définitions mathématiques rigoureuses de point d'équilibre et de stabilité asymptotique globale dans [65]. Le principal résultat issu de l'approche de Lyapunov affirme que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système dynamique autonome à temps continu $\dot{x} = f(x)$ s'il existe une fonction $V(x)$ positive telle que sa dérivée est négative pour tout x non nul et telle que $V(0) = 0$ et $V(\infty) \to \infty$. Un résultat équivalent existe dans le cas des systèmes discrets mais par simplicité nous nous restreignons à l'étude du cas continu. Une fonction $V(x)$ satisfaisant les conditions ci-dessus est appelée *fonction de Lyapunov* du système dynamique.

La notion de fonction de Lyapunov est liée à celle de *région d'attraction de l'origine* [65, 106], définie comme étant le plus grand domaine dans l'espace d'état dans lequel toute trajectoire qui y commence converge vers l'origine. Si un système est globalement asymptotiquement stable, alors la région d'attraction de l'origine est tout l'espace d'état. En général, la détermination exacte et analytique de la région d'attraction de l'origine d'un système non-linéaire (comme par exemple le système à commande saturée étudié au paragraphe 1.2.3) est une tâche difficile, voire impossible [65]. La notion de stabilité locale, que nous allons décrire au paragraphe 1.3.3, permet alors de déterminer une approximation de la région d'attraction, c'est-à-dire une région de l'espace d'état où la convergence asymptotique des trajectoires vers l'origine est garantie.

Une classe de fonctions de Lyapunov qui jouent un rôle important et que l'on utilisera tout au long de ce mémoire est la classe des fonctions quadratiques de la forme

$$V(x) = x'Px.$$

Cette fonction est définie positive si P est une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres (réelles) sont positives. Nous écrivons alors $P = P' \succ 0$. Dans le cas du système linéaire autonome introduit dans le paragraphe 1.2.1

$$\dot{x} = Ax \tag{1.5}$$

une condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée

$$\dot{V}(x) = x'(A'P + PA)x$$

soit négative consiste à trouver une matrice $P = P' \succ 0$ telle que l'inégalité matricielle

$$A'P + PA \prec 0 \tag{1.6}$$

soit vérifiée. De façon équivalente, on peut choisir une matrice $Q = Q' \succ 0$ quelconque et résoudre l'équation matricielle

$$A'P + PA + Q = 0. \tag{1.7}$$

Nous reviendrons sur les propriétés algébriques et les méthodes de résolution de l'inégalité (1.6) et de l'équation (1.7) dans le chapitre 2.

Ces résultats peuvent être interprétés géométriquement. Supposons que $V(x)$ est une fonction de Lyapunov pour le système (1.5). La surface définie dans l'espace d'état par $\{x : V(x) = 1/r_0\}$ avec r_0 un scalaire positif est appelée surface de Lyapunov ou surface de niveau. La condition $\dot{V}(x) < 0$ implique que si $x(t_0)$ appartient à cette surface alors $x(t_1)$ pour $t_1 > t_0$ appartient à l'ensemble $\{x : V(x) < 1/r_0\}$. Autrement dit, la trajectoire du système évolue vers une surface de Lyapunov intérieure $\{x : V(x) = 1/r_1\}$ pour $r_1 > r_0$. Ainsi, à mesure que le temps progresse, la surface sur laquelle se trouve le vecteur d'état se contracte vers l'origine. Nous pouvons alors montrer [65] que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{x : x'Px \leq 1/r\}$$

pour $r > 0$ est un domaine *contractif* pour le système (1.5), c'est-à-dire que pour toute condition initiale choisie dans $\mathcal{E}$, la trajectoire du système reste confinée à l'intérieur de $\mathcal{E}$. Dans le chapitre 2, nous étudierons les propriétés géométriques de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Notons que les fonctions de Lyapunov ne sont pas nécessairement quadratiques. D'autres classes peuvent être définies, comme par exemple les fonctions de Lyapunov polyédrales [106, 40] ou les fonctions de type Lur'e avec un terme intégral additif [90]. Cependant, dans ce mémoire nous limiterons notre étude aux fonctions de Lyapunov quadratiques.

Stabilisabilité au sens de Lyapunov

Si maintenant nous considérons le système linéaire commandé introduit au paragraphe 1.2.1

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.8}$$

nous pouvons nous poser le problème de savoir s'il existe une commande par retour d'état

$$u = Kx$$

telle que le système en boucle fermée

$$\dot{x} = (A + BK)x \tag{1.9}$$

est stable au sens de Lyapunov. Si une telle commande existe, alors le système (1.8) est dit *stabilisable*.

En utilisant les résultats de stabilité de Lyapunov sur le système en boucle fermée (1.9), nous pouvons établir des conditions algébriques de stabilisabilité du système commandé

(1.8). Une condition nécessaire et suffisante est alors qu'il existe une matrice $P = P' \succ 0$ et un gain de retour d'état K tels que l'inégalité matricielle

$$(A + BK)'P + P(A + BK) \prec 0$$

soit vérifiée. Nous reviendrons sur les propriétés algébriques et les méthodes de résolution de cette inégalité dans le chapitre 2.

1.3.2 Stabilité Quadratique

La notion de *stabilité quadratique* est le prolongement de la notion de stabilité de Lyapunov lorsque l'on considère des systèmes incertains, les fonctions de Lyapunov retenues étant des fonctions quadratiques.

L'historique de la stabilité quadratique est retracée dans les mémoires [87, 5, 25] et donc nous nous contenterons de rappeler les résultats principaux, initialement publiés dans [8]. Nous considérons le système linéaire incertain

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.10}$$

où, comme au paragraphe 1.2.2, la matrice A est incertaine et appartient à un ensemble compact $\mathcal{A}$. Ce système est dit *stable quadratiquement* lorsqu'il existe une matrice $P = P' \succ 0$ telle que, quelle que soit la matrice A appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}$, nous avons

$$x'[A'(t)P + PA(t)]x < 0.$$

Par analogie avec les résultats du paragraphe 1.3.1, la fonction $V(x) = x'Px$ s'avère être une fonction de Lyapunov du système assurant la stabilité asymptotique de l'origine. Nous pouvons alors montrer [124] qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique du système incertain (1.10) est

- Dans le cas des incertitudes bornées en norme avec

  $$\mathcal{A} = \{A_0 + DF(t)E, \ \|F(t)\|_2 \leq 1\},$$

  qu'il existe une matrice $P = P' \succ 0$ telle que l'inégalité matricielle

  $$A_0'P + PA_0 + PDD'P + E'E \prec 0$$

  soit vérifiée, ou, de façon équivalente, qu'il existe une matrice $P = P' \succ 0$ et un scalaire $\epsilon > 0$ tels que l'équation matricielle

  $$A_0'P + PA_0 + \epsilon PDD'P + \frac{1}{\epsilon}E'E + Q = 0$$

  soit vérifiée pour une matrice $Q = Q' \succ 0$ arbitraire.
- Dans le cas des incertitudes polytopiques avec

  $$\mathcal{A} = \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{n_A}\},$$

  qu'il existe une matrice $P = P' \succ 0$ telle que l'inégalité matricielle

  $$A_i'P + PA_i \prec 0$$

  soit vérifiée pour tout $i = 1, \ldots, n_A$.

Nous reviendrons sur les propriétés algébriques et les méthodes de résolution de ces inégalités et équations matricielles dans le chapitre 2.

Notons que ces conditions sont uniquement suffisantes pour assurer la stabilité robuste du système incertain (1.10), c'est-à-dire sa stabilité pour toute incertitude admissible. De manière générale, la stabilité quadratique implique la stabilité robuste, mais l'inverse n'est pas vrai. La nature suffisante de la stabilité quadratique vient en particulier du fait que la matrice de Lyapunov est unique sur l'ensemble des incertitudes affectant le système.

Stabilisabilité Quadratique

Si maintenant nous considérons le système linéaire incertain commandé

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{1.11}$$

où, comme au paragraphe 1.2.2, les matrices A et B sont incertaines et appartiennent respectivement aux ensembles compacts $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, alors nous pouvons nous intéresser au problème de savoir s'il existe une commande par retour d'état

$$u = Kx$$

telle que le système incertain en boucle fermée

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)K)x \tag{1.12}$$

est quadratiquement stable. Si une telle commande existe, alors le système (1.11) est dit *quadratiquement stabilisable.*

Nous pouvons alors montrer [124] qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique du système incertain (1.11) est

– Dans le cas des incertitudes bornées en norme avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{A_0 + DF(t)E_1, \ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\ \mathcal{B} &= \{B_0 + DF(t)E_2, \ \|F(t)\|_2 \leq 1\}, \end{aligned}$$

qu'il existe une matrice $P = P' \succ 0$ et une matrice K telles que l'inégalité matricielle

$$(A_0 + B_0K)'P + P(A_0 + B_0K) + PDD'P + (E_1 + E_2K)'(E_1 + E_2K) \prec 0$$

soit vérifiée, ou, de façon équivalente, qu'il existe une matrice $P = P' \succ 0$, une matrice K et un scalaire $\epsilon > 0$ tels que l'égalité matricielle

$$\begin{aligned} &(A_0 + B_0K)'P + P(A_0 + B_0K) + \epsilon PDD'P \\ &\quad + \tfrac{1}{\epsilon}(E_1 + E_2K)'(E_1 + E_2K) + K'RK + Q = 0 \end{aligned}$$

soit vérifiée pour des matrices $Q = Q' \succ 0$ et $R = R' \succ 0$ arbitraires.

– Dans le cas des incertitudes polytopiques avec

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{A} & = & \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_{n_A}\} \\ \mathcal{B} & = & \mathrm{Co}\{B_1, \dots, B_{n_B}\},\end{array}$$

qu'il existe une matrice $P = P' \succ 0$ et une matrice K telles que l'inégalité matricielle

$$(A_i + B_j K)' P + P(A_i + B_j K) \prec 0$$

soit vérifiée pour tout $i = 1, \dots, n_A$ et $j = 1, \dots, n_B$.

Dans le chapitre 2, nous allons revenir sur la formulation de ces conditions en tant qu'inégalités ou équations matricielles. Nous verrons que par le biais de changements de variables appropriés, les inégalités matricielles peuvent être rendues linéaires en les inconnues. Nous étudierons également les méthodes numériques qui ont été développées pour résoudre ces inégalités et équations matricielles.

1.3.3 Stabilité Locale

Les résultats des paragraphes 1.3.1 et 1.3.2 concernent la stabilité asymptotique globale, c'est-à-dire qu'ils sont valables pour toute condition initiale du système. La nature globale de la stabilité est directement reliée à la nature linéaire des systèmes étudiés. Cependant, nous avons vu au paragraphe 1.2.3 que dans le cas de systèmes non-linéaires, la stabilité asymptotique globale ne peut généralement pas être assurée si aisément. C'est pourquoi nous introduisons la notion de *stabilité asymptotique locale*, valable uniquement dans un ensemble $\mathcal{E}$ de l'espace d'état dans lequel les trajectoires du système doivent être confinées et être asymptotiquement stable. En d'autres termes, l'ensemble $\mathcal{E}$ doit être contractif pour le système [106, 65].

Dans ce mémoire, nous étudierons uniquement les ensembles de stabilité locale du type

$$\mathcal{E} = \{x : x'Px \leq 1/r\},$$

définis dans le paragraphe 1.3.1, avec $P = P' \succ 0$ et $r > 0$, et associés aux fonctions de Lyapunov quadratiques [65]. On dira que le système linéaire invariant

$$\dot{x} = Ax$$

est *localement stable* dans l'ensemble $\mathcal{E}$ s'il existe une matrice de Lyapunov $P = P' \succ 0$ telle que

$$x'(A'P + PA)x < 0$$

pour tout vecteur x appartenant à $\mathcal{E}$. De manière totalement similaire, on dira que le système linéaire incertain

$$\dot{x} = A(t)x$$

où A appartient à un ensemble compact $\mathcal{A}$ est *quadratiquement localement stable* dans l'ensemble $\mathcal{E}$ s'il existe une matrice de Lyapunov $P = P' \succ 0$ telle que

$$x'[A'(t)P + PA(t)]x < 0$$

pour tout vecteur x appartenant à $\mathcal{E}$ et toute matrice A appartenant à $\mathcal{A}$.

Nous verrons par la suite que la notion de stabilité quadratique locale s'avère fondamentale pour étudier les systèmes incertains à commande saturée.

1.3.4 Retour de sortie

Par simplicité, nous n'avons mentionné jusqu'à présent que la commande de systèmes par simple retour d'état statique

$$u = Kx.$$

Implanter une telle loi de commande suppose que nous avons accès en permanence à l'ensemble des composantes du vecteur d'état x. Il faut néanmoins savoir que c'est une hypothèse peu réaliste. Dans la plupart des cas, nous ne disposons que d'une information partielle sur le vecteur d'état et nous devons exploiter l'information renvoyée par le vecteur de sortie

$$y = Cx.$$

La théorie des observateurs et de la commande par retour de sortie découle de cette observation [64]. Dans ce mémoire, nous considérons des lois de commande par retour de sortie du type *compensateur dynamique* dont la dynamique s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_c & = & A_c x_c + B_c u_c \\ y_c & = & C_c x_c + D_c u_c. \end{array} \tag{1.13}$$

Le vecteur x_c est le vecteur d'état du compensateur. Généralement, l'entrée du compensateur est la sortie du système à commander et la sortie du compensateur est l'entrée du système à commander, c'est-à-dire

$$u_c = y, \quad u = y_c.$$

Le compensateur (1.13) est dit *strictement propre* si $D_c = 0$. Le compensateur est dit *statique* si $A_c = 0$ et $B_c = 0$.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.2.1, le compensateur sous représentation d'état (1.13) peut également être exprimé de manière totalement équivalente à l'aide d'une matrice de transfert

$$G_c(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$$

que l'on pourra par exemple représenter sous forme de fractions de matrices polynomiales.

Dans ce paragraphe, nous n'avons mentionné que les compensateurs dynamiques à temps continu, mais il va sans dire qu'il existe de façon équivalente des compensateurs dynamiques à temps discret.

1.4 Analyse et Synthèse

Dans ce mémoire nous allons étudier deux types de problèmes reliés à la stabilité des systèmes. Prenons par exemple le simple cas du système dynamique

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.14}$$

dont la commande par retour d'état est saturée

$$u = \text{sat}(Kx). \tag{1.15}$$

- Par *problème d'analyse* nous entendons l'étude de la stabilité d'un système commandé où une loi de commande u est déjà disponible. Dans le cas ci-dessus, le système (1.14) commandé par la loi saturée (1.15) devient alors un système non-linéaire en boucle fermée

  $$\dot{x} = Ax + B\text{sat}(Kx). \tag{1.16}$$

  Le problème d'analyse de stabilité du système (1.16) consiste à déterminer la région d'attraction de l'origine de ce système. Comme mentionné au paragraphe 1.3.1, c'est une tâche difficile et nous nous contenterons généralement d'une approximation de cette région.
- Par *problème de synthèse* nous entendons l'étude de la stabilité d'un système commandé par une loi de commande qui reste à déterminer. Dans le simple cas du système commandé (1.14) et du retour d'état (1.15) mentionnés ci-dessus, il s'agira donc par exemple de trouver la matrice K et une approximation de la région d'attraction de l'origine pour le système en boucle fermée (1.16). En particulier, nous tenterons de déterminer la matrice K qui maximise la taille de l'approximation de la région de stabilité.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons effectué un bref tour d'horizon des modèles mathématiques utilisés pour représenter les systèmes dynamiques linéaires incertains ou en présence de limitations d'amplitude sur la commande. Nous avons ensuite montré que les fonctions de Lyapunov quadratiques s'avèrent être un outil particulièrement adapté à l'étude de la stabilité quadratique locale de ces systèmes. Dans le chapitre suivant, nous allons étudier les outils numériques et géométriques associés aux fonctions de Lyapunov quadratiques.

Chapitre 2

Outils

2.1 Introduction

Les techniques de commande développées dans les chapitres suivants de ce mémoire sont basées sur des outils et des méthodes numériques puissants et maintenant classiques.

Comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, les notions de stabilité et de stabilisabilité font appel à des équations ou inégalités matricielles particulières. Nous présentons tout d'abord dans la section 2.2 les équations algébriques de Riccati puis dans la section 2.3 les inégalités matricielles linéaires. Dans chacun des cas nous définissons les problèmes de commande qui font appel à ces outils puis nous décrivons les méthodes numériques que l'on peut mettre en place pour les résoudre.

Par ailleurs, comme nous l'avons décrit au chapitre précédent, la résolution des deux problèmes connexes d'analyse et de synthèse, pour un système incertain avec limitation en amplitude du signal de commande, est basée sur l'utilisation de deux types d'ensembles : les polyèdres et les ellipsoïdes. Tous deux définissent des ensembles contractifs de stabilité asymptotique locale. Les propriétés géométriques de ces deux types de domaines sont donc rappelées dans la section 2.4.

Enfin, la section 2.5 clôt le chapitre en évoquant rapidement les outils numériques associés aux matrices et équations polynomiales.

2.2 ARE

Une *équation algébrique de Riccati* (Algebraic Riccati Equation ou ARE en anglais) est une équation matricielle quadratique de la forme

$$A'P + PA + PSP + T = 0 \tag{2.1}$$

où A, P, S et T sont des matrices réelles carrées avec P, S et T symétriques. La matrice P est inconnue. L'équation (2.1) est une ARE à temps continu. Il existe également une ARE à temps discret, mais nous ne la considérons pas dans ce mémoire. Les propriétés mathématiques de cette équation dans sa forme la plus générale sont étudiées avec détail dans [124, Chapitre 13].

2.2.1 AREs en commande

Nous allons brièvement énumérer les problèmes de commande qui font appel aux AREs.

Stabilité

Si l'on pose $S = 0$ et $T = Q$, l'ARE (2.1) devient une équation matricielle linéaire

$$A'P + PA + Q = 0 \tag{2.2}$$

que nous avons déjà rencontrée au paragraphe 1.3.1 lors de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires. Cette équation est dénommée *équation de Lyapunov*. Soit Q une matrice définie positive quelconque. On montre alors [124] que l'équation (2.2) admet une solution P définie positive unique si et seulement si la matrice A est asymptotiquement stable au sens continu, c'est-à-dire si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont dans le demi-plan gauche.

Stabilisation

Nous rappelons maintenant le rôle que jouent les AREs pour stabiliser les systèmes linéaires. Considérons le système linéaire invariant introduit dans le paragraphe 1.2.1

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{array} \tag{2.3}$$

auquel nous associons l'équation matricielle

$$A'P + PA - PBB'P + C'C = 0$$

c'est-à-dire l'ARE (2.1) pour laquelle nous posons $S = -BB'$ et $T = C'C$. Sous l'hypothèse que la paire (A, B) est stabilisable et que la paire (C, A) est détectable (voir par exemple [64] ou [72] pour une définition de ces termes) alors cette ARE a une solution P symétrique définie positive unique. De plus, le retour d'état

$$u = Kx = -B'Px$$

stabilise le système dynamique (2.3), c'est-à-dire que les valeurs propres de la matrice en boucle fermée $A + BK$ sont toutes situées dans le demi-plan gauche. Ce résultat a de nombreuses implications en commande optimale linéaire quadratique [3], $\mathcal{H}_2$ [93] mais aussi $\mathcal{H}_\infty$ [124].

Stabilité quadratique

Les AREs permettent également de résoudre certains problèmes de stabilité robuste, en particulier dans le cadre de la stabilité quadratique introduite au paragraphe 1.3.2. Considérons le système linéaire incertain

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{2.4}$$

où les matrices A et B appartiennent respectivement aux ensembles compacts

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & \{A_0 + DF(t)E_1,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\ \mathcal{B} & = & \{B_0 + DF(t)E_2,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \end{array}$$

modélisant des incertitudes bornées en norme. Nous avons vu au paragraphe 1.3.2 qu'en l'absence de commande ($u = 0$) le système ci-dessus est quadratiquement stable si et seulement s'il existe une matrice $P = P' \succ 0$ et un scalaire $\epsilon > 0$ tels que

$$A_0'P + PA_0 + \epsilon PDD'P + \frac{1}{\epsilon}E_1'E_1 + Q = 0 \tag{2.5}$$

pour une matrice $Q = Q' \succ 0$ arbitraire. L'équation ci-dessus est une ARE du type (2.1) pour laquelle nous posons $S = \epsilon DD'$ et $T = \frac{1}{\epsilon}E_1'E_1 + Q$.

Stabilisation quadratique

Finalement, les AREs jouent également un rôle important dans la synthèse de lois de commande robustes. Nous avons vu au paragraphe 1.3.2 que le système commandé (2.4) est quadratiquement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice $P = P' \succ 0$, une matrice K et un scalaire $\epsilon > 0$ tels que

$$\begin{array}{l} (A_0 + B_0K)'P + P(A_0 + B_0K) + \epsilon PDD'P \\ \qquad +\frac{1}{\epsilon}(E_1 + E_2K)'(E_1 + E_2K) + K'RK + Q = 0 \end{array}$$

pour des matrices $Q = Q' \succ 0$ et $R = R' \succ 0$ arbitraires. Dans [66], les auteurs montrent qu'une condition équivalente est l'existence d'une matrice $P = P' \succ 0$ et d'un scalaire $\epsilon > 0$ tels que

$$\bar{A}'P + P\bar{A} - PB_0\bar{R}^{-1}B_0'P + \epsilon PD'DP + \frac{1}{\epsilon}E_1'(I - \frac{1}{\epsilon}E_2\bar{R}^{-1}E_2')E_1 + Q = 0 \tag{2.6}$$

avec

$$\bar{A} = A_0 - \frac{1}{\epsilon}B_0\bar{R}^{-1}E_2'E_1 \qquad \bar{R} = R + \frac{1}{\epsilon}E_2'E_1.$$

Une commande stabilisante quadratiquement est alors le retour d'état

$$u = Kx = -\bar{R}^{-1}(B_0'P + \frac{1}{\epsilon}E_2'E_1)x.$$

L'équation (2.6) est également une ARE du type (2.1), pour laquelle nous posons $S = \epsilon D'D - B_0\bar{R}^{-1}B_0'$ et $T = \frac{1}{\epsilon}E_1'(I - \frac{1}{\epsilon}E_2\bar{R}^{-1}E_2')E_1 + Q$.

L'intérêt principal des AREs (2.5) et (2.6) réside dans le fait que l'existence d'une solution P est indépendante du choix des matrices Q et R. La résolution est possible compte tenu du fait que s'il existe un scalaire ϵ^* tel que l'ARE admet une solution symétrique définie positive, alors pour tout réel ϵ pris dans l'intervalle $[0, \epsilon^*]$, l'ARE admet également une solution définie positive. Cette propriété a été mise en évidence dans [88] et permet la mise en oeuvre d'une méthode de recherche unidimensionnelle en ϵ dont chaque étape élémentaire est la résolution d'une ARE du type (2.1).

Retour de sortie

Toutes les méthodes de synthèse mentionnées ci-dessus permettent de générer un retour d'état statique. Elles peuvent être généralisées au retour de sortie dynamique introduit au paragraphe 1.3.4. Dans ce cas la loi de commande est générée en résolvant deux AREs couplées du type (2.1), voir [30]. Nous utiliserons ces techniques dans le chapitre 4.

2.2.2 Méthode numérique

La résolution numérique de l'ARE (2.1) passe par l'étude du spectre (c'est-à-dire de l'ensemble des valeurs propres) de la matrice Hamiltonienne

$$H = \begin{bmatrix} A & S \\ -T & -A' \end{bmatrix}.$$

Il est facile de montrer [75] que le spectre de H est symétrique par rapport à l'axe imaginaire. Dans l'hypothèse où H n'a pas de valeur propre imaginaire pure, cette matrice possède donc autant de valeurs propres à parties réelles positives que de valeurs propres à parties réelles négatives. A l'aide de la décomposition de Schur ordonnée de H, nous pouvons alors déterminer une matrice

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

dont les colonnes orthonormales génèrent l'espace invariant stable de H (voir [75] ou [39] pour une définition de ces termes). La solution de l'ARE (2.1) est alors donnée par la simple équation

$$P = P_2 P_1^{-1}.$$

En résumé, la résolution d'une équation de Riccati passe par le calcul d'une décomposition de Schur ordonnée, une opération numériquement stable d'algèbre linéaire [39].

Une telle routine est par exemple disponible dans le paquetage d'algèbre linéaire LAPACK [4]. Cette routine est également implantée dans la CONTROL SYSTEM TOOLBOX du logiciel MATLAB [79], sous le nom `care` pour les AREs à temps continu et `dare` pour les AREs à temps discret.

2.3 LMI

Une *inégalité matricielle linéaire* (Linear Matrix Inequality ou LMI en anglais) est une inégalité de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \succ 0 \tag{2.7}$$

où x est un vecteur réel de m composantes et les matrices F_i sont symétriques, réelles et de dimension n. Les matrices F_i sont données et le vecteur x est inconnu. L'inégalité signifie que la matrice symétrique $F(x)$ doit être définie positive, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres (réelles) doivent être positives. Nous pouvons également rencontrer des contraintes du type $F(x) \succeq 0$, qui signifient que la matrice $F(x)$ est semi-definie positive, c'est-à-dire que certaines valeurs propres de $F(x)$ peuvent être nulles.

Puisque le cône des matrices définies positives est convexe et la matrice $F(x)$ est une fonction affine de x, la contrainte $F(x) \succ 0$ est une contrainte *convexe* en x. Comme nous allons le voir par la suite, il s'agit d'une propriété fondamentale des LMIs.

Nous pouvons associer à la LMI (2.7) le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{t.q.} & F(x) \succ 0 \end{array} \tag{2.8}$$

où c est un vecteur réel donné à m composantes. Le problème d'optimisation (2.8) est une généralisation du problème de programmation linéaire classique au cône des matrices définies positives. Puisque le critère $c'x$ est linéaire et la contrainte $F(x) \succ 0$ est convexe, le problème (2.8) est un problème d'optimisation *convexe*.

La référence incontournable en matière de LMIs est l'ouvrage [19]. Le lecteur intéressé y trouvera un historique et un répertoire des nombreux problèmes faisant appel aux LMIs.

LMIs simultanées

Parmi les propriétés remarquables des LMIs figure la possibilité de regrouper plusieurs LMIs $F^1(x) \succ 0, \cdots, F^p(x) \succ 0$ en une seule LMI *bloc-diagonale*

$$F(x) = \begin{bmatrix} F^1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & F^p(x) \end{bmatrix} \succ 0$$

Complément de Schur

Certaines inégalités non-linéaires peuvent être également transformées en LMIs à l'aide du *complément de Schur* qui permet d'écrire

$$\begin{bmatrix} Q(x) & \star \\ S(x) & R(x) \end{bmatrix} \succ 0,$$

où le symbole $\star$ dénote un bloc induit par symétrie, si et seulement si

$$\begin{array}{l} R(x) \succ 0 \\ Q(x) - S'(x)R^{-1}(x)S(x) \succ 0 \end{array}$$

ou, de manière équivalente, si et seulement si

$$\begin{array}{l} Q(x) \succ 0 \\ R(x) - S(x)Q^{-1}(x)S'(x) \succ 0. \end{array}$$

Dans les inégalités ci-dessus, les matrices $Q = Q'$, $R = R'$ et S sont affines en x. La preuve de ce résultat découle immédiatement de l'identité

$$\begin{bmatrix} Q(x) & \star \\ S(x) & R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Q^{-1}(x)S'(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q(x) & 0 \\ 0 & R(x) - S(x)Q^{-1}(x)S'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q^{-1}(x)S'(x) \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

2.3.1 LMIs en commande

Nous allons brièvement énumérer les problèmes de commande qui font appel aux LMIs. En suivant exactement le plan du paragraphe 2.2.1, nous soulignons les liens existant entre les AREs et les LMIs. L'ouvrage de référence développant en détail ces résultats est [19].

Stabilité

L'exemple le plus classique de LMIs est sans aucun doute *l'inégalité de Lyapunov*

$$\begin{array}{l} A'P + PA \prec 0 \\ P = P' \succ 0 \end{array} \tag{2.9}$$

que nous avons déjà mentionnée au paragraphe 1.3.1 lors de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires. Cette inégalité est à comparer avec l'équation de Lyapunov que nous avons étudiée comme cas particulier d'ARE au paragraphe 2.2.1. Cette inégalité est en fait une LMI dont la variable de décision est un vecteur x dont les composantes sont les $n(n+1)/2$ composantes non-redondantes de la matrice symétrique P de dimension n.

Stabilisation

Les LMIs permettent également de générer des lois de commande stabilisantes. Nous avons vu au paragraphe 1.3.1 qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité du système commandé

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

par un retour d'état

$$u = Kx$$

est l'existence de matrices P et K telles que

$$\begin{array}{l}(A+BK)'P + P(A+BK) \prec 0 \\ P = P' \succ 0.\end{array}$$

Cette inégalité est bilinéaire en P et K, mais à l'aide du changement de variables $P = W^{-1}$ et $K = RW^{-1}$ originalement proposé dans [12], elle devient une LMI en R et W qui s'écrit

$$\begin{array}{l}AW + WA' + BR + R'B' \prec 0 \\ W = W' \succ 0.\end{array}$$

Stabilité quadratique

A l'aide de la notion de stabilité quadratique introduite au paragraphe 1.3.2, les LMIs s'avèrent également utiles pour l'étude de la stabilité des systèmes incertains. Considérons le système linéaire incertain

$$\dot{x} = A(t)x$$

où la matrice A appartient à l'ensemble compact $\mathcal{A}$, qui peut modéliser

- Des incertitudes de type bornées en norme, avec

  $$\mathcal{A} = \{A_0 + DF(t)E,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\}$$

  Nous avons vu au paragraphe 1.3.2 qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique est alors qu'il existe une matrice P solution de la LMI

  $$\begin{array}{l}A_0'P + PA_0 + PDD'P + E'E \prec 0 \\ P = P' \succ 0.\end{array}$$

  Cette LMI est à comparer avec l'ARE paramétrée en ϵ que nous avons étudiée au paragraphe 2.2.1.
- Des incertitudes polytopiques, où

  $$\mathcal{A} = \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{n_A}\}.$$

  Une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique est alors qu'il existe une matrice P solution de la LMI

  $$\begin{array}{l}A_i'P + PA_i \prec 0, \quad i = 1, \ldots, n_A \\ P = P' \succ 0.\end{array}$$

Notons que dans le cas d'incertitudes polytopiques il n'existe pas d'équivalent de ces conditions en termes d'AREs. Cette possibilité de combiner plusieurs conditions constitue l'un des avantages des LMIs sur les AREs. De plus, l'approche LMI permet d'inclure des contraintes de structure sur la solution recherchée pour résoudre des problèmes de commande décentralisée par exemple, ce qui est difficile à réaliser avec les AREs.

Stabilisabilité quadratique

Les LMIs peuvent être aussi utilisées afin de construire des lois de commandes robustes. Considérons le système linéaire incertain

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

où les matrices $A(t)$ et $B(t)$ appartiennent respectivement à des ensembles compacts $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Nous désirons trouver une commande de retour d'état

$$u = Kx$$

qui stabilise quadratiquement le système commandé ci-dessus.

– Dans le cas d'incertitudes bornées en norme, avec

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & \{A_0 + DF(t)E_1,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\ \mathcal{B} & = & \{B_0 + DF(t)E_2,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \end{array}$$

une telle loi est déterminée en trouvant les matrices $P = P' \succ 0$ et K solutions de l'inégalité matricielle

$$(A_0 + B_0K)'P + P(A_0 + B_0K) + PDD'P + (E_1 + E_2K)'(E_1 + E_2K) \succ 0.$$

Cette inégalité est bilinéaire en P et K. A l'aide du changement de variables $P = W^{-1}$ et $K = RW^{-1}$, elle s'écrit

$$A_0W + WA_0' + B_0R + R'B_0 + DD' + (E_1W + E_2R)'(E_1W + E_2R) \succ 0,$$

qui est également une inégalité bilinéaire en R et W. En utilisant le complément de Schur mentionné dans la section 2.3, nous pouvons supprimer le terme bilinéaire en augmentant la taille de l'inégalité matricielle. Nous obtenons alors

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} A_0W + WA_0' + B_0R + R'B_0 + DD' & \star \\ E_1W + E_2R & -I \end{array}\right] \prec 0 \\ W = W' \succ 0 \end{array}$$

qui est une LMI en R et W. Cette LMI peut être comparée avec l'ARE paramétrée en ϵ que nous avons proposée dans le paragraphe 2.2.1.

– Dans le cas des incertitudes polytopiques, avec

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{n_A}\} \\ \mathcal{B} & = & \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_{n_B}\} \end{array}$$

une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique est qu'il existe une matrice $P = P' \succ 0$ et une matrice K telles que l'inégalité matricielle

$$(A_i + B_j K)'P + P(A_i + B_j K) \prec 0$$

soit vérifiée pour tout $i = 1, \ldots, n_A$ et $j = 1, \ldots, n_B$. A l'aide du même changement de variables que précédemment, le problème revient à déterminer deux matrices R et W telles que

$$\begin{array}{l} A_i W + W A_i + B_j R + R' B_j \prec 0, \quad i = 1, \ldots, n_A, \quad j = 1, \ldots, n_B \\ W = W' \succ 0. \end{array}$$

Il n'existe pas d'equivalent ARE à cette LMI.

Retour de sortie

Toutes les méthodes de synthèse mentionnées ci-dessus permettent de générer un retour d'état statique. Elles peuvent être généralisées au retour de sortie dynamique introduit au paragraphe 1.3.4. Dans ce cas, la loi de commande est générée en résolvant deux LMIs couplées, voir par exemple [35]. Nous utiliserons ces techniques dans le chapitre 4.

2.3.2 Méthodes numériques

L'intérêt croissant porté aux LMIs ces dernières années vient du fait que les méthodes dites de *points intérieurs* peuvent être appliquées pour les résoudre. Ces méthodes ont été originalement développées pour résoudre des programmes linéaires standards définis sur le quadrant positif, mais peuvent s'étendre sans difficulté aux programmes linéaires définis sur le cône des matrices définies positives, c'est-à-dire aux LMIs. Un ouvrage de référence dans ce domaine est [84], où une théorie très générale est développée pour résoudre des problèmes d'optimisation convexe par des méthodes de points intérieurs. Une spécialisation de ces résultats aux LMIs a été développée dans [115].

De façon très approximative, avec les méthodes de points intérieurs les contraintes sont remplacées par une fonction de pénalité et l'optimisation s'effectue par des résolutions successives de problèmes non-contraints. Un choix classique de fonction de pénalité pour l'ensemble convexe défini par la contrainte LMI

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \succ 0$$

est la fonction logarithmique

$$\phi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \log\det F(x)^{-1} & \text{si} \quad F(x) \succ 0 \\ \infty & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

La fonction ϕ est strictement convexe et admet un minimum unique dénommé *centre analytique* [115, 116] et solution du problème d'optimisation

$$\begin{array}{ll} \min & \log\det F(x)^{-1} \\ \text{t.q.} & F(x) \succ 0. \end{array}$$

Nous retrouverons ce problème lors de l'étude des propriétés géométriques des ellipsoïdes de la section 2.4.

Une propriété fondamentale des méthodes de points intérieurs est leur complexité polynomiale, c'est-à-dire que le nombre d'opérations nécessaires pour résoudre un problème avec une précision donnée est une fonction polynomiale du nombre d'inconnues et du nombre de contraintes. Typiquement, chaque itération est constituée d'un problème d'algèbre linéaire classique (par exemple la résolution d'un problème de moindres carrés) pour lequel il existe des algorithmes rapides et numériquement stables [39]. En pratique, le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre un problème d'optimisation LMI est presque toujours compris entre 5 et 50. De plus, la structure bloc-diagonale des LMIs peut facilement être exploitée pour accélerer le processus de résolution.

De nombreux outils numériques sont maintenant disponibles pour résoudre les LMIs. Notre expérience montre que certains peuvent s'avérer plus efficaces que d'autres selon le problème traité. Parmi les outils que nous avons utilisés régulièrement, nous pouvons citer

- La LMI Control Toolbox pour Matlab [80], dont le principal avantage est la rapidité, au prix d'une syntaxe peu intuitive.
- Les programmes SP [114] et MAXDET dont les sources en langage C sont disponibles. MAXDET est en fait une extension de SP qui permet de résoudre le problème de centre analytique mentionné ci-dessus. Une interface conviviale reprenant une syntaxe de type Matlab est également disponible pour ces deux programmes. Il s'agit du logiciel SDPSOL [122].
- L'interface conviviale Lmitool [33], qui génère un code Matlab permettant d'utiliser indifféremment le programme SP cité ci-dessus, mais également les programmes SDP [1] et SDPHA [20]. La convivalité se paie cependant par une relative lenteur, surtout au niveau de la mise sous forme standard des LMIs.

2.4 Ellipsoïdes et Polyèdres

Dans cette section nous étudions les propriétés des objets géométriques que nous utilisons tout au long du mémoire, à savoir les ellipsoïdes et les polyèdres. Les propriétés des ellipsoïdes sont étudiées en détail dans [19]. Pour un rappel des propriétés des polyèdres on pourra consulter tout ouvrage traitant de la programmation linéaire, comme par exemple [117].

2.4.1 Ellipsoïdes

Définition

Un *ellipsoïde* $\mathcal{E}$ peut être défini de diverses manières. Nous retenons trois formulations classiques qui sont

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{x : x'Px + 2x'q + \rho \leq 0\} \\ &= \{x : (x - x_c)'P(x - x_c) \leq 1\} \\ &= \{Qy + x_c : y'y \leq 1\}.\end{aligned}$$

La première formulation se base sur la fonction quadratique

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P & q \\ q' & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = x'Px + 2x'q + \rho$$

que nous supposons définie positive, c'est-à-dire que

$$P = P' \succ 0, \quad q'P^{-1}q - \rho > 0.$$

La deuxième formulation se base sur la fonction quadratique

$$(x - x_c)'P(x - x_c) - 1 = x'Px - 2x'Px_c + x_c'Px_c - 1$$

d'où nous déduisons que

$$q = -Px_c, \quad \rho = x_c'Px_c - 1.$$

Le vecteur x_c est appelé *centre* de l'ellipsoïde. Enfin, la troisième formulation se base sur une déformation de la sphère unité par une matrice Q qui est l'inverse du facteur de Cholesky de la matrice définie positive P, autrement dit

$$Q = P^{-\frac{1}{2}}.$$

Il est donc facile de passer de l'une à l'autre de ces formulations. Notons finalement qu'assez souvent dans ce mémoire nous considérons des ellipsoïdes centrés à l'origine. Nous utilisons alors une quatrième formulation

$$\mathcal{E} = \{x : x'Px \leq \frac{1}{r}\}$$

où r est un scalaire positif. En utilisant les notations ci-dessus, nous avons donc

$$x_c = q = 0, \quad \rho = -\frac{1}{r}.$$

Volume d'un ellipsoïde

Il est aisé de montrer que le *volume* de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ est proportionnel au déterminant de Q. Dans ce mémoire nous verrons que la notion de volume, et en particulier, de maximisation du volume d'un ellipsoïde, joue un rôle prépondérant dans certains problèmes de commande [115, 116].

Si

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$$

dénotent les valeurs propres de la matrice P, nous pouvons montrer [19] que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ admet des demi-axes de longueurs $1/\sqrt{\lambda_i}$. Etant donné que le déterminant de P est égal au produit de ses valeurs propres et que la trace de P est égale à leur somme, nous pouvons utiliser les critères suivants afin de maximiser la taille d'un ellipsoïde :

- Minimisation du *logarithme du déterminant*, égal à la quantité

$$\log\det P = \log\lambda_1 + \log\lambda_2 + \cdots + \log\lambda_n.$$

  Le problème d'optimisation correspondant s'écrit

$$\begin{array}{ll} \min & \log\det P \\ \text{t.q.} & P = P' \succ 0 \\ & F(P^{-1}) \succ 0 \end{array}$$

  où $F(P^{-1}) \succ 0$ est une contrainte LMI en P^{-1}. Ce problème d'optimisation est convexe en P^{-1}, il correspond à la recherche du centre analytique d'une LMI comme nous l'avons vu dans la section 2.3.
- Minimisation de la *trace* de P, égale à la quantité

$$\text{trace}P = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

  Le problème d'optimisation correspondant s'écrit

$$\begin{array}{ll} \min & \text{trace}P \\ \text{t.q.} & P = P' \succ 0 \\ & F(P) \succ 0. \end{array}$$

  Il s'agit du problème d'optimisation LMI classique à critère linéaire introduit dans la section 2.3.
- Minimisation de la *plus grande valeur propre* de P, dénotée λ_n. De façon équivalente, nous pouvons minimiser une borne supérieure sur cette valeur propre. Le problème d'optimisation correspondant s'écrit

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda \\ \text{t.q.} & \lambda I \succeq P \\ & P = P' \succ 0 \\ & F(P) \succ 0. \end{array}$$

  C'est également un problème d'optimisation LMI classique à critère linéaire.

Le choix du critère dépend du problème traité. Les avantages respectifs de chaque critère sont mentionnés dans [32, 40]. Tous les problèmes LMI mentionnés ci-dessus peuvent être résolus avec les outils décrits dans le paragraphe 2.3.2.

2.4.2 Polyèdres

Définition

Un *polyèdre* $\mathcal{P}$ est défini comme étant l'intersection d'une famille finie de demi-plans. Etant donné un ensemble de vecteurs colonnes m_i et de scalaires μ_i, Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{x : m_i'x \leq \mu_i, \quad i = 1, \ldots, p\} \\ &= \{x : Mx \leq \mu\} \end{aligned}$$

où

$$M = \begin{bmatrix} m_1' \\ \vdots \\ m_p' \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

et le signe $\leq$ est interprété composante par composante. Si le polyèdre $\mathcal{P}$ est borné, alors nous parlerons de *polytope*. Cette représentation peut être généralisée aux polyèdres non-bornés. De manière duale, un polytope peut également être défini comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de *sommets*

$$\mathcal{P} = \mathrm{Co}\{v_1, \ldots, v_q\}.$$

Le passage de la représentation par demi-plans à la représentation par sommets est délicat. Il peut être effectué à l'aide d'algorithmes à complexité exponentielle qui s'avèrent cependant particulièrement efficaces, comme par exemple le programme QHULL [7].

Volume d'un polytope

Certains problèmes de commande nous conduisent à maximiser le volume d'un polytope. Malheureusement, il n'existe pas de formule analytique pour déterminer ce volume. Cependant, il peut être calculé à l'aide d'algorithmes à complexité exponentielle qui s'avèrent relativement efficaces en pratique. Le lecteur intéressé pourra consulter [21] pour un survol récent des progrès dans ce domaine. Dans ce mémoire, nous n'utiliserons pas ces algorithmes de calcul de volume. Nous poursuivons une approche moins directe, basée sur les propriétés géométriques des ellipsoïdes. Il s'agit d'inclure un ellipsoïde dans un polytope, et de maximiser le volume de cet ellipsoïde en utilisant les techniques décrites au paragraphe 2.4.1.

2.4.3 Inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre

L'inclusion de l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \{Qy + x_c : y'y \leq 1\}$ dans le polyèdre $\mathcal{P} = \{x : m_i'x \leq \mu_i, \quad i = 1, \ldots, p\}$ signifie que la valeur maximum de $m_i'(Qy + x_c)$ est inférieure ou égale à μ_i pour tout vecteur y tel que $y'y \leq 1$ et pour tout $i = 1, \ldots, p$. Ce maximum est atteint sur la composante i pour le choix $y = Qm_i/\|Qm_i\|_2$. Nous en déduisons le résultat suivant.

Lemme 2.1 *L'ellipsoïde*

$$\mathcal{E} = \{Qy + x_c : y'y \leq 1\}$$

est inclus dans le polyèdre

$$\mathcal{P} = \{x : m_i'x \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, p\}$$

si et seulement si

$$\|Qm_i\|_2 + m_i'x_c \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

A l'aide du complément de Schur, cette inégalité peut s'écrire matriciellement

$$\begin{bmatrix} (\mu_i - m_i'x_c)P & \star \\ m_i' & \mu_i - m_i'x_c \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

où $P = Q^{-2}$. Cette inégalité matricielle est bilinéaire en P et x_c. Elle devient une LMI en P dans le cas où $x_c = 0$, c'est-à-dire si l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ est centré à l'origine.

Lemme 2.2 *L'ellipsoïde centré à l'origine*

$$\mathcal{E} = \{x : x'Px \leq 1\}$$

est inclus dans le polyèdre

$$\mathcal{P} = \{x : m_i'x \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, p\}$$

si et seulement si

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ m_i' & \mu_i^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

2.4.4 Inclusion d'un polyèdre dans un autre

Nous présentons à présent un résultat classique d'algébre linéaire, particulièrement utile en commande contrainte. Il s'agit du *lemme étendu de Farkas* [45], qui fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polyèdre soit inclus dans un autre.

Lemme 2.3 *Le polyèdre*

$$\mathcal{P}_N = \{x : Nx \leq \nu\}$$

est inclus dans le polyèdre

$$\mathcal{P}_M = \{x : Mx \leq \mu\}$$

si et seulement s'il existe une matrice P à composantes non-négatives telle que

$$\begin{aligned} PN &= M \\ P\nu &\leq \mu. \end{aligned}$$

La preuve de ce résultat fait appel à des notions de programmation linéaire [45, 117].

C'est d'ailleurs à l'aide d'un logiciel de résolution de programmes linéaires que nous pouvons trouver la matrice P vérifiant les relations algébriques linéaires ci-dessus. Nous pouvons par exemple utiliser la fonction LP de l'OPTIMIZATION TOOLBOX pour MATLAB [78], ou encore les programmes de résolution de LMIs mentionnés dans le paragraphe 2.3.2 étant donné qu'un programme linéaire est un cas particulier de LMI.

2.5 Matrices Polynomiales

Finalement, nous mentionnons une autre catégorie d'outils particulièrement utiles pour l'étude des systèmes linéaires, à savoir les *matrices polynomiales.*

Paramétrisation de Youla-Kučera

Nous avons vu au paragraphe 1.2.1 que dans le domaine fréquentiel un système linéaire invariant à temps discret pouvait indifféremment être représenté à l'aide d'équations d'état ou à l'aide de fractions de matrices polynomiales

$$y(d) = B(d)A^{-1}(d)u(d) = \bar{A}^{-1}(d)\bar{B}(d)u(d)$$

avec d dénotant l'opérateur de retard. La représentation par matrices polynomiales est particulièrement intéressante lorsque l'on désire paramétrer l'ensemble des compensateurs stabilisant un système. Nous rappelons ici le résultat principal, connu sous le nom de *paramétrisation de Youla-Kučera* [70, 123, 71, 119].

Lemme 2.4 *Soit $\hat{X}(d)$, $\hat{Y}(d)$, $\hat{\bar{X}}(d)$, $\hat{\bar{Y}}(d)$ une solution particulière de la double identité de Bézout*

$$\begin{bmatrix} \bar{X}(d) & \bar{Y}(d) \\ -\bar{B}(d) & \bar{A}(d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(d) & -Y(d) \\ B(d) & X(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

où $A(d)$, $B(d)$ et $\bar{A}(d)$, $\bar{B}(d)$ sont des matrices polynomiales n'ayant pas de zéros communs. Alors tous les compensateurs linéaires de la forme

$$\begin{aligned} u(d) &= -Y(d)X^{-1}(d)y(d) \\ &= -\bar{X}^{-1}(d)\bar{Y}(d)y(d) \end{aligned}$$

qui stabilisent le système linéaire

$$\begin{aligned} y(d) &= B(d)A^{-1}(d)u(d) \\ &= \bar{A}^{-1}(d)\bar{B}(d)u(d) \end{aligned}$$

sont paramétrés par les équations

$$\begin{array}{rcl} X(d) & = & \hat{X}(d) + B(d)Q(d) \\ Y(d) & = & \hat{Y}(d) - A(d)Q(d) \\ \bar{X}(d) & = & \hat{\bar{X}}(d) + \bar{Q}(d)\bar{B}(d) \\ \bar{Y}(d) & = & \hat{\bar{Y}}(d) - \bar{Q}(d)\bar{A}(d) \end{array} \tag{2.11}$$

où $Q(d)$, $\bar{Q}(d)$ sont des matrices rationnelles arbitraires mais stables.

Méthodes numériques

Pour des raisons historiques, les méthodes numériques de commande ont été majoritairement développées à partir de la représentation d'état. Ainsi, les AREs, les LMIs et tous les outils connexes font appel à l'algèbre linéaire des matrices à composantes réelles ou complexes. En particulier, des méthodes numériquement stables et rapides ont été conçues pour effectuer la plupart des opérations de base comme la réduction sous forme triangulaire, l'extraction de noyau, le calcul des valeurs propres, etc... L'ouvrage [39] constitue une excellente introduction à ce domaine. Notons que la CONTROL SYSTEM TOOLBOX pour MATLAB [79] utilise principalement des routines basées sur l'approche par représentation d'état.

Par contraste, peu de méthodes numériques de commande ont été développées à partir de la représentation par matrices polynomiales, introduite dans les ouvrages [71, 72]. L'approche polynomiale a plutôt fait l'objet d'études théoriques et s'avère surtout reconnue comme un excellent outil pédagogique. Récemment, plusieurs études tendent à prouver que des méthodes numériquement stables et efficaces peuvent également être conçues pour manipuler les matrices polynomiales [49]. Ainsi, il existe à présent des méthodes stables et efficaces pour résoudre les équations polynomiales matricielles linéaires et l'extraction de noyau [98], pour résoudre les équations polynomiales quadratiques [52, 53], pour l'obtention de formes triangulaires [54], etc... Une boîte à outils, dénommée POLYNOMIAL TOOLBOX pour MATLAB [92, 98] a été développée récemment pour effectuer ces opérations. De façon schématique, les algorithmes numériquement stables qui sont développés dans [49] sont basés sur deux techniques classiques : les matrices de Sylvester et l'interpolation. Ces deux techniques permettent d'exprimer les opérations sur des matrices polynomiales comme des opérations d'algèbre linéaire classique sur des matrices constantes.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé les outils fondamentaux que nous allons utiliser dans ce mémoire, à savoir les équations algébriques de Riccati (AREs), les inégalités matricielles linéaires (LMIs), les propriétés géométriques des ellipsoïdes et polyèdres, et enfin les techniques faisant appel aux matrice polynomiales. Ces outils sont associés à des techniques numériques efficaces et fiables : l'algébre linéaire numérique pour résoudre les AREs et les équations polynomiales, la programmation convexe et les méthodes de points intérieurs pour résoudre les LMIs et les problèmes géométriques impliquant les ellipsoïdes et les polyèdres.

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 3

Analyse

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous penchons sur le problème de l'analyse de stabilité d'un système linéaire incertain à commande contrainte. Il existe plusieurs approches du problème. Nous les résumons brièvement dans le paragraphe 3.2 et présentons le cadre dans lequel s'inscrivent nos travaux. Une définition précise du problème traité dans ce chapitre est proposée dans le paragraphe 3.3. Nous présentons ensuite nos résultats basés sur les AREs (paragraphe 3.4) et les LMIs (paragraphe 3.5). Des exemples numériques illustratifs sont étudiés au paragraphe 3.6. Le paragraphe 3.7 conclut le chapitre en évoquant les avantages et inconvénients respectifs de nos approches.

3.2 Précédents Travaux

Les résultats d'analyse de stabilité locale peuvent se regrouper en quatre catégories principales dépendant du type de modélisation des saturations et de la nature de la région de stabilité envisagée. Nous pouvons distinguer des modélisations

- Par régions de saturation et régions de stabilité polyédrales [40, 41, 42]. Cette approche se prête parfaitement au problème d'analyse car elle débouche sur des conditions nécessaires et suffisantes d'invariance positive et de contractivité de polyèdres pour le système saturé. Les résultats sont basés sur l'utilisation de la programmation linéaire et des cônes polyédraux et permettent de développer des algorithmes d'expansion homothétique d'ensembles contractifs dans la région de comportement non-linéaire du système en boucle fermée.
- Polytopiques des saturations et régions de stabilité polyédrales [111]. En modélisant les saturations à l'aide d'un polytope de matrices, des algorithmes d'expansion non-homothétique de régions de stabilité peuvent être conçus. En contre partie, les conditions d'invariance positive et de contractivité de polyèdres pour le système

saturé sont uniquement suffisantes et peuvent donc s'avérer conservatives.

- Par non-linéarité de secteur et régions de type Lur'e [90, 91, 62]. Le terme de saturation est considéré comme une non-linéarité de secteur et les domaines de stabilité sont alors construits à partir de fonctions quadratiques de Lyapunov classiques ou de fonctions de type Lur'e avec un terme intégral additif. Ces domaines sont déterminés par application du critère du cercle ou du critère de Popov.

- Polytopiques des saturations et régions de stabilité ellipsoïdales [68, 113, 40]. En modélisant les saturations à l'aide d'un polytope de matrices et en considérant des régions de stabilité ellipsoïdales pour le système saturé, deux méthodes d'analyse ont été développées. La première est analogue à l'expansion homothétique étudiée pour des domaines polyédraux. La deuxième consiste à résoudre itérativement deux problèmes d'optimisation convexe afin d'obtenir un ellipsoïde maximal selon un critère défini à l'avance.

Le lecteur intéressé pourra consulter [107, §III.4.1] pour un survol exhaustif des différentes méthodes évoquées ci-dessus, avec un bilan comparatif détaillé des avantages et des inconvénients respectifs.

Il est important de noter que les méthodes ci-dessus s'appliquent principalement à des systèmes saturés en l'absence d'incertitudes. En ce qui concerne les systèmes incertains, peu de travaux ont été menés jusqu'alors. Cet état de fait a d'ailleurs été la principale source de motivation pour le développement des résultats présentés dans ce chapitre. Parmi les rares références traitant de l'analyse de stabilité des systèmes incertains saturés, nous pouvons citer [26] et [67]. Dans [26], la stabilité en présence de saturations est étudiée en décomposant un retour d'état calculé classiquement en résolvant une ARE. Une condition suffisante de stabilité locale est alors obtenue et le compromis entre la taille de l'ensemble de stabilité et l'amplitude des contraintes sur la commande est mis en évidence. Dans [67], les auteurs utilisent une décomposition additive ou multiplicative de la fonction non-linéaire de saturation qu'ils exploitent ensuite pour borner les termes quadratiques issus des fonctions de Lyapunov et obtenir une condition suffisante de stabilité locale. Aucune approche unifiée au problème d'analyse de stabilité robuste en présence de saturations n'a cependant été proposée.

Notre approche s'inscrit dans le cadre de la quatrième catégorie mentionnée ci-dessus. D'une part, nous modélisons les saturations par un polytope de matrices, à l'aide des résultats du paragraphe 1.2.3. D'autre part, nous considérons les domaines ellipsoïdaux de stabilité locale introduits dans le paragraphe 1.3.3. Contrairement aux résultats publiés jusqu'alors, notre approche est unifiée dans le sens où nous utilisons des outils classiques (AREs et LMIs) afin d'obtenir une méthode systématique d'analyse. De plus, les exemples numériques sur lesquels nous avons illustré notre approche font apparaître de meilleurs résultats que ceux obtenus précédemment.

3.3 Position du Problème

Nous considérons le système linéaire continu incertain

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{3.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$. Afin de représenter les incertitudes affectant ce système, nous supposons que les matrices $A(t)$ et $B(t)$ appartiennent respectivement à des ensembles compacts $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Dans ce chapitre, nous considérons deux modélisations d'incertitudes introduites dans le paragraphe 1.2.2, à savoir

- Des incertitudes bornées en norme, où

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & \{A_0 + DF(t)E_1,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\ \mathcal{B} & = & \{B_0 + DF(t)E_2,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \end{array}$$

  pour des matrices nominales A_0, B_0 et des matrices constantes D, E_1, E_2 données.
- Des incertitudes polytopiques, où les matrices du système appartiennent à des polytopes de matrices

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{n_A}\} \\ \mathcal{B} & = & \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_{n_B}\}. \end{array}$$

La commande

$$u = \mathrm{sat}(Kx) \tag{3.2}$$

du système (3.1) est saturée et ne peut excéder un certain seuil. La matrice de retour d'état K est supposée connue et obtenue par une méthode quelconque de commande robuste [124] de telle sorte que la matrice $A(t) + B(t)K$ soit robustement stable. Supposons que les contraintes sur la commande soient symétriques. Tout comme au paragraphe 1.2.3, nous avons

$$u_i = \mathrm{sat}(K_i x) = \left\{ \begin{array}{rl} \overline{u}_i & \text{si} \quad K_i x > \overline{u}_i \\ K_i x & \text{si} \quad |K_i x| \leq \overline{u}_i \\ -\overline{u}_i & \text{si} \quad K_i x < -\overline{u}_i \end{array} \right.$$

pour chaque composante u_i de la commande, avec K_i représentant la $i$ème ligne de K et $\overline{u}_i$ un scalaire positif donné, pour $i = 1, \ldots, m$. Le système (3.1) contrôlé par la loi de commande saturée (3.2) devient non-linéaire par bouclage et s'écrit

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\mathrm{sat}(Kx). \tag{3.3}$$

En l'absence d'hypothèse de stabilité du système (3.3) en boucle ouverte, nous savons que d'éventuelles saturations de la commande peuvent rendre instables certaines trajectoires du système en boucle fermée [106]. Le problème qui consiste alors à trouver l'ensemble des conditions initiales $x(0)$ qui peuvent être ramenées à l'origine – c'est-à-dire la région d'attraction de l'origine – s'avère très difficile et reste ouvert dans le cas général, en dépit de sa formulation très simple [107]. Notons que dans le cas où cet ensemble est l'espace d'état tout entier, nous pouvons parler de stabilité globale du système en boucle fermée [103].

Afin d'étudier la stabilité du système incertain en boucle fermée, nous utilisons le concept de stabilité quadratique locale introduit au paragraphe 1.3.3, associé à l'existence d'une matrice de Lyapunov définie positive P. Une approximation naturelle de l'ensemble des conditions initiales qui peuvent être stabilisées par la loi de commande (3.2) est alors l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{x : x'Px \leq 1/r\}$$

où r est un scalaire positif. Rappelons que si $V(x) = x'Px$ est une fonction de Lyapunov décroissante le long des trajectoires du système en boucle fermée (3.3) alors il existe un scalaire $r > 0$ tel que $\mathcal{E}$ est un ensemble positivement invariant et contractif pour le système en boucle fermée [40, 107], c'est-à-dire que toute trajectoire initialisée dans $\mathcal{E}$ converge vers l'origine. Il semble alors naturel de rechercher la matrice P et le scalaire r tels que $\mathcal{E}$ est de taille maximale. Le problème que nous allons résoudre est donc le suivant.

Problème 3.1 *Trouver la matrice de Lyapunov P et le scalaire r tels que le système incertain à commande saturée (3.3) est localement quadratiquement stable dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ de plus grande taille.*

3.4 Approche ARE

La première stratégie pour résoudre le problème 3.1 consiste à mener l'analyse de stabilité en utilisant la solution d'une équation algébrique de Riccati. Cette approche est basée sur les résultats de synthèse publiés dans [109, 59, 60]. Pour des raisons qui apparaîtront claires par la suite, cette approche n'est valable que pour les incertitudes bornées en norme.

Dans le paragraphe 2.2.1 nous avons établi qu'en l'absence de contraintes sur la commande, la stabilité quadratique du système (3.1) contrôlé par le retour d'état linéaire $u = Kx$ est assurée par l'existence d'une matrice de Lyapunov définie positive P_ϵ et d'un scalaire positif ϵ tels que

$$\begin{aligned}&(A_0 + B_0K)'P_\epsilon + P_\epsilon(A_0 + B_0K) + \epsilon P_\epsilon DD'P_\epsilon \\ &\quad + \epsilon^{-1}(E_1 + E_2K)'(E_1 + E_2K) + K'R_\epsilon K + Q_\epsilon = 0\end{aligned} \tag{3.4}$$

où R_ϵ et Q_ϵ sont des matrices de pondération définies positives quelconques. Par souci de clarté, nous supprimons la dépendence des variables en ϵ et nous notons dorénavant $P = \epsilon P_\epsilon$, $R = \epsilon R_\epsilon$ et $Q = \epsilon Q_\epsilon$.

En présence de saturations sur la commande, nous utilisons les résultats du paragraphe

1.2.3 pour modéliser l'effet des saturations. Nous définissons les scalaires

$$g_i(x) = \begin{cases} \overline{u}_i / K_i x & \text{si} \quad K_i x > \overline{u}_i \\ 1 & \text{si} \quad |K_i x| \leq \overline{u}_i \\ -\overline{u}_i / K_i x & \text{si} \quad K_i x < -\overline{u}_i \end{cases}$$

pour $i = 1, \ldots, m$. Notons que par définition $0 < g_i(x) \leq 1$ pour tout $i = 1, \ldots, m$. Comme précisé dans la section 3.3, nous étudions la stabilité locale du système (3.3) en supposant que son vecteur d'état x appartient à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$. Par conséquent, chaque composante $g_i(x)$ admet une borne inférieure dénotée $\underline{g}_i$ définie par

$$\underline{g}_i = \min\{g_i(x) : x \in \mathcal{E}\}$$

et qui satisfait $0 < \underline{g}_i \leq 1$ pour tout $i = 1, \ldots, m$. Nous pouvons alors définir 2^m matrices diagonales $\underline{G}_k$ pour $k = 1, \ldots, 2^m$, dont les éléments diagonaux prennent la valeur 1 ou $\underline{g}_i$.

Théorème 3.1 *Supposons que P est solution de l'ARE (3.4). Le système incertain saturé (3.3) est localement quadratiquement stable dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ si les scalaires $\underline{g}_i$ et le scalaire r vérifient les inégalités matricielles*

$$\begin{array}{l} (PB_0 + E_1'E_2)(I - \underline{G}_k)K + K'(I - \underline{G}_k)(PB_0 + E_1'E_2)' \\ \quad +K'(E_2'E_2 + R)K + Q - K'\underline{G}_k E_2' E_2 \underline{G}_k K \succ 0, \quad k = 1, \ldots, 2^m \end{array} \tag{3.5a}$$

$$\begin{array}{l} \underline{g}_i^2 K_i P^{-1} K_i' / \overline{u}_i^2 \leq r, \quad i = 1, \ldots, m \\ 0 < \underline{g}_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{3.5b}$$

Preuve : Lorsque le vecteur d'état x appartient au polyèdre

$$\mathcal{P} = \{x : |K_i x| \leq \overline{u}_i / \underline{g}_i, \; i = 1, \ldots, m\},$$

nous savons d'après les résultats du paragraphe 1.2.3 que les trajectoires du système saturé (3.3) peuvent être représentées par les trajectoires du système polytopique

$$\dot{x} = \underline{A}(t)x \tag{3.6}$$

où la matrice $\underline{A}(t)$ appartient à un polytope de matrices ayant pour sommets incertains les matrices $(A_0 + DF(t)E_1) + (B_0 + DF(t)E_2)\underline{G}_k K$ pour $k = 1, \ldots, 2^m$. Si les scalaires r et $\underline{g}_i$ satisfont les inégalités (3.5b) alors les propriétés géométriques de la section 2.4 permettent d'affirmer que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ est inclus dans le polyèdre $\mathcal{P}$ et donc que le modèle polytopique (3.6) est valide pour le système saturé (3.3) pour tout vecteur x appartenant à $\mathcal{E}$. Afin d'assurer la stabilité quadratique du système polytopique (3.6), nous écrivons la dérivée de la fonction de Lyapunov $V(x) = x'Px$ en considérant le système au sommet k :

$$f_k(x) = 2x'[P(A_0 + B_0\underline{G}_k K) + PDF(t)(E_1 + E_2\underline{G}_k)K]x.$$

En bornant les termes incertains à l'aide de la technique exposée dans [88] nous obtenons

$$f_k(x) \leq x'[2P(A_0 + B_0\underline{G}_k K) + PDD'P + (E_1 + E_2\underline{G}_k K)'(E_1 + E_2\underline{G}_k K)]x.$$

En utilisant l'équation (3.4), on peut alors écrire

$$f_k(x) \leq x'[2(PB_0 + E_1'E_2)(\underline{G}_k - I)K + K'\underline{G}E_2'E_2\underline{G}_kK - K'E_2'E_2K - K'RK - Q]x.$$

L'inégalité matricielle (3.5a) impose donc que $f_k(x) \leq 0$ pour tout sommet k et s'avère par conséquent être une condition suffisante de stabilité locale quadratique pour le système polytopique (3.6) et donc pour le système (3.3). □

On peut vérifier qu'en l'absence de saturation, c'est-à-dire quand $\underline{G}_k = I$ pour tout $k = 1, \ldots, 2^m$, l'inégalité matricielle (3.5a) devient $Q + K'RK \succ 0$, ce qui est cohérent avec le fait que le système en boucle fermée sans saturation est quadratiquement stable.

Dans le but de résoudre le problème 3.1, nous devons augmenter tant que possible la taille de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$. Les résultats de la section 2.4 permettent donc d'affirmer qu'il est souhaitable de diminuer r et donc de diminuer les scalaires $\underline{g}_i$ tout en préservant la stabilité quadratique locale du système saturé. L'algorithme suivant formalise ces observations.

Algorithme ANALYSE ARE

Entrée : Le système en boucle fermée (3.3).

Sortie : La matrice de Lyapunov P et le scalaire r tels que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ soit un domaine de stabilité du système incertain saturé (3.3).

Pas 1 : Trouver une matrice de Lyapunov P en résolvant l'ARE (3.4) à l'aide de la technique décrite dans la section 2.2. S'il n'y a pas de solution, alors le système n'est pas quadratiquement stable, même localement.

Pas 2 : Trouver les scalaires $\underline{g}_i$ qui minimisent r tout en vérifiant les inégalités (3.5). On peut par exemple fixer les $\underline{g}_i$ à une même valeur et effectuer une recherche unidimensionelle.

Cet algorithme présente plusieurs limitations importantes, décrites ci-dessous.

- Pour augmenter la taille de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ on joue uniquement sur le paramètre r au Pas 2, la matrice de Lyapunov P étant fixée dès le Pas 1. Or, le choix de P peut s'avérer prépondérant.
- Le choix de la matrice P est notamment influencé par les matrices de pondération R et Q, mais d'une façon difficilement quantifiable.
- L'algorithme n'est valable que pour des incertitudes bornées en norme car il n'existe pas de technique ARE adéquate pour les incertitudes polytopiques.

3.5 Approche LMI

Dans le but de pallier certains inconvénients inhérents à l'approche ARE précédemment décrite, nous présentons maintenant une deuxième stratégie pour résoudre le problème 3.1. Elle est basée sur des schémas de relaxation et la résolution d'inégalités matricielles linéaires. Cette approche a été développée dans les références [56] et [57].

Dans la section 2.3, nous avons établi qu'en l'absence de contraintes sur la commande, la stabilité quadratique du système (3.1) contrôlé par le retour d'état linéaire $u = Kx$ est assurée par l'existence d'une matrice de Lyapunov définie positive P telle que

– Pour les incertitudes bornées en norme, la LMI

$$\begin{bmatrix} (A_0 + B_0K)'P + P(A_0 + B_0K) & \star & \star \\ D'P & -I & \star \\ E_1 + E_2K & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

est vérifiée.

– Pour les incertitudes polytopiques, les LMIs

$$(A_i + B_jK)'P + P(A_i + B_jK) \prec 0$$

sont vérifiées pour tous les sommets $i = 1, \ldots, n_A$ et $j = 1, \ldots, n_B$.

A l'aide des résultats du paragraphe 1.2.3 et en suivant le même raisonnement que dans la section 3.4, nous étudions la stabilité quadratique locale du système saturé (3.3) dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$.

Théorème 3.2 *Le système (3.3) est localement quadratiquement stable dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ si la matrice de Lyapunov P, les scalaires $\underline{g}_i$ et le scalaire r vérifient les inégalités*

– *pour les incertitudes bornées en norme*

$$\begin{bmatrix} (A_0 + B_0\underline{G}_kK)'P + P(A_0 + B_0\underline{G}_kK) & \star & \star \\ D'P & -I & \star \\ E_1 + E_2\underline{G}_kK & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad k = 1, \ldots, 2^m \tag{3.7}$$

– *pour les incertitudes polytopiques*

$$(A_i + B_j\underline{G}_kK)'P + P(A_i + B_j\underline{G}_kK) \prec 0, \quad k = 1, \ldots, 2^m \tag{3.8}$$

et les inégalités

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} P & \star \\ \underline{g}_iK_i & r\overline{u}_i^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ 0 < \underline{g}_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Preuve : Tout comme dans la preuve du théorème 3.1, nous déduisons un modèle polytopique pour le système saturé dont les sommets sont construits à partir des scalaires

$\underline{g}_i$. A l'aide des propriétés géométriques de la section 2.4, ce modèle polytopique est valide si l'inclusion de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ dans le polytope $\mathcal{P}$ est assurée, d'où les inégalités (3.9). La stabilité quadratique du système saturé est alors assurée par la stabilité de chaque sommet du modèle polytopique, d'où les LMIs (3.7) ou (3.8). □

Nous rappelons que notre l'objectif est d'obtenir le plus grand ellipsoïde $\mathcal{E}$ possible. Les différentes manières de jouer sur la matrice P et le scalaire r afin d'augmenter la taille de $\mathcal{E}$ sont énumérées dans la section 2.4. La plus grande limitation reste cependant le fait que les inégalités matricielles (3.7) et (3.8) sont bilinéaires (BMIs) en les variables P et $\underline{g}_i$, alors que les inégalités (3.9) restent linéaires en P, $\underline{g}_i$ et r. Comme mentionné dans la section 2.3, il n'existe pas à ce jour de méthode de résolution efficace pour les BMIs. Nous sommes donc contraints de développer des schémas de relaxations LMI.

Le principe de base consiste à fixer une variable de décision tout en laissant varier les autres variables apparaissant dans le problème. De cette manière, les BMIs deviennent des LMIs convexes faciles à résoudre, au détriment de la convergence du procédé et de la nature optimale de la solution. Les relaxations LMI qui s'avèrent utiles ici sont énumérées ci-dessous.

- LMIR1 : P étant donnée, trouver $\underline{g}$ et r en minimisant r
- LMIR2 : P étant donnée, trouver $\underline{g}$ et r en minimisant $r + \underline{g}_1 + \ldots + \underline{g}_m$
- LMIR3 : $\underline{g}$ et r étant données, trouver P en minimisant trace P
- LMIR4 : $\underline{g}$ et r étant données, trouver P en minimisant $\log\det P$

le tout sous les contraintes (3.7) ou (3.8) et (3.9). Il est nécessaire de noter que la relaxation LMIR4 est en fait effectuée en minimisant le critère convexe $\log\det W^{-1}$ suite à un changement de variable $W = P^{-1}$, voir la section 2.4. Notre algorithme effectue successivement les quatre procédures de relaxation décrites ci-dessus.

Algorithme ANALYSE LMI

Entrée : Le système en boucle fermée (3.3).

Sortie : La matrice de Lyapunov P et le scalaire r tels que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ soit un domaine de stabilité du système (3.3) avec saturations.

Pas 1 : Fixer $\underline{g}_i = 1$ pour $i = 1, \ldots, m$. Résoudre en P les LMIs (3.7) ou (3.8) et les LMIs (3.9).

Pas 2 : Résoudre la relaxation LMIR1, LMIR2, LMIR3 ou LMIR4.

Pas 3 : Retourner au pas 1 jusqu'à ce qu'un certain critère d'arrêt soit activé.

Cet algorithme présente les limitations suivantes.

- Un point essentiel est le choix de la procédure de relaxation LMI au pas 2. Il ne semble pas possible de deviner de prime abord quelle séquence de relaxations produira le plus rapidement l'ensemble $\mathcal{E}$ de taille maximale. Aucune propriété de convergence, même locale, n'a d'ailleurs été établie jusqu'alors pour ce type de méthodes.
- Le critère d'arrêt au pas 3 dépend du comportement de l'algorithme. En effet, même si chaque itération supplémentaire permet d'augmenter la taille de $\mathcal{E}$, cette augmentation peut parfois s'avérer négligeable. Un critère d'arrêt peut donc être l'absence de variation de taille de $\mathcal{E}$ après plusieurs itérations successives.

3.6 Exemples Numériques

3.6.1 Premier Exemple

Nous considérons le système incertain étudié dans [67] qui a pour matrices nominales

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0.1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices sont affectées par des incertitudes additives non structurées de norme inférieure ou égale à 0.1. Nous modélisons ces incertitudes à l'aide de la représentation bornée en norme et des matrices

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E_1 = E_2 = \frac{1}{20}[1 \quad 1].$$

Les niveaux de saturation sont fixés à

$$\overline{u}_1 = 5 \quad \overline{u}_2 = 2.$$

Le plus grand ensemble de conditions initiales stabilisables grâce au retour d'état

$$u = -\begin{bmatrix} 0.7283 & 0.0338 \\ 0.0135 & 1.3583 \end{bmatrix} x$$

qui a été obtenu dans [67] est la sphère

$$\mathcal{S} = \{x : x'x \leq 2265\}.$$

Approche ARE

Nous illustrons tout d'abord les résultats obtenus avec l'algorithme ANALYSE ARE. Nous considérons trois cas différents, suivant les valeurs que peuvent prendre les matrices de pondération : $R = I$, $Q = I$ puis $R = 0.1 \cdot I$, $Q = I$ et enfin $R = 0.1 \cdot I$, $Q = 0.1 \cdot I$.

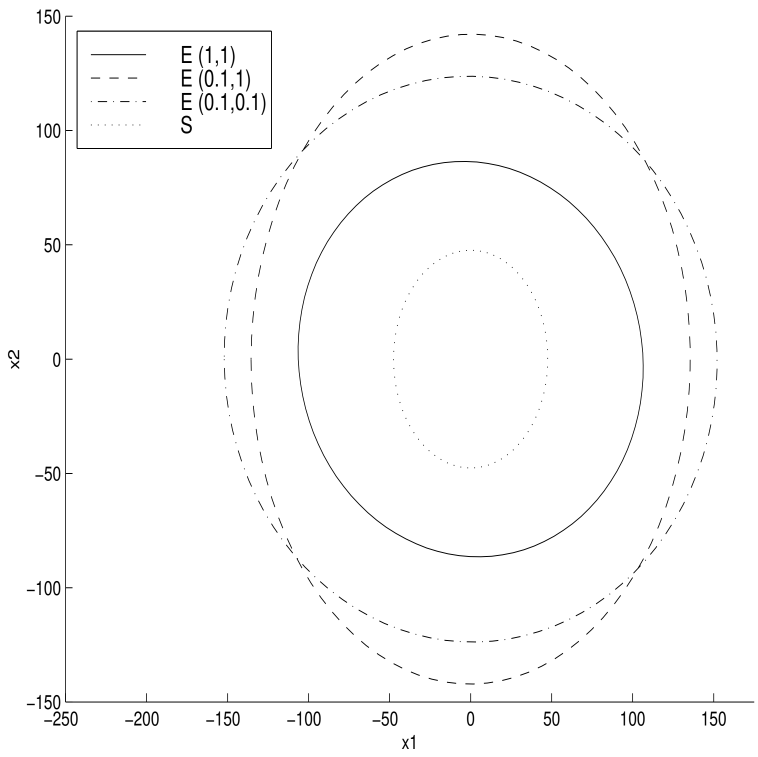

FIG. 3.1: Ellipsoïdes $\mathcal{E}$ obtenus par l'approche ARE.

L'ellipse $\mathcal{E}$ est représentée sur la figure 3.1 pour les trois cas mentionnés ci-dessus. A titre de comparaison, nous avons également représenté la sphère $\mathcal{S}$ obtenue dans [67].

Nous pouvons remarquer d'une part, que le choix des matrices de pondération R et Q influe sur la taille de $\mathcal{E}$, et d'autre part, que la sphère $\mathcal{S}$ est toujours incluse dans les ensembles $\mathcal{E}$ que nous obtenons, ce qui prouve l'intérêt de notre approche. Nous avons essayé d'autres valeurs pour les matrices de pondération sans pour autant améliorer ces résultats de façon significative. De plus, il semble difficile de prédire la variation de taille de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ en fonction des éléments des matrices de pondération. En théorie nous pouvons poser un problème d'optimisation globale pour résoudre ce problème [109], mais il n'existe pas de méthode numérique efficace pour le résoudre.

Approche LMI

Intéressons-nous maintenant aux résultats obtenus à l'aide des inégalités matricielles linéaires et de l'algorithme ANALYSE LMI. Dans les tables 3.1 et 3.2, nous avons reporté deux séquences de relaxations LMI avec les rapports entre le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ obtenu entre chaque itération et celui de la sphère $\mathcal{S}$ obtenue dans [67]. Après seulement quelques itérations, nous avons pu augmenter l'ensemble des conditions initiales stables d'un facteur 676.8 dans le premier cas et 1877 dans le deuxième cas. Ces ensembles sont représentés sur la figure 3.2. A titre de comparaison, nous avons également représenté la sphère $\mathcal{S}$.

LMIR numéro	2	3	2	3	2	3
Rapport des volumes	0.0428	0.2123	0.2123	0.2125	21.8	**676.8**

TAB. 3.1: Première séquence de relaxations.

LMIR numéro	4	2	4	2
Rapport des volumes	0.2125	0.2125	59.41	**1877**

TAB. 3.2: Deuxième séquence de relaxations.

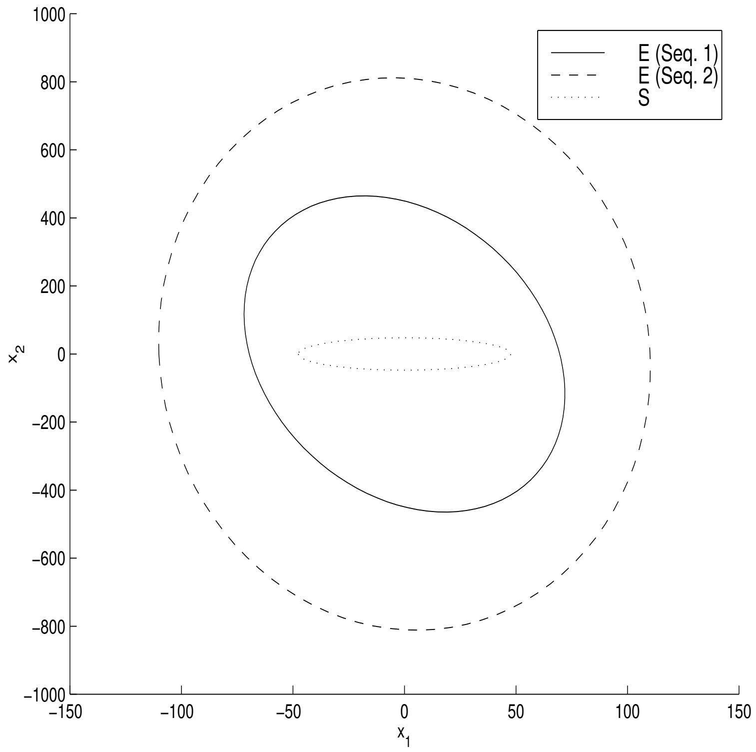

FIG. 3.2: Ellipsoïdes $\mathcal{E}$ obtenus par l'approche LMI.

Nous pouvons remarquer que, tout comme avec l'approche ARE, nous avons pu améliorer de façon significative les résultats obtenus dans [67].

3.6.2 Deuxième Exemple

La linéarisation des équations de mouvement d'un satellite décrit dans [26] mène à un système (3.3) dont les matrices en boucle ouverte sont

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3p(t)^2 & 0 & 0 & 2p(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2p(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le paramètre incertain variant dans le temps $p(t)$ modélise la période de rotation du satellite. Elle est comprise entre 0.5 et 1.5. Les niveaux de saturations sont $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = 15$. Afin de représenter l'incertitude sur $p(t)$, nous considérons que la matrice $A(t)$ appartient à un polytope de matrices

$$\mathcal{A} = \mathrm{Co}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.75 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.75 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dans [26], les auteurs montrent que le retour d'état linéaire

$$u = \begin{bmatrix} -19 & -13 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -8 \end{bmatrix} x$$

stabilise le système linéaire en présence de saturation pour toute condition initiale appartenant à la sphère unité

$$\mathcal{S} = \{x : x'x \leq 1\}.$$

quand $p(t)$ est égal à 1. Cependant, le retour d'état ci-dessus n'est pas nécessairement stabilisant pour toute incertitude $p(t)$ admissible. L'ensemble $\mathcal{S}$ n'est donc pas nécessairement un ensemble de conditions initiales robustement stables quand $p(t)$ varie.

A titre de comparaison, nous avons appliqué l'algorithme Analyse LMI basé sur les relaxations LMIs. Les rapports de volume entre les ellipsoïdes $\mathcal{E}$ obtenus grâce à notre algorithme et la sphère $\mathcal{S}$ sont

- 7.90 après une itération de LMIR 3
- 11.30 après une itération de LMIR 4.

Les autres schémas de relaxations ou des itérations supplémentaires n'ont pas permis d'améliorer ces chiffres. Les intersections de ces ensembles avec les sous-espaces bi-dimensionnels sont représentées sur la figure 3.3.

Ces résultats montrent clairement l'intérêt de notre approche puisque nous obtenons un ensemble $\mathcal{E}$ de conditions initiales que nous garantissons être stables même quand le paramètre $p(t)$ varie. Nous devons noter que, malgré le fait que le volume de $\mathcal{E}$ est bien supérieur à celui de $\mathcal{S}$, le deuxième ensemble n'est pas inclus dans le premier.

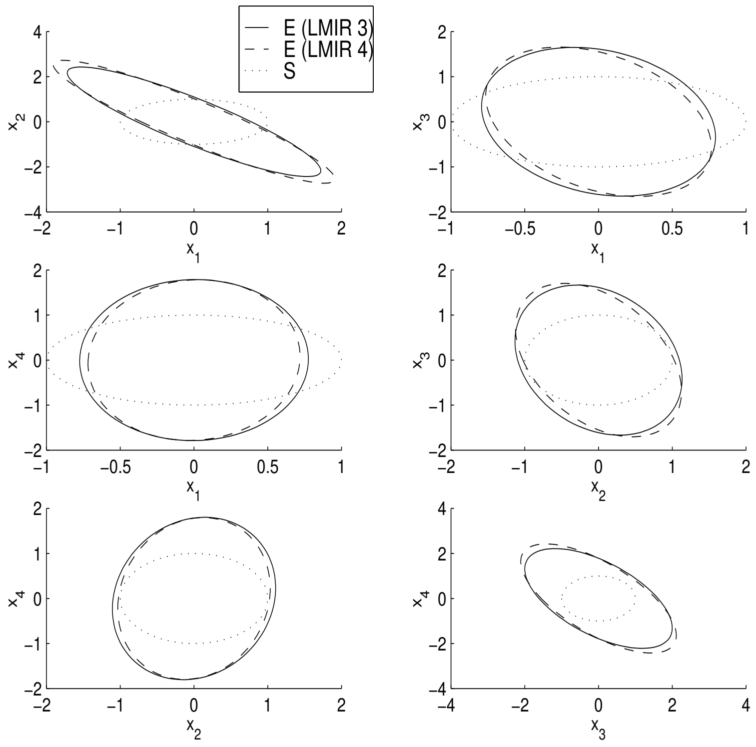

FIG. 3.3: Ellipsoïdes $\mathcal{E}$ obtenus par l'approche LMI.

3.7 Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons évoqué les avantages et inconvénients respectifs des méthodes d'analyse décrites dans ce chapitre.

- Les deux méthodes ARE et LMI sont très faciles à implanter et ne font appel qu'à des outils efficaces et répandus. Ce n'est pas le cas par exemple avec l'approche par régions polyédrales de saturation [40, 41, 42] ou avec l'approche par le critère de Popov [90, 91, 62].
- La méthode ARE est plus avantageuse que la méthode LMI au niveau de la complexité algorithmique. Notamment, il n'existe pas de propriété de convergence pour les méthodes de relaxations LMI que nous proposons. Cependant, nous disposons à présent d'outils numériques suffisamment puissants pour que cette différence entre ARE et LMI ne se ressente que sur des problèmes de taille importante.
- Les deux méthodes ARE et LMI sont potentiellement conservatives et ne sont basées que sur des conditions suffisantes de stabilité. Le conservatisme est introduit au niveau
  - de la modélisation des incertitudes,
  - de la modélisation polytopique des saturations,
  - du choix d'une matrice de Lyapunov unique valable sur l'ensemble des incertitudes.
- La méthode LMI permet de traiter à la fois les incertitudes bornées en norme et les incertitudes polytopiques, alors que la méthode ARE ne traite que les incertitudes

bornées en norme.

- La méthode LMI est plus souple que la méthode ARE. Notamment, la taille de l'ensemble de conditions initiales stables peut être augmentée en jouant sur la matrice de Lyapunov apparaissant dans les LMIs, alors que celle-ci est fixée arbitrairement avec la méthode ARE.

Il est donc bien difficile de conseiller une méthode plus qu'une autre. Notre expérience montre que cela dépend fortement du problème traité.

Troisième partie

Synthèse

Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème de synthèse d'une loi de commande pour un système linéaire incertain avec des contraintes d'amplitude sur la commande. Les différentes approches qu'offre la littérature pour traiter ce problème sont évoquées dans les paragraphes suivants. Nous soulignons alors leurs spécificités et leurs limitations. Nous présentons ensuite en détail nos résultats dans le cadre des trois approches que nous avons suivies :

- Approche par commande saturante (chapitre 4).
- Approche par commande linéaire par morceaux (chapitre 5).
- Approche par commande polynomiale (chapitre 6).

En dépit de son importance pratique, le problème de synthèse de lois de commande robustes et contraintes n'a fait l'objet jusqu'à présent que d'un nombre restreint d'études. Cela s'explique sans doute par la difficulté inhérente au problème et le manque d'outils adéquats pour le résoudre. Plusieurs travaux récents témoignent cependant de progrès significatifs.

Historiquement, le problème de synthèse a d'abord été étudié en considérant implicitement l'effet des saturations. Il s'agit de l'approche dite "anti wind-up" : la commande est tout d'abord calculée en ignorant les limitations en amplitude qu'elle doit satisfaire. Le bon fonctionnement de celle-ci est alors testé a posteriori sur le système en boucle fermée en présence de saturations [69].

Une autre approche consiste à prendre en compte explicitement les contraintes d'amplitude sur la commande. Dans cette optique, nous pouvons distinguer deux grandes catégories de techniques de synthèse, à savoir celles autorisant la saturation et celles n'autorisant pas la saturation.

Dans la première catégorie, il s'agit donc de mettre en oeuvre des techniques exploitant la nature non-linéaire due aux saturations (voir paragraphe 1.2.3). Ces techniques peuvent être développées dans trois contextes de stabilisation, à savoir la stabilisation globale, semi-globale ou locale. Le fait d'obtenir ou non des résultats dans chacun de ces trois contextes dépend étroitement des hypothèses de stabilité du système en boucle ouverte. Par ailleurs, comme nous allons le voir dans la description qui suit, dans chacun de ces trois contextes, lorsque des solutions peuvent être obtenues, les régions de stabilité induites sont de natures très différentes.

- Dans le cadre de la stabilisation globale, il s'agit de stabiliser n'importe quelle condition initiale de l'espace d'état. La région de stabilité est alors l'espace d'état tout entier. Il a été montré [103] qu'une condition nécessaire pour l'obtention d'une loi de commande saturante globalement stabilisante est l'absence de modes strictement instables en boucle ouverte [34, 77]. Les lois de commande globalement stabilisantes sont généralement des combinaisons linéaires ou non-linéaires de saturations [22, 103, 102].

- Dans le cadre de la stabilisation semi-globale, il s'agit de stabiliser toute condition initiale de l'espace d'état appartenant à une région bornée incluant l'origine et aussi grande que l'on veut. Il a été montré qu'une condition nécessaire à l'existence d'une loi de commande semi-globalement stabilisante est l'absence de modes strictement instables en boucle ouverte. La distinction entre stabilisation globale et semi-globale vient du fait que, dans le cas de la stabilité semi-globale l'évolution du système est restreinte à une région spécifique de l'espace d'état. De plus, les lois de commande globalement stabilisantes n'améliorent pas de manière significative la dynamique du système en boucle ouverte, voire, dans certains cas, la dégradent. Les lois de commande stabilisant semi-globalement peuvent être générées à l'aide d'AREs paramétrées [94, 81] ou de LMIs [43], et donc peuvent inclure certaines spécifications de performances.

- Dans le cadre de la stabilisation locale, il s'agit de stabiliser toute condition initiale de l'espace d'état appartenant à une région compacte incluant l'origine. L'intérêt de cette approche découle du fait qu'elle ne nécessite aucune hypothèse de stabilité pour le système en boucle ouverte. En particulier, lorsque le système en boucle ouverte est strictement instable, seule la stabilisation locale peut être envisagée. De plus, l'approche locale permet de prendre en compte quelques spécifications (telles que performance, découplage ou placement de pôles) ne pouvant pas être satisfaites en utilisant les lois de commande globalement ou semi-globalement stabilisantes. Les lois de commande stabilisant localement sont générées à l'aide d'AREs ou de LMIs paramétrées plus ou moins complexes [109, 40, 110, 43, 36].

Dans la deuxième catégorie, il s'agit de mettre en oeuvre des techniques de synthèse évitant les saturations. La loi de commande, de nature nécessairement locale, est alors conçue de telle sorte que le système en boucle fermée reste dans son domaine de comportement linéaire. Cette approche est sans doute la plus étudiée dans la littérature. La plupart des résultats obtenus dans ce contexte font appel à la notion d'invariance positive brièvement introduite dans le paragraphe 1.3.3. Deux types de domaines invariants sont utilisés : des domaines ellipsoïdaux associés à des fonctions de Lyapunov quadratiques, et des domaines polyédraux associés à des fonctions de Minkowski polyédrales [46, 17]. Afin d'assurer l'invariance positive de ces domaines, plusieurs techniques peuvent être utilisées : le lemme étendu de Farkas [45], la programmation linéaire [118, 23], le placement de structure propre [24, 23], le placement de pôles [76, 2], les concepts géométriques d'(A, B)-invariance [48, 27], les normes induites [104] ou l'emboîtement de domaines ellipsoïdaux [121, 36]. Des résultats plus généraux ne faisant pas explicitement appel aux concepts d'invariance positive ont également été proposés dans [18] à l'aide de la programmation convexe et dans [105] à l'aide de la paramétrisation de Youla-Kučera introduite dans la section 2.5.

Notons cependant que la plupart des résultats de synthèse mentionnés ci-dessus ont originalement été développés pour des systèmes saturés en l'absence d'incertitudes. Relativement peu de résultats ont été étendus aux systèmes incertains. Parmi ceux existant nous faisons également le distinguo entre stabilisation avec saturation des commandes et stabilisation sans saturation des commandes.

- Avec saturation des commandes nous pouvons citer [94, 81] dans le cadre de la stabilisation semi-globale, où l'incertitude apparaît de façon indirecte dans la fonction de saturation, et surtout les travaux récents dans le cadre de la stabilisation locale [109, 110] où une incertitude de type borné en norme apparaît dans la matrice dynamique.
- Sans saturation des commandes nous pouvons mentionner [36] pour une approche par ARE paramétrée. Certains résultats basés sur l'invariance positive ont également été étendus aux systèmes incertains, à l'aide de la programmation linéaire [14, 82] où de la notion de $\mathcal{D}$-invariance [16, 108].

D'une façon générale, nous pouvons cependant affirmer qu'une approche unifiée et suffisamment générale à la synthèse de lois de commande robustes en présence de saturations n'a pas encore vu le jour.

Dans cette troisième partie du mémoire, nous proposons donc trois techniques permettant de résoudre ce problème de synthèse. Les trois techniques sont de nature locale. La première approche, développée au chapitre 4, prend en compte les saturations. Elle est basée sur les résultats d'analyse présentés dans la deuxième partie du mémoire. La deuxième approche, développée au chapitre 5, est une extension de la méthode d'inclusion de domaines ellipsoïdaux proposée dans [121, 36]. Finalement, la troisième approche constituant le chapitre 6 fait appel aux méthodes polynomiales évoquées dans la section 2.5. Elle se rapproche des méthodes de programmation convexe présentées dans [18, 105].

Chapitre 4

Commande Saturante

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons nos résultats ayant trait à la stabilisation locale de systèmes incertains en présence de saturations. Nous exploitons la nature non-linéaire des saturations afin d'élargir l'ensemble des conditions initiales stabilisables.

L'approche que nous poursuivons est une application à la synthèse des résultats d'analyse proposés dans la deuxième partie du mémoire. Elle a originalement été développée dans [110, 109] dans le cas du retour d'état. Notre contribution est une extension de ces résultats au cas du retour de sortie. Elle a donné lieu à deux publications [59, 60].

Une définition précise du problème traité est proposée dans la section 4.2. Similairement au développement de la deuxième partie du mémoire, nous présentons ensuite nos résultats basés sur les AREs (section 4.3) et les LMIs (section 4.4). Des exemples numériques illustratifs sont étudiés dans la section 4.5 pour montrer les potentialités de notre approche. La section 4.6 conclut ce chapitre en soulignant les avantages et les inconvénients de notre approche.

4.2 Position du problème

Nous considérons le système linéaire continu incertain

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A(t)x + B(t)u \\ y & = & C(t)x + D(t)u \end{array} \qquad (4.1)$$

où x, u sont des vecteurs de dimensions respectives n et m. Afin de représenter les incertitudes affectant ce système, nous supposons que les matrices A, B, C et D appartiennent respectivement à des ensembles compacts $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Dans cette section, nous considérons uniquement les incertitudes bornées en norme introduites dans le paragraphe 1.2.2, où

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} & = & \{A_0 + D_1F(t)E_1, \ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\
\mathcal{B} & = & \{B_0 + D_1F(t)E_2, \ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\
\mathcal{C} & = & \{C_0 + D_2F(t)E_1, \ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\
\mathcal{D} & = & \{D_0 + D_2F(t)E_2, \ \|F(t)\|_2 \leq 1\}
\end{array}$$

pour des matrices nominales A_0, B_0, C_0, D_0 et des matrices constantes D_1, D_2, E_1, E_2 données.

En pratique, le vecteur d'état x n'est pas nécessairement disponible pour générer une loi de commande. Très souvent, une information partielle est disponible à travers la sortie y et un retour de sortie doit être considéré, tout comme nous l'avons décrit au paragraphe 1.3.4. De façon classique, nous pouvons construire un compensateur dynamique strictement propre

$$\begin{array}{rcl}
\dot{x}_c & = & A_cx_c + B_cu_c \\
y_c & = & C_cx_c
\end{array} \tag{4.2}$$

où x_c est l'état du compensateur, u_c est l'entrée du compensateur et y_c sa sortie. Par la suite, nous supposons que le compensateur est d'ordre plein, c'est-à-dire que les vecteurs d'état x et x_c ont la même dimension. Nous regroupons les matrices du compensateur (4.2) dans une seule matrice

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Nous supposons que la commande du système (4.1) est saturée et que par conséquent les relations de bouclage entre le système (4.1) et son compensateur (4.2) sont les suivantes

$$\begin{array}{rcl}
u_c & = & y \\
u & = & \mathrm{sat}(y_c) = \mathrm{sat}(C_cx_c).
\end{array} \tag{4.4}$$

Tout comme au paragraphe 1.2.3, nous considérons une fonction de saturation symétrique

$$u_i = \mathrm{sat}(y_{ci}) = \left\{ \begin{array}{ccl} \overline{u}_i & \mathrm{si} & y_{ci} > \overline{u}_i \\ y_{ci} & \mathrm{si} & |y_{ci}| \leq \overline{u}_i \\ -\overline{u}_i & \mathrm{si} & y_{ci} < -\overline{u}_i \end{array} \right.$$

pour chaque composante u_i et y_{ci} des vecteurs de commande et de sortie du compensateur, où $\overline{u}_i$ est un scalaire positif donné pour $i = 1, \ldots, m$.

Définissons le vecteur d'état étendu

$$z = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix},$$

la matrice de retour d'état

$$\hat{\mathbf{K}} = [0 \quad C_c]$$

et les matrices incertaines

$$\begin{array}{rcl}\hat{\mathbf{A}}(t) & \in & \left\{ \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ B_cC_0 & A_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ B_cD_2 \end{bmatrix} F(t)[E_1 \quad 0],\ \|F(t)\|_2 \leq 1 \right\} \\ \hat{\mathbf{B}}(t) & \in & \left\{ \begin{bmatrix} B_0 \\ B_cD_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ B_cD_2 \end{bmatrix} F(t)E_2,\ \|F(t)\|_2 \leq 1 \right\}.\end{array}$$

Le système (4.1) contrôlé par la loi de commande saturée (4.4) devient non-linéaire par bouclage et s'écrit

$$\dot{z} = \hat{\mathbf{A}}(t)z + \hat{\mathbf{B}}(t)\mathrm{sat}(\hat{\mathbf{K}}z) \tag{4.5}$$

Tout comme dans la deuxième partie du mémoire, nous nous basons sur la notion de stabilité quadratique locale introduite au paragraphe 1.3.3, associée à l'existence d'une matrice de Lyapunov définie positive $\mathbf{P}$. Une approximation naturelle de l'ensemble des conditions initiales qui peuvent être stabilisées est alors l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{z : z'\mathbf{P}z \leq 1/r\}$$

où r est un scalaire positif. Il semble alors naturel de rechercher la matrice $\mathbf{P}$ et le scalaire r tels que $\mathcal{E}$ est de taille maximale. Le problème que nous allons résoudre est donc le suivant.

Problème 4.1 *Trouver la matrice de Lyapunov $\mathbf{P}$, le scalaire r et la matrice du compensateur Θ tels que le système incertain à commande saturée (4.5) est localement quadratiquement stable dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ de plus grande taille.*

4.3 Approche ARE

La première approche pour résoudre le problème 4.1 est une extension à la synthèse par retour de sortie des résultats d'analyse proposés dans la section 3.4.

Le premier résultat important sur lequel nous allons nous appuyer est une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique par retour dynamique de sortie en l'absence de contraintes sur la commande.

Lemme 4.1 *Le système (4.1), sans contraintes sur la commande, est stabilisable quadratiquement par un compensateur du type (4.2) si, et seulement si, il existe deux matrices définies positives X et Y et un scalaire positif ϵ solutions des AREs couplées*

$$\begin{array}{l} A_1'X_\epsilon + X_\epsilon A_1 + X_\epsilon(D_1D_1' - B_0R_{1\epsilon}^{-1}B_0')X_\epsilon + E_1'(I - E_2R_{1\epsilon}^{-1}E_2')E_1 + Q_{1\epsilon} = 0 \\ A_2Y_\epsilon + Y_\epsilon A_2' + Y_\epsilon(E_1'E_1 - C_0'R_{2\epsilon}^{-1}C_0)Y_\epsilon + D_1(I - D_2'R_{2\epsilon}^{-1}D_2)D_1' + Q_{2\epsilon} = 0 \\ Z_\epsilon = Y_\epsilon^{-1} - X_\epsilon \succ 0 \end{array} \tag{4.6}$$

avec

$$\begin{array}{l} X_\epsilon = \epsilon X \quad Y_\epsilon = \epsilon Y \quad R_{1\epsilon} = \epsilon R_1 + E_2'E_2 \quad R_{2\epsilon} = \epsilon R_2 + D_2D_2' \quad Q_{1\epsilon} = \epsilon Q_1 \quad Q_{2\epsilon} = \epsilon Q_2 \\ A_1 = A_0 - B_0R_{1\epsilon}^{-1}E_2'E_1 \quad A_2 = A_0 - D_1D_2'R_{2\epsilon}^{-1}C_0. \end{array}$$

Si ces relations sont satisfaites, les matrices du compensateur (4.2) sont les suivantes

$$\begin{array}{rcl} A_c & = & A_0 + B_0 G + D_1 D_1' X_\epsilon - Z_\epsilon^{-1} Y_\epsilon^{-1} H (C_0 + D_2 D_1' X_\epsilon) - Z_\epsilon^{-1} Q_{1\epsilon} \\ B_c & = & Z_\epsilon^{-1} Y_\epsilon^{-1} H \\ C_c & = & G \end{array} \tag{4.7}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} G & = & -R_{1\epsilon}^{-1}(B_0' X_\epsilon + E_2' E_1) \\ H & = & (Y_\epsilon C_0' + \epsilon^{-1} D_1 D_2') R_{2\epsilon}^{-1}. \end{array}$$

Preuve : Ce résultat est classique. Il découle de la généralisation au retour de sortie des résultats du paragraphe 2.2.1. La preuve est développée en détail dans [95]. □

En choisissant pour vecteur d'état en boucle fermée le vecteur

$$\xi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} z$$

le système (4.5) s'écrit

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}(t)\xi + \mathbf{B}(t)\mathrm{sat}(\mathbf{K}\xi) \tag{4.8}$$

où

$$\mathbf{A}(t) \in \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ B_c C_0 - A_0 + A_c & A_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_1 \\ B_c D_2 - D_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} F(t) \underbrace{[E_1 \quad 0]}_{\mathbf{E}_1}, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1 \right\}$$

$$\mathbf{B}(t) \in \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} B_0 \\ B_c D_0 - B_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_1 \\ B_c D_2 - D_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} F(t) \underbrace{E_2}_{\mathbf{E}_2}, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1 \right\}$$

et

$$\mathbf{K} = [C_c \quad C_c].$$

En l'absence de contraintes sur la commande, le système (4.8) est en régime linéaire et s'écrit

$$\dot{\xi} = (\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{K})\xi. \tag{4.9}$$

Nous pouvons alors établir l'existence d'une matrice de Lyapunov bloc-diagonale pour le système (4.9).

Lemme 4.2 *Supposons que X, Y et ϵ soient solutions des AREs couplées du lemme 4.1 et définissons*

$$\hat{Q}_1 = \epsilon G' R_1 G + Q_{1\epsilon} \quad \hat{Q}_2 = \epsilon H R_2 H' + Q_{2\epsilon}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} X_\epsilon & 0 \\ 0 & Z_\epsilon \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 & \star \\ \hat{Q}_1 & \hat{Q}_1 + Y_\epsilon^{-1} \hat{Q}_2 Y_\epsilon^{-1} \end{bmatrix}.$$

Alors la matrice symétrique définie positive $\mathbf{P}$ est solution de l'ARE

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK})'\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + \mathbf{PDD}'\mathbf{P} + (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{K})'(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{K}) + \mathbf{Q} = 0. \tag{4.10}$$

C'est donc une matrice de Lyapunov pour le système (4.9).

Preuve : Ce résultat est classique. La preuve est développée en détail dans [95]. □

Tout comme dans la section 3.4, nous utilisons les résultats du paragraphe 1.2.3 pour modéliser les saturations. Nous définissons 2^m matrices diagonales $\underline{G}_k$ pour $k = 1, \ldots, 2^m$ dont les éléments diagonaux prennent la valeur 1 ou $\underline{g}_i$ pour $i = 1, \ldots, m$. Nous pouvons alors donner le résultat suivant.

Théorème 4.1 *Supposons que les AREs couplées du lemme 4.1 aient une solution et que $\mathbf{P}$ soit la matrice de Lyapunov construite au lemme 4.2. Le système incertain saturé (4.5) est localement quadratiquement stabilisable dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ si le vecteur $\underline{g}$ et le scalaire r vérifient les inégalités matricielles*

$$\begin{aligned} &(\mathbf{PB} + \mathbf{E}_1'\mathbf{E}_2)(I - \underline{G}_k)\mathbf{K} + \mathbf{K}'(I - \underline{G}_k)(\mathbf{PB} + \mathbf{E}_1'\mathbf{E}_2)' \\ &\quad + \mathbf{K}'(\mathbf{E}_2'\mathbf{E}_2)\mathbf{K} - \mathbf{K}'\underline{G}_k\mathbf{E}_2'\mathbf{E}_2\underline{G}_k\mathbf{K} + \mathbf{Q} \succ 0, \quad k = 1, \ldots, 2^m \end{aligned} \tag{4.11a}$$

$$\underline{g}_i^2 \mathbf{K}_i \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}_i' / \overline{u}_i^2 \leq r, \quad 0 < \underline{g}_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4.11b}$$

Un compensateur stabilisant est alors donné par le lemme 4.1.

Preuve : Similaire à la preuve du théorème 3.1 dans la deuxième partie de ce mémoire. □

Dans le but de résoudre le problème 4.1, nous devons augmenter tant que possible la taille de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$. Les résultats du paragraphe 2.4.1 permettent donc d'affirmer qu'il est souhaitable de diminuer r et donc de diminuer les scalaires $\underline{g}_i$ tout en préservant la stabilité quadratique locale du système saturé. L'algorithme suivant formalise ces observations.

Algorithme SYNTHÈSE ARE

Entrée : Le système en boucle ouverte (4.1).

Sortie : Le compensateur (4.2), la matrice de Lyapunov $\mathbf{P}$ et le scalaire r tels que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ soit un domaine de stabilité du système incertain saturé en boucle fermée (4.5).

Pas 1 : Résoudre les AREs couplées du lemme 4.1 à l'aide de la technique décrite dans la section 2.2. S'il n'y a pas de solution, alors le système n'est pas quadratiquement stabilisable par retour de sortie, même localement. Sinon, construire la matrice de Lyapunov $\mathbf{P}$ décrite au lemme 4.2.

Pas 2 : Trouver les scalaires $\underline{g}_i$ qui minimisent r tout en vérifiant les inégalités (4.11). On peut par exemple fixer les $\underline{g}_i$ à une même valeur et effectuer une recherche unidimensionelle.

Cet algorithme présente les mêmes limitations que l'algorithme ANALYSE ARE proposé dans la section 3.4, à savoir

- Pour augmenter la taille de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ on joue uniquement sur le paramètre r au pas 2, la matrice de Lyapunov $\mathbf{P}$ étant fixée dès le pas 1. Or, le choix de $\mathbf{P}$ peut s'avérer prépondérant.
- Le choix de la matrice $\mathbf{P}$ est notamment influencé par les matrices de pondération R_1, Q_1, R_2 et Q_2 intervenant dans les AREs couplées (4.6), mais d'une façon difficilement quantifiable. Il paraît donc assez difficile d'utiliser les degrés de liberté que sont les choix de R_1, Q_1, R_2 et Q_2 dans le but d'augmenter la taille de $\mathcal{E}$.

4.4 Approche LMI

L'approche LMI pour la synthèse d'un compensateur dynamique robustement stabilisant en présence de saturations permet de contourner certaines difficultés inhérentes à l'approche ARE du paragraphe précédent.

En l'absence de contraintes sur la commande, la stabilisabilité quadratique par retour de sortie découle de résultats classiques de commande $\mathcal{H}_\infty$, comme précisé dans [66, 25]. A l'aide du lemme borné réel [35], des conditions LMI ont été proposées pour résoudre le problème. Elles sont résumées dans le lemme suivant.

Lemme 4.3 *Le système (4.1) sans contraintes sur la commande est quadratiquement stabilisable par le compensateur dynamique (4.2) si, et seulement si, il existe des matrices symétriques R et S vérifiant les LMIs suivantes*

$$\begin{gathered}
\begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_0R + RA_0' + D_1D_1' & \star \\ E_1R & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \\
\begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_0'S + SA_0 + E_1'E_1 & \star \\ D_1'S & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \\
\begin{bmatrix} R & \star \\ I & S \end{bmatrix} \succeq 0
\end{gathered} \tag{4.12}$$

où $\mathcal{N}_R$ et $\mathcal{N}_S$ représentent les bases respectives des noyaux des matrices $[B_0' \quad E_2']$ et $[C_0 \quad D_2]$.

Preuve : Imposer la stabilisabilité quadratique du système (4.1) revient à imposer que la norme $\mathcal{H}_\infty$ de la fonction de transfert entre z et w pour le système linéaire

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A_0x + B_0u + D_1w \\ z & = & E_1x + E_2u \\ y & = & C_0x \qquad + D_2w \end{array}$$

soit inférieure à 1. L'ensemble de LMIs (4.12) découle alors de la formulation LMI de l'existence de compensateurs $\mathcal{H}_\infty$ sous-optimaux pour le système ci-dessus [35]. □

Une matrice de Lyapunov

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} S & \star \\ N' & T \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

pour le système en boucle fermée (4.5) est alors calculée comme étant l'unique solution du système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} S & I \\ N' & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & M' \end{bmatrix}$$

où M, N sont des matrices de rang plein telles que $MN' = I - RS$. En utilisant les notations

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & D_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{N}_P = \begin{bmatrix} N' & T & 0 & 0 \\ B_0'S & B_0'N & 0 & E_2' \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Q}_P = \begin{bmatrix} A_0'S + SA_0 & \star & \star & \star \\ N'A_0 & 0 & \star & \star \\ D_1'S & D_1'N & -I & \star \\ E_1 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.4 *Supposons que les LMIs (4.12) sont faisables et construisons la matrice de Lyapunov* $\mathbf{P}$ *donnée en (4.13). Alors si* $\mathbf{P}$ *est fixée, la LMI suivante en* Θ

$$\mathcal{Q}_P + \mathcal{M}'\Theta'\mathcal{N}_P + \mathcal{N}_P'\Theta\mathcal{M} \prec 0 \tag{4.14}$$

paramétrise les compensateurs (4.2) qui stabilisent quadratiquement le système (4.1) en l'absence de contraintes sur la commande.

Preuve : La preuve est basée sur le lemme borné réel, voir [35]. □

Puisque la matrice de Lyapunov $\mathbf{P}$ doit être fixée dans l'inégalité matricielle (4.14), le lemme ci-dessus ne fournit pas nécessairement une paramétrisation de l'ensemble des compensateurs qui stabilisent quadratiquement le système (4.1). Différents ensembles convexes de compensateurs stabilisants peuvent être décrits pour différents choix de matrices de Lyapunov.

Nous allons maintenant combiner les résultats ci-dessus et la modélisation polytopique des saturations décrite dans le paragraphe 1.2.3 afin de résoudre le problème 4.1.

Théorème 4.2 *Supposons que l'ensemble LMI (4.12) est faisable. S'il existe une matrice* $\mathbf{P}$ *donnée en (4.13), une matrice* Θ *donnée en (4.3), des scalaires* $\underline{g}_i$ *et un scalaire* r *tels que*

$$\mathcal{Q}_P + \mathcal{M}'\Theta'\underline{\mathbf{G}}_k\mathcal{N}_P + \mathcal{N}_P{}'\underline{\mathbf{G}}_k\Theta\mathcal{M} \prec 0, \quad k = 1, \ldots, 2^m \tag{4.15}$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \star \\ \underline{g}_i\mathbf{K}_i & r\overline{u}_i^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad 0 \leq \underline{g}_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4.16}$$

où

$$\underline{\mathbf{G}}_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \underline{G}_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, 2^m$$

alors la matrice de compensateur Θ *et l'ellipsoïde de Lyapunov* $\mathcal{E}$ *sont solutions du problème 4.1.*

Preuve : Elle se base principalement sur les résultats d'analyse proposés dans la deuxième partie de ce mémoire. Nous construisons un modèle polytopique pour le système saturé en boucle fermée dont les sommets sont construits à partir des scalaires $\underline{g}_i$. A l'aide des propriétés géométriques de la section 2.4, ce modèle polytopique est valide si l'inclusion de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ dans le polyèdre

$$\mathcal{P} = \{x : |\mathbf{K}_i x| \leq \overline{u}_i/\underline{g}_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

est assurée, d'où les inégalités (4.16). La stabilité quadratique du système saturé est alors assurée par la stabilité de chaque sommet du modèle polytopique, d'où les LMIs (4.15).□

Afin d'appliquer le théorème 4.2, on se heurte à une difficulté majeure, à savoir la nature multilinéaire des inégalités matricielles (4.15) en les trois inconnues $\mathbf{P}$, Θ et $\underline{g}$. Par exemple, si la matrice de Lyapunov $\mathbf{P}$ est donnée, un produit de matrices $\underline{G}_k$ et Θ apparaît et les inégalités (4.15) deviennent bilinéaires [38]. De la même façon, lorsque deux variables de décision sont fixées, les inégalités (4.15) deviennent linéaires en la troisième variable.

Les inégalités matricielles multilinéaires sont omniprésentes dans les problèmes de commande robuste. Etant donné qu'elles ne sont pas convexes en général, leurs propriétés numériques sont particulièrement difficiles à établir. Cependant, il existe des méthodes relativement efficaces pour traiter ce type de problèmes non-linéaires. Les techniques de relaxations sont fréquemment utilisées et s'avèrent utiles en pratique. Dans ce qui suit, nous proposons plusieurs schémas de relaxation qui ont pour but de résoudre le problème 4.1 à l'aide de LMIs.

Dans l'esprit de ce qui a été fait dans la partie II, nous proposons les schémas LMI de relaxations (LMIR) suivants

- **LMIR1** : $\mathbf{P}$ et Θ étant données, trouver $\underline{g}$ et r en minimisant $\underline{g}_1 + \cdots + \underline{g}_m$

- **LMIR2** : **P** et $\underline{g}$ étant données, trouver Θ et r en minimisant r

- **LMIR3** : Θ et $\underline{g}$ étant données, trouver **P** et r en minimisant trace **P**

- **LMIR4** : Θ et $\underline{g}$ étant données, trouver **P** en minimisant log det **P**

le tout sous les contraintes (4.15) et (4.16). Les différents critères proposés ci-dessus ont pour origine le type de mesure de la taille de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$, voir la section 2.4. Notons que la relaxation LMIR4 est en fait effectuée en minimisant le critère convexe $\log\det \mathbf{W}^{-1}$ suite à un changement de variable $\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1}$. Notre algorithme de synthèse effectue successivement les quatre procédures de relaxation décrites ci-dessus.

Algorithme SYNTHÈSE LMI

Entrée : Le système en boucle ouverte (4.1).

Sortie : Le compensateur (4.2), la matrice de Lyapunov **P** et le scalaire r tels que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ soit un domaine de stabilité du système incertain saturé en boucle fermée (4.5).

Pas 1 : Résoudre le système LMI (4.12) et construire la matrice de Lyapunov **P** à l'aide de la relation (4.13).

Pas 2 : Résoudre la LMI (4.14) en Θ. Poser $\underline{g}_i = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.

Pas 3 : Résoudre la relaxation LMIR1, LMIR2, LMIR3 ou LMIR4.

Pas 4 : Retourner au pas 1 jusqu'à ce qu'un certain critère d'arrêt soit activé.

Cet algorithme présente les mêmes limitations que l'algorithme ANALYSE LMI proposé dans la deuxième partie du mémoire.

- Un point essentiel est le choix de la procédure de relaxation LMI au pas 3. Il ne semble pas possible de deviner de prime abord quelle séquence de relaxations produira le plus rapidement l'ensemble $\mathcal{E}$ de taille maximale. Aucune propriété de convergence, même locale, n'a d'ailleurs été établie jusqu'alors pour ce type de méthodes.

- Le critère d'arrêt au pas 4 dépend du comportement de l'algorithme. En effet, même si chaque itération supplémentaire permet d'augmenter la taille de $\mathcal{E}$, cette augmentation peut parfois s'avérer négligeable. Un critère d'arrêt peut donc être l'absence de variation de la taille de $\mathcal{E}$ après plusieurs itérations successives.

4.5 Exemples Numériques

4.5.1 Premier Exemple

Nous considérons le système (4.1) étudié dans [67] qui a pour matrices nominales

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0.1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_0 = I \quad D_0 = 0.$$

Ces matrices sont affectées par des incertitudes additives non structurées de norme inférieure ou égale à 0.1. Nous modélisons ces incertitudes à l'aide de la représentation bornée en norme et des matrices

$$D_1 = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E_1 = E_2 = [1 \quad 1] \quad D_2 = 0.$$

Les niveaux de saturation des commandes sont fixés à

$$\overline{u}_1 = 5, \quad \overline{u}_2 = 2.$$

Le but des auteurs de [67] était de déterminer le plus grand domaine de conditions initiales pour lesquelles la loi de commande optimale

$$u = -\begin{bmatrix} 0.7283 & 0.0338 \\ 0.0135 & 1.3583 \end{bmatrix} x$$

assure la stabilité robuste en présence de saturation. Le plus grand ensemble de conditions initiales qui a été obtenu est la sphère

$$\mathcal{S} = \{x : x'x \leq 2265\}.$$

Approche ARE

Nous illustrons tout d'abord notre algorithme Synthèse ARE. Nous avons tracé sur la figure 4.1 les différents ellipsoïdes de conditions initiales $\mathcal{E}_i = \{x : x'Sx \leq 1\}$ obtenus pour différentes matrices de pondérations :

- $\mathcal{E}_1$ pour $R_1 = 10^4 \cdot I$, $R_2 = 10^{-3} \cdot I$, $Q_1 = I$, $Q_2 = 10^3 \cdot I$.
- $\mathcal{E}_2$ pour $R_1 = I$, $R_2 = I$, $Q_1 = I$, $Q_2 = I$.
- $\mathcal{E}_3$ pour $R_1 = 10^4 \cdot I$, $R_2 = I$, $Q_1 = I$, $Q_2 = I$.

Nous avons également représenté l'ensemble $\mathcal{S}$ sur la même figure. Nous pouvons voir que le choix des matrices de pondérations n'est pas évident. Plusieurs tentatives ont été nécessaires pour obtenir l'ensemble $\mathcal{E}_1$ incluant entièrement l'ensemble $\mathcal{S}$ trouvé dans [67].

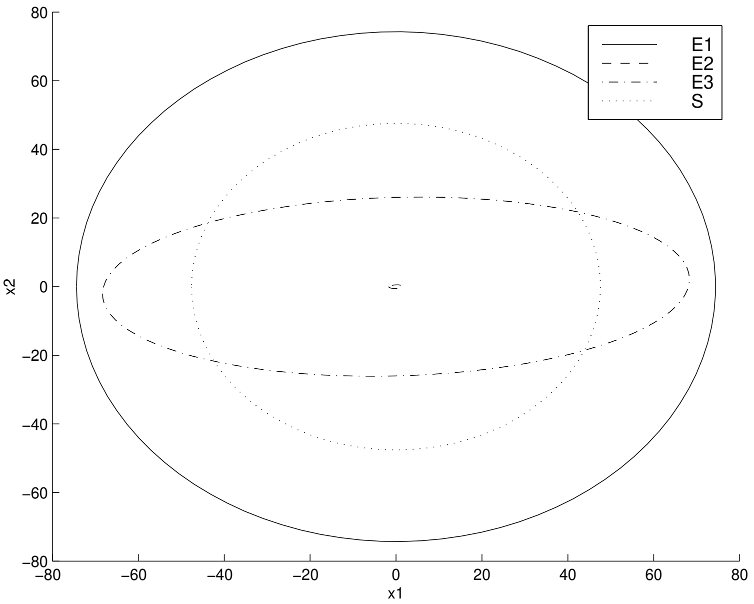

FIG. 4.1: Comparaison des ensembles de conditions initiales.

TAB. 4.1: Séquence de relaxations.

LMIR	log vol $\mathcal{E}_x$
2	-1.358
3	0.5217
1	7.943
3	9.803
1	9.804
3	10.04
1	10.05
3	11.02
1	11.04
3	11.61

4.5.2 Approche LMI

A l'aide de la séquence de relaxations LMI proposée dans la table 4.1, notre algorithme SYNTHÈSE LMI retourne les matrices du compensateur

$$A_c = \begin{bmatrix} -171.2 & 27.06 \\ -68.00 & -626.8 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} -598.2 & 5.539 \\ -4.567 & 149.8 \end{bmatrix}$$
$$C_c = \begin{bmatrix} 0.146 & 0.088 \\ -6.821 & -5.670 \end{bmatrix}.$$

En supposant que l'état du compensateur est initialisé à zéro ($x_c(0) = 0$), nous avons obtenu l'ellipsoïde de conditions initiales $\mathcal{E}_x = \{x : x'Sx \leq 1\}$ où

$$S = 10^{-6} \begin{bmatrix} 290.5 & \star \\ -7.966 & 0.500 \end{bmatrix}$$

est le bloc gauche supérieur de la matrice de Lyapunov $\mathbf{P}$ donnée en (4.13). Dans la table 4.1, nous pouvons voir l'évolution du volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_x$ après chaque itération.

Les pôles obtenus en boucle fermée avec notre compensateur dynamique sont situés à -1.8776, -5.2253, -172.4247 et -621.3724. A titre de comparaison, les pôles en boucle fermée obtenus avec le retour d'état optimal proposé par [67] sont situés à -3.5711 et -4.3287. Notre compensateur ne rajoute donc pas de mode indésirable, et comme le montre la figure 4.2, il permet d'élargir considérablement l'ensemble de conditions initiales $\mathcal{S}$ obtenu dans [67]. Nous avons effectué des simulations pour différentes valeurs de la matrice d'incertitudes $F(t)$ et une condition initiale $x(0) = [70 \quad 1740]'$. Comme nous pouvons le voir sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5, le système en boucle fermée reste robustement stable même en présence de saturations sur la commande.

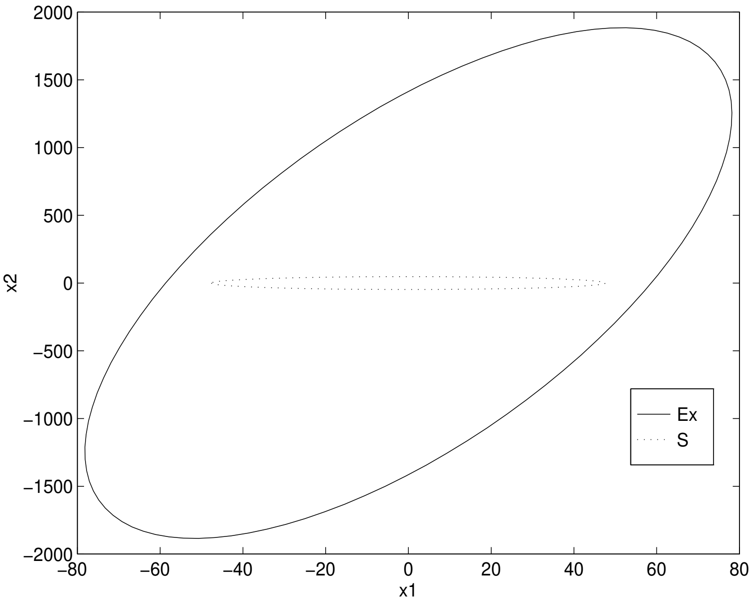

FIG. 4.2: Comparaison des ensembles de conditions initiales.

4.5.3 Deuxième exemple

Nous considérons maintenant les équations linéarisées du mouvement d'un satellite données dans [26]

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3p^2(t) & 0 & 0 & 2p(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2p(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

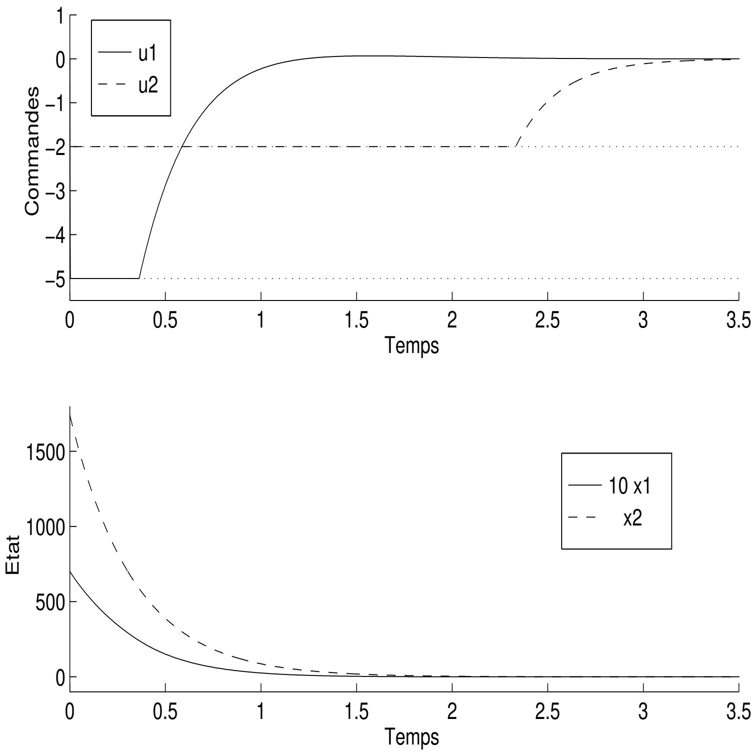

FIG. 4.3: Simulation pour $F(t) \equiv 0$.

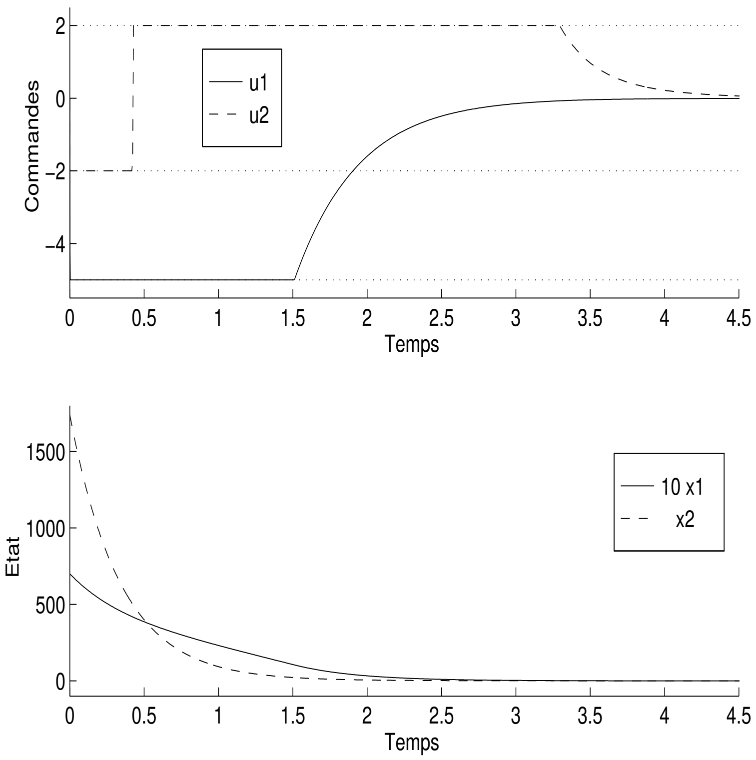

FIG. 4.4: Simulation pour $F(t) \equiv 1$.

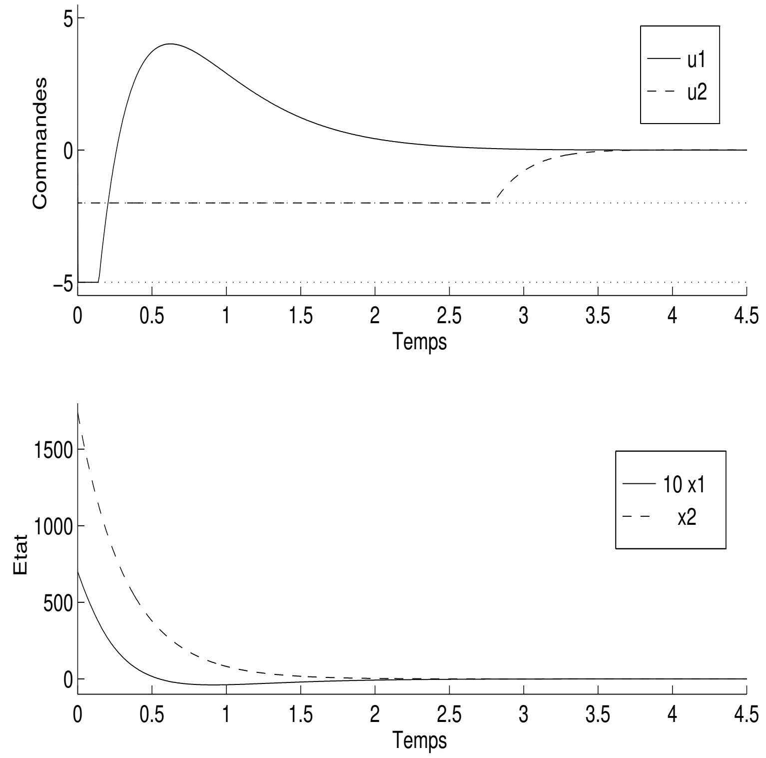

FIG. 4.5: Simulation pour $F(t) \equiv -1$.

pour des seuils de saturation fixés à

$$\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = 15.$$

Le paramètre incertain $p(t)$ représente la période de rotation du satellite, incluse dans l'intervalle $[0.5, 1.5]$. Afin de modéliser l'incertitude sur $p(t)$, nous avons choisi les matrices suivantes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.75 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; C_0 = I \;\; D_0 = 0$$
$$D_1 = [0\;\;3\;\;0\;\;1]' \;\; E_1 = [1\;\;1\;\;0\;\;0.333] \;\; D_2 = 0 \;\; E_2 = 0.$$

Dans [26], les auteurs démontrent que le retour d'état linéaire

$$u = \begin{bmatrix} -19 & -13 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -8 \end{bmatrix} x \tag{4.17}$$

stabilise le système linéaire saturé pour $p(t) \equiv 1$ et n'importe quelle condition initiale choisie dans la sphère unité, c'est-à-dire $x(0) \in \{x : \|x\|_2 \leq 1\}$. Cependant, comme cela est souligné dans cette même référence, la loi de commande (4.17) n'est pas nécessairement stabilisante pour toutes les incertitudes admissibles sur $p(t)$.

A l'aide de la séquence de relaxations LMI proposée dans la table 4.2, notre algorithme

TAB. 4.2: Séquence de relaxations.

LMIR	log vol $\mathcal{E}_x$
4	3.967
1	4.443
3	5.151
1	5.206
3	9.160
1	9.185
3	10.60

SYNTHÈSE LMI fournit les matrices du compensateur

$$
\begin{aligned}
A_c &= \begin{bmatrix} -77.44 & -44.16 & -10.51 & -42.03 \\ 93.04 & 53.70 & 9.254 & 46.04 \\ -74.51 & -35.87 & -36.49 & -81.96 \\ 50.30 & 25.62 & 18.98 & 46.36 \end{bmatrix} \\
B_c &= \begin{bmatrix} 111.2 & -134.5 & -87.29 & -113.5 \\ -248.2 & 149.2 & -19.86 & 207.2 \\ -56.23 & -63.04 & -725.2 & 312.9 \\ -12.94 & 53.84 & 357.1 & -127.0 \end{bmatrix} \\
C_c &= \begin{bmatrix} 1.372 & 0.924 & -0.236 & -0.093 \\ 1.261 & 0.739 & 0.148 & 0.650 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

et l'ensemble de conditions initiales $\mathcal{E}_x = \{x : x'Sx \leq 1\}$ où

$$
S = 10^{-3} \begin{bmatrix} 420.7 & \star & \star & \star \\ 254.8 & 191.9 & \star & \star \\ -0.396 & -1.594 & 0.838 & \star \\ 174.9 & 95.14 & 2.129 & 80.47 \end{bmatrix}
$$

est le bloc gauche supérieur de la matrice de Lyapunov $\mathbf{P}$ donnée en (4.13). Dans la table 4.2, nous pouvons voir l'évolution du volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_x$ après chaque itération.

La valeur propre maximale de S est 0.6543, donc la sphère unité est incluse dans $\mathcal{E}_x$. Notre compensateur dynamique garantit que le système incertain peut être stabilisé dans la sphère unité et même au-delà. Les trajectoires du système contrôlé par la loi de commande (4.17) sont représentées sur la figure 4.6 pour $F(t) \equiv 0$ et une condition initiale $x(0) = [-50 \quad 16 \quad -230 \quad 97]'$ n'appartenant pas à la sphère unité. Comme nous pouvons le voir, le système est instable. Sur la figure 4.7 sont tracées les trajectoires du système contrôlé par le compensateur (4.18) dans les mêmes conditions.

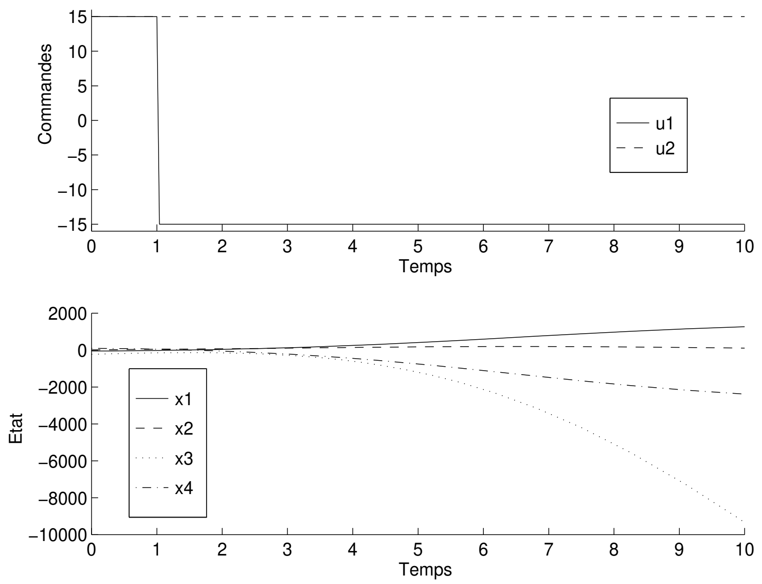

FIG. 4.6: Simulation avec la commande (4.17).

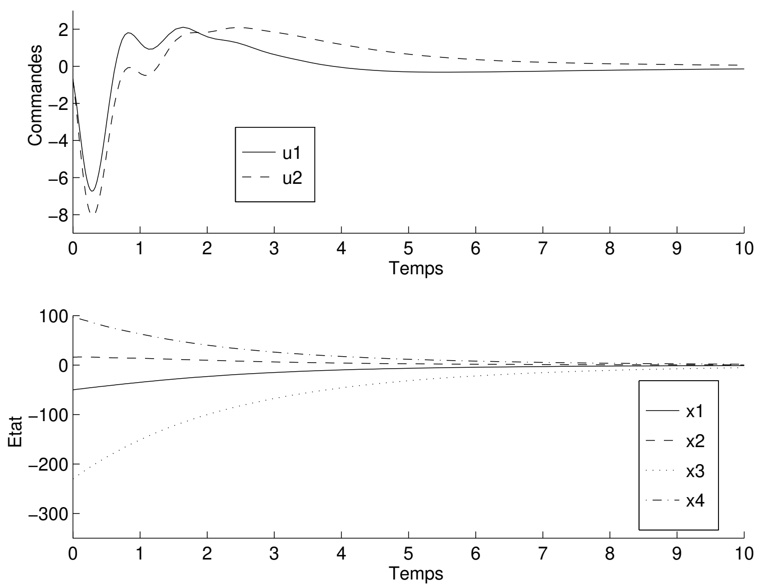

FIG. 4.7: Simulation avec la commande (4.18).

4.6 Conclusion

Nous avons étendu les résultats d'analyse de la deuxième partie de ce mémoire pour effectuer la synthèse d'un compensateur dynamique robustement stabilisant en présence de saturations. La stabilité du système en boucle fermée est garantie dans un ellipsoïde que nous calculons conjointement au compensateur.

Soulignons le fait qu'il existe un compromis entre la taille du domaine de conditions initiales stabilisables et la performance du système en boucle fermée. Généralement, une augmentation de l'ensemble de conditions initiales équivaut à une détérioration des performances autour de l'origine. Dans le chapitre 5, nous verrons comment contourner cette difficulté en faisant varier le gain de la loi de commande.

Nous pouvons dresser les mêmes conclusions que dans la section 3.7 quant aux avantages et inconvénients respectifs de la méthode de synthèse que nous venons de décrire.

- Les deux algorithmes ARE et LMI sont très faciles à implanter et ne sont basés que sur des outils efficaces et répandus.
- La méthode ARE est plus avantageuse que la méthode LMI au niveau de la complexité algorithmique, même si le choix des matrices de pondération reste délicat.
- Les deux méthodes ARE et LMI sont potentiellement conservatives au niveau de la modélisation des incertitudes, de la modélisation des saturations et du choix d'une matrice de Lyapunov unique valable sur l'ensemble des incertitudes.
- La méthode LMI est plus souple que la méthode ARE, mais nous avons été confrontés lors de tests numériques à des problèmes pour lesquels la méthode ARE, après un choix adéquat des matrices de pondérations, donnait des meilleurs résultats que la méthode LMI en terme de taille de l'ensemble des conditions initiales. Un exemple illustratif est décrit dans [112].

De façon générale, il ne semble pas possible de conseiller une méthode plus qu'une autre. La meilleure stratégie consiste à tester les deux méthodes successivement et à utiliser celle qui donne les résultats les plus intéressants.

Chapitre 5

Commande Linéaire par Morceaux

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons une seconde méthode visant à stabiliser les systèmes linéaires incertains en présence de limitations en amplitude sur les commandes. Contrairement à l'approche du chapitre 4, nous n'autorisons pas la saturation de la commande. La loi de commande est conçue en fonction de l'endroit où est l'état, de telle sorte que la commande respecte ses contraintes d'amplitude.

Nous proposons un algorithme de commande linéaire par morceaux (LPM) basé sur la résolution d'AREs ou de LMIs paramétrées. Tout comme dans la deuxième partie du mémoire ou dans le chapitre 4, nous utilisons la notion de stabilité quadratique locale et donc les ensembles de conditions initiales que nous stabilisons sont des ellipsoïdes. En fait, nous construisons une famille d'ellipsoïdes inclus les uns dans les autres dans l'espace d'état, en suivant une idée originalement proposée dans [121] et étendue dans [102]. Une fois initialisées dans l'ellipsoïde le plus grand, les trajectoires du système sont ramenées à l'origine en appliquant des retours d'état linéaires par morceaux tout en évitant la saturation de la commande. Dans l'ellipsoïde le plus petit, une commande à coût garanti [89, 25] est finalement appliquée afin d'assurer une certaine performance en plus de la stabilité.

Les résultats présentés dans ce chapitre combinent plusieurs idées fondamentales développées dans [121, 102] et peuvent être considérés comme des extensions de ces travaux au cas incertain. De plus, notre algorithme de commande peut être vu comme une implantation pratique de la loi de commande implicite non-linéaire décrite dans [36].

Les travaux précédents ne prennent généralement en compte que les incertitudes entrant directement dans la fonction de saturation [94, 81] ou dans la matrice d'état dynamique uniquement [36]. Nos résultats permettent de traiter des incertitudes entrant à la fois dans la matrice d'état dynamique et dans la matrice de commande. Finalement, nous avons été informés lors du processus de révision d'un de nos articles que plusieurs résultats similaires aux nôtres avaient été obtenus indépendamment dans [99] sans considérer les incertitudes. Notre méthode peut donc être considérée comme une généralisation de ces résultats au cas incertain. Nos travaux ont donné lieu à deux publications [50, 51].

Une définition précise du problème traité est proposée dans le paragraphe 5.2. Parallèlement au développement de la deuxième partie du mémoire ou du chapitre 4, nous présentons successivement nos résultats basés sur les AREs (paragraphe 5.3) et les LMIs (paragraphe 5.4). Un exemple numérique illustratif est finalement décrit au paragraphe 5.5. Le paragraphe 5.6 conclut ce chapitre.

5.2 Position du problème

Nous considérons le système linéaire continu incertain

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{5.1}$$

où x est un vecteur d'état à n composantes et u est un vecteur de commande à m composantes. Afin de représenter les incertitudes affectant ce système, nous supposons que les matrices $A(t)$ et $B(t)$ appartiennent respectivement à des ensembles compacts $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Dans ce chapitre, nous considérons uniquement des incertitudes bornées en norme introduites au paragraphe 1.2.2, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{A_0 + DF(t)E_1,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \\ \mathcal{B} &= \{B_0 + DF(t)E_2,\ \|F(t)\|_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

pour des matrices nominales A_0, B_0 et des matrices constantes D, E_1, E_2 données.

La commande u du système (5.1) est contrainte et ne peut excéder un certain seuil. Chaque composante de u doit vérifier

$$|u_i| \leq \overline{u}_i \tag{5.2}$$

où $\overline{u}_i$ est un scalaire positif donné pour $i = 1, \ldots, m$.

Tout comme dans la deuxième partie du mémoire ou dans le chapitre 4, nous nous basons sur la notion de stabilité quadratique locale introduite au paragraphe 1.3.3, associée à l'existence d'une matrice de Lyapunov définie positive P. Une approximation naturelle de l'ensemble des conditions initiales qui peuvent être stabilisées est alors l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} = \{x : x'Px \leq 1/r\}$$

où r est un scalaire positif. Il semble alors naturel de rechercher la matrice P et le scalaire r tels que $\mathcal{E}$ est de taille maximale. Le problème que nous allons résoudre est donc le suivant.

Problème 5.1 *Trouver la matrice de Lyapunov P, le scalaire r et la loi de commande par retour d'état tels que le système incertain (5.1) sous contrainte (5.2) est localement quadratiquement stable dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ de plus grande taille.*

5.3 Approche ARE

La première approche pour résoudre le problème 5.1 est basée sur la résolution de l'ARE paramétrée

$$\mathbf{A}'P(\alpha) + P(\alpha)\mathbf{A} - P(\alpha)\mathbf{B}P(\alpha) + \mathbf{C} + \alpha\mathbf{Q} = 0, \tag{5.3}$$

où $\alpha \in [0,1]$ est un paramètre scalaire donné et

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A} = A_0 - B_0(\mathbf{R} + E_2'E_2)^{-1}E_2'E_1, \quad \mathbf{B} = B_0(\mathbf{R} + E_2'E_2)^{-1}B_0' - DD',\\
&\mathbf{C} = E_1'(I - E_2(\mathbf{R} + E_2'E_2)^{-1}E_2')E_1,\\
&\mathbf{R} = \epsilon R, \quad \mathbf{Q} = \epsilon Q
\end{aligned}$$

pour un scalaire positif ϵ et des matrices de pondérations symétriques définies positives quelconques R, Q. Même si notre notation ne le reflète pas, la solution $P(\alpha)$ de l'ARE dépend du scalaire ϵ. Selon les résultats classiques de stabilité quadratique de la section 2.2, si l'ARE (5.3) a une solution $P(\alpha)$ symétrique définie positive pour un scalaire $\epsilon \in [0, \overline{\epsilon}]$ suffisamment petit, une commande robustement stabilisante pour le système (5.1) en l'absence de contraintes sur la commande est donnée par

$$u = K(\alpha)x$$

où

$$K(\alpha) = -(\mathbf{R} + E_2'E_2)^{-1}(B_0'P(\alpha) + E_2'E_1). \tag{5.4}$$

De plus, supposons que la condition initiale $x(0)$ du système (5.1) soit une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance unité telle que $E[x(0)x'(0)] = I$, où $E[.]$ représente l'espérance mathématique. Nous pouvons associer au système (5.1) le critère quadratique de performance

$$J = \int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)dt. \tag{5.5}$$

Pour un ϵ donné, nous définissons $X(\epsilon) = \epsilon^{-1}P(1)$, où $P(1)$ est la solution symétrique définie positive de l'ARE (5.3) pour $\alpha = 1$. Dans [89], il est démontré que $E[J] \leq \operatorname{trace} X(\epsilon)$. Un certain niveau de performance est donc assuré si cette borne supérieure sur $E[J]$ est minimisée, c'est-à-dire si ϵ est égal à

$$\begin{aligned}
\epsilon_* = \arg \quad &\min_{\epsilon} \quad \operatorname{trace} X(\epsilon)\\
&\text{t.q.} \quad \epsilon \in [0, \overline{\epsilon}].
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Nous pouvons facilement résoudre ce problème d'optimisation convexe à l'aide d'une méthode de bissection unidimensionnelle et en déduire un retour d'état $K(1)$, dit de coût garanti, correspondant à la solution de l'ARE (5.3) pour laquelle $\epsilon = \epsilon_*$ et $\alpha = 1$. Par souci de clarté, nous supposons par la suite que $\epsilon = \epsilon_*$ dans l'ARE (5.3), de telle sorte que nous pouvons supprimer toute dépendance par rapport à ϵ.

Puisque la commande u doit vérifier les contraintes d'amplitude (5.2), la performance de coût garanti ne peut pas être assurée pour toute condition initiale $x(0)$, comme précisé dans le lemme suivant.

Lemme 5.1 *Soit $k^i(\alpha)$ la ligne i dans la matrice $K(\alpha)$. Nous définissons*

$$c(\alpha) = \min_{i=1,\dots,m} \frac{\overline{u}_i^2}{k^i(\alpha)P^{-1}(\alpha)[k^i(\alpha)]'} \tag{5.7}$$

et

$$\Pi(\alpha) = c^{-1}(\alpha)P(\alpha).$$

Alors tout vecteur d'état x appartenant à l'ellipsoïde de Lyapunov

$$\mathcal{E}(\alpha) = \{x : x'\Pi(\alpha)x \leq 1\}$$

est tel que la commande $u = K(\alpha)x$ vérifie les contraintes (5.2).

Preuve : Elle découle des propriétés géométriques exposées dans la section 2.4 et plus particulièrement de l'inclusion de l'ellipsoïde $\mathcal{E}(\alpha)$ dans le polyèdre

$$\{x : |k^i(\alpha)x| \leq \overline{u}_i,\ i = 1, \dots, m\}.$$

$\square$

Etant donné que la matrice $P(\alpha)$ est solution de l'équation (5.3), nous savons que l'ellipsoïde $\mathcal{E}(\alpha)$ est à la fois positivement invariant et contractif pour le système (5.1) commandé robustement par $u = K(\alpha)x$. Donc pour toute condition initiale $x(0)$ choisie dans $\mathcal{E}(\alpha)$, la trajectoire du système en boucle fermée reste dans $\mathcal{E}(\alpha)$ tout en convergeant asymptotiquement vers l'origine. En particulier, le lemme 5.1 permet d'affirmer que pour $\alpha = 1$ le coût garanti est uniquement assuré dans $\mathcal{E}(1)$. En dehors de cet ensemble, même la stabilité ne peut être assurée puisque la commande peut saturer. Cela nous a incité à utiliser l'ARE (5.3) paramétrée en α, comme précisé dans le lemme suivant.

Lemme 5.2 *Supposons que l'ARE (5.3) a une solution symétrique définie positive $P(1)$ pour $\alpha = 1$. Alors, l'ARE (5.3) a une solution symétrique définie positive $P(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$. De plus, $P(\alpha_1) \prec P(\alpha_2)$ pour tous les scalaires α_1, α_2 tels que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$.*

Preuve : La preuve découle des propriétés classiques de monotonie des AREs démontrées à l'aide des Hamiltoniens, voir par exemple [120]. $\square$

Une conséquence directe du lemme ci-dessus est que le gain $K(\alpha)$ diminue lorsque α diminue. Donc on peut s'attendre à ce que les contraintes sur la commande soient plus facilement respectées lorsque α tend vers zéro. Le résultat suivant permet de formaliser cette intuition dans le cas particulier où l'incertitude affecte uniquement la matrice $A(t)$, c'est-à-dire quand $E_2 = 0$ [36].

Lemme 5.3 *Lorsque $E_2 = 0$, nous avons $\mathcal{E}(\alpha_2) \subset \mathcal{E}(\alpha_1)$ pour tous les scalaires α_1, α_2 tels que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$.*

Preuve : Puisque $E_2 = 0$, nous avons

$$c(\alpha) = \min_{i=1,\dots,m} \frac{\overline{u}_i^2}{\mathbf{r}^i B_0' P(\alpha) B_0 [\mathbf{r}^i]'}$$

où $\mathbf{r}^i$ représente la ligne i dans la matrice $\mathbf{R}^{-1}$. Le lemme 5.2 permet d'affirmer que $P(\alpha_1) \prec P(\alpha_2)$ et $c(\alpha_1) > c(\alpha_2)$. Donc $\Pi(\alpha_1) \prec \Pi(\alpha_2)$, ce qui est équivalent à $\mathcal{E}(\alpha_2) \subset \mathcal{E}(\alpha_1)$. $\square$

L'idée clé de [36], originalement proposée dans [2, 102], est alors d'augmenter α, et donc le gain $K(\alpha)$, au fur et à mesure que x s'approche de l'origine. Par conséquent, toute condition initiale choisie dans l'ellipsoïde externe $\mathcal{E}(0)$ (c'est-à-dire l'ellipsoïde le plus grand) peut être stabilisée par un faible gain $K(0)$. Quand α devient égal à 1, x a atteint l'ellipsoïde interne $\mathcal{E}(1)$ (c'est-à-dire l'ellipsoïde le plus petit) où le gain de coût garanti peut être appliqué.

Malheureusement, nous pouvons facilement vérifier que le lemme 5.3 n'est pas valide quand $E_2 \neq 0$. Des contre-exemples existent pour lesquels l'inégalité $c(\alpha_1) > c(\alpha_2)$ n'est plus vérifiée car le dénominateur de $c(\alpha)$ contient à la fois des termes en $P(\alpha)$ et en $P^{-1}(\alpha)$. Sans hypothèse supplémentaire sur la matrice d'incertitude E_2, une extension directe des résultats de [36] ne semble pas possible. Cela nous a incité à poursuivre une approche différente, basée sur une commmande linéaire par morceau. Le lemme suivant s'avère essentiel pour la génération de cette loi de commande.

Lemme 5.4 *Etant donné $\alpha \in [0,1]$, supposons que l'ARE (5.3) a une solution symétrique définie positive $P(\alpha)$ et donc que le gain $K(\alpha)$ donné en (5.4) stabilise le système (5.1). Définissons respectivement $\underline{\rho}$ et $\overline{\rho}$ comme le plus grand zéro négatif et le plus petit zéro positif de la matrice polynomiale quadratique*

$$S(\rho) = S_0 + S_1\rho + S_2\rho^2,$$

où

$$\begin{aligned} S_0 &= -\alpha\mathbf{Q} - K'(\alpha)\mathbf{R}K(\alpha) \\ S_1 &= -2K'(\alpha)\mathbf{R}K(\alpha) \\ S_2 &= K'(\alpha)E_2'E_2K(\alpha). \end{aligned}$$

Alors le gain modifié $(\rho+1)K(\alpha)$ stabilise robustement le système (5.1) pour tout scalaire réel ρ dans l'intervalle $[\underline{\rho}, \overline{\rho}]$.

Preuve : L'ARE (5.3) peut également s'écrire

$$A_0'P(\alpha) + P(\alpha)A_0 + P(\alpha)DD'P(\alpha) + E_1'E_1 - K'(\alpha)\mathbf{R}K(\alpha) + \alpha\mathbf{Q} = 0. \tag{5.8}$$

Comme nous avons vu au paragraphe 1.3.2, la stabilisation robuste du système (5.1) avec un retour d'état $(\rho+1)K(\alpha)$ est assurée par l'inégalité quadratique

$$2x'P[A_0 + DFE_1 + (\rho+1)(B_0 + DFE_2)K(\alpha)]x < 0 \tag{5.9}$$

pour toute matrice d'incertitude F admissible et tout vecteur x non nul. En bornant les termes incertains [88], nous avons

$$\begin{aligned}
&2x'P(\alpha)[A_0 + (\rho+1)B_0K(\alpha)]x + 2x'P(\alpha)\{DF[E_1 + (\rho+1)E_2K(\alpha)]\} \leq \\
&2x'P(\alpha)[A_0 + (\rho+1)B_0K(\alpha)]x + x'P(\alpha)DD'P(\alpha)x \\
&\quad + x'[E_1 + (\rho+1)E_2K(\alpha)]'[E_1 + (\rho+1)E_2K(\alpha)]x = \\
&2x'P(\alpha)A_0x + x'P(\alpha)DD'P(\alpha)x + x'E_1'E_1x + 2(\rho+1)x'[P(\alpha)B_0 + E_1'E_2]K(\alpha)x \\
&\quad + (\rho+1)^2x'K'(\alpha)E_2'E_2K(\alpha)x.
\end{aligned}$$

Afin que l'inégalité (5.9) soit vérifiée, l'expression ci-dessus doit être négative. En utilisant l'équation (5.8), nous pouvons vérifier que cela revient à imposer $S(\rho) < 0$. Puisque $S(0) = S_0 = -\alpha\mathbf{Q} - K'(\alpha)\mathbf{R}K(\alpha) < 0$, la matrice polynomiale $S(\rho)$ reste définie négative tant que ρ est situé entre les zéros de $S(\rho)$ qui sont les plus proches de l'origine. □

Le lemme ci-dessus suggère quelques remarques

- Les bornes $\underline{\rho}$ et $\overline{\rho}$ peuvent être déterminées numériquement à l'aide d'une des méthodes décrites dans [97].
- Lorsque $E_2 = 0$, nous pouvons facilement vérifier que $\overline{\rho} \to \infty$. Dans ce cas, ρ n'est contraint que par sa borne inférieure.
- Quand les matrices A et B ne sont pas incertaines et que A n'a aucune valeur propre à partie réelle positive, ρ est qualifié de paramètre de fort gain. Ce paramètre est utilisé dans [94, 81] pour assurer la performance en plus de la stabilité. Dans la même référence, α est qualifié de paramètre de faible gain. Ce paramètre est utilisé pour stabiliser le système arbitrairement loin de l'origine.
- Quand nous appliquons le gain de retour d'état $(\rho+1)K(\alpha)$, l'ellipsoïde de Lyapunov défini au lemme 5.1 est remplacé par son homothétique

$$(\rho+1)^{-1}\mathcal{E}(\alpha) = \{x : x'\Pi(\alpha)x \leq (\rho+1)^{-2}\}.$$

Corollaire 5.1 *Soient α_1, α_2 deux scalaires tels que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$. Supposons que l'inclusion $\mathcal{E}(\alpha_2) \subset \mathcal{E}(\alpha_1)$ ne soit pas vérifiée. Pour un scalaire ρ_2 donné, définissons*

$$\varrho = \sqrt{(\rho_2+1)^2\underline{\lambda}(\Pi(\alpha_2)\Pi^{-1}(\alpha_1))},$$

où $\underline{\lambda}$ représente la valeur propre minimale d'une matrice. Alors l'inclusion

$$(\rho_2+1)^{-1}\mathcal{E}(\alpha_2) \subset (\rho_1+1)^{-1}\mathcal{E}(\alpha_1)$$

est vérifiée si ρ_1 appartient à l'intersection des intervalles $[\underline{\rho}_1, \overline{\rho}_1]$ et $[-\varrho-1, \varrho-1]$.

Preuve : L'ellipsoïde $(\rho_2+1)^{-1}\mathcal{E}(\alpha_2)$ est inclus dans $(\rho_1+1)^{-1}\mathcal{E}(\alpha_1)$ si et seulement si $(\rho_1+1)^2\Pi(\alpha_1) \prec (\rho_2+1)^2\Pi(\alpha_2)$. Puisque ρ_2 est donné, une condition suffisante pour que cette condition matricielle soit vérifiée est que ρ_1 vérifie l'inégalité scalaire quadratique $(\rho_1+1)^2 < (\rho_2+1)^2\underline{\lambda}(\Pi(\alpha_2)\Pi^{-1}(\alpha_1)) = \varrho^2$. □

Algorithme de génération de commande LPM ARE

Entrée : Le système linéaire (5.1) qui doit vérifier les contraintes de commande (5.2).

Sortie : Une loi de commande linéaire par morceaux qui stabilise robustement le système (5.1) dans un ensemble donné de conditions initiales $\mathcal{E}_0$. La loi de commande consiste en une famille de $N+1$ ellipsoïdes imbriqués $\mathbb{E} = \{\mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{E}_N\}$ et les gains de retour d'état correspondant $\mathbb{K} = \{K_0, K_1, \ldots, K_N\}$.

Pas 0 : Construire une séquence croissante $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_M = 1$. Etant donné les matrices de pondération R, Q et $\alpha = \alpha_M = 1$, résoudre le problème d'optimisation de coût garanti (5.6) et poser $\epsilon = \epsilon_*$. Résoudre l'ARE (5.3) pour $P(\alpha_0), P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_M)$. Calculer les gains de retour d'état robustes $K(\alpha_0), K(\alpha_1), \ldots, K(\alpha_M)$ donnés en (5.4). Construire l'ellipsoïde de coût garanti $\underline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(\alpha_M)$ selon le lemme 5.1 et poser $\rho_M = 0$. Finalement, poser $\mathbb{E} = \{\underline{\mathcal{E}}\}$ et $\mathbb{K} = \{K(\alpha_M)\}$.

Pas $\mathbf{i = 1, \ldots, M}$: A partir du corollaire 5.1, choisir un scalaire ρ_{M-i} tel que les ellipsoïdes $\underline{\mathcal{E}}$ et $\overline{\mathcal{E}} = (\rho_{M-i}+1)^{-1}\mathcal{E}(\alpha_{M-i})$ soient imbriqués, c'est-à-dire $\underline{\mathcal{E}} \subset \overline{\mathcal{E}}$. Si un tel scalaire n'existe pas, alors sauter l'ellipsoïde $\overline{\mathcal{E}}$ et aller au pas $i+1$. Sinon, poser $\underline{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{E}}$, $\mathbb{E} = \{\underline{\mathcal{E}}, \mathbb{E}\}$, $\mathbb{K} = \{(\rho_{M-i}+1)K(\alpha_{M-i}), \mathbb{K}\}$ et aller au pas $i+1$.

Implantation de la loi de commande LPM

Pas 0 : Le système (5.1) est initialisé dans l'ellipsoïde extérieur (le plus grand) $\mathcal{E}_0$. Il est commandé par le retour d'état linéaire de gain faible K_0.

Pas $\mathbf{i = 1, \ldots, N}$: Nous continuons à appliquer le gain K_{i-1} tant que la trajectoire du vecteur d'état ne rencontre pas l'ellipsoïde suivant $\mathcal{E}_i$. Sur la frontière de $\mathcal{E}_i$, nous commutons au gain K_i et passons au pas $i+1$.

Pas $\mathbf{N+1}$: Dans l'ellipsoïde intérieur (le plus petit) $\mathcal{E}_N$, le système (5.2) est commandé par le gain de coût garanti K_N. Il est stabilisé avec un certain niveau de performance associé à la minimisation 5.6 du critère quadratique 5.5.

La loi de commande ci-dessus suggère quelques remarques

- Puisque les ellipsoïdes $\mathcal{E}_i$ sont positivement invariants, contractifs et sont imbriqués, la convergence vers l'origine du système commandé par la loi ci-dessus est évidente.
- L'étape clé dans l'algorithme de génération LPM ARE est le choix de la séquence de paramètres α_i au pas 0. Par expérience, une séquence logarithmique donne des résultats satisfaisants, à savoir

$$\alpha_i = \frac{\delta^{\frac{i}{M}} - 1}{\delta - 1} \tag{5.10}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, M$ et $\delta > 1$. Quand δ tend vers 1, les scalaires α_i deviennent linéairement espacés. Une augmentation de δ implique que les ellipsoïdes sont moins espacés loin de l'origine. Comme le suggérent les auteurs dans [121], nous pouvons utiliser pour nous aider dans le choix de δ une fonction de mesure du changement de longueur des axes principaux de deux ellipsoïdes consécutifs.

- Un choix évident pour les scalaires ρ_i est $\rho_0 = \rho_1 = \ldots = \rho_N = 0$. Un choix plus naturel est une séquence décroissante $\rho_0 = 0 > \rho_1 > \cdots > \rho_N$ puisque l'ellipsoïde $\mathcal{E}_i$ diminue de taille lorsque ρ_i augmente. En particulier, l'ellipsoïde extérieur $\mathcal{E}_0$ doit être le plus grand possible, ce qui implique de minimiser ρ_0.

5.4 Approche LMI

Nous décrivons à présent une deuxième approche pour résoudre le problème 5.1. Elle est basée sur un problème de maximisation de déterminant sous contraintes LMIs. Tout comme pour l'approche ARE décrite dans la section précédente, nous construisons une loi de commande de retour d'état linéaire par morceaux qui stabilise le système (5.1) sous les contraintes (5.2). Cependant, nous allons voir que la formulation LMI est plus souple que la formulation ARE et surtout qu'elle fournit en général des domaines de conditions initiales stabilisables plus étendus.

Nous avons vu dans la section précédente qu'il y a deux objectifs de synthèse contradictoires dans notre problème de commande, à savoir la stabilisation du plus grand domaine possible de conditions initiales et la meilleure performance possible autour de l'origine. Quand la commande doit vérifier les contraintes (5.2), nous savons qu'il est impossible de stabiliser n'importe quelle condition initiale de l'espace d'état, à moins de faire des hypothèses de stabilité sur le système (5.1) en boucle ouverte. Nous devons donc restreindre l'ensemble des conditions initiales stabilisables. Nous formalisons cette observation dans le lemme suivant, qui a pour objectif de maximiser le volume de l'ensemble des conditions initiales stabilisables tout en assurant la stabilité robuste en présence de contraintes sur la commande.

Lemme 5.5 *Soient W_0 et Y_0 les solutions optimales du problème LMI de maximisation de déterminant*

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{W,Y,\epsilon} & \log\det W^{-1} \\ \text{t.q.} & \begin{bmatrix} A_0W + WA_0' + B_0Y + Y'B_0' + \epsilon DD' & \star \\ E_1W + E_2Y & -\epsilon I \end{bmatrix} \prec 0 \\ & \begin{bmatrix} W & \star \\ y^i & \bar{u}_i^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{array} \tag{5.11}$$

où y^i représente la ligne i dans la matrice Y. Alors l'ensemble de Lyapunov

$$\mathcal{E}_0 = \{x : x'W_0^{-1}x \leq 1\} \tag{5.12}$$

est l'ellipsoïde de volume maximum tel que pour toute condition initiale $x(0)$ choisie dans $\mathcal{E}_0$, la commande de retour d'état de faible gain

$$u = K_0 x = Y_0 W_0^{-1} x, \tag{5.13}$$

stabilise asymptotiquement le système (5.1) tout en respectant les contraintes (5.2).

Preuve : Tout comme pour le lemme 5.1, la preuve découle des propriétés géométriques exposées dans la section 2.4. Rappelons que le problème (5.11) est un problème d'optimisation convexe standard connu sous le nom de problème du centre analytique, voir le paragraphe 2.3.2. □

Généralement, l'application du retour d'état (5.13) induit une performance médiocre en boucle fermée, particulièrement si l'état du système est proche de l'origine. Le lemme suivant, qui est l'équivalent LMI de l'approche ARE de coût garanti de la section précédente, a pour but de pallier cet inconvénient.

Lemme 5.6 *Soient W_1 et Y_1 les solutions optimales du problème d'optimisation LMI*

$$\begin{aligned}
&\min_{W,Y,\gamma,\epsilon} \quad \gamma \\
&\text{t.q.} \quad \begin{bmatrix} \gamma I & \star \\ I & W \end{bmatrix} \succeq 0 \\
&\begin{bmatrix} A_0 W + W A_0' + B_0 Y + Y' B_0' + \epsilon D D' & \star & \star \\ E_1 W + E_2 Y & -\epsilon I & \star \\ \begin{bmatrix} 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} W + \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} Y & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0 \\
&\begin{bmatrix} W & \star \\ y^i & \bar{u}_i^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Alors, pour toute condition initiale $x(0)$ choisie dans l'ellipsoïde de Lyapunov

$$\mathcal{E}_1 = \{x : x' W_1^{-1} x \leq 1\}, \tag{5.15}$$

le retour d'état linéaire de fort gain

$$u = K_1 x = Y_1 W_1^{-1} x, \tag{5.16}$$

stabilise asymptotiquement le système (5.1), respecte les contraintes (5.2) et assure un certain niveau de performance associé à la minimisation 5.6 du critère quadratique 5.5.

Preuve : Le problème de coût garanti consiste à minimiser l'énergie de sortie

$$J = \int_0^\infty z' z \, dt$$

du système incertain (5.1) doté de la sortie fictive

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

où $Q^{\frac{1}{2}}$ et $R^{\frac{1}{2}}$ sont les facteurs de Cholesky des matrices de pondération définies positives dans le critère quadratique (5.5). La formulation LMI de ce problème est décrite dans le paragraphe 7.4 de la référence [19]. Avec les notations de la section 5.3, nous avons

$$E[J] \leq \operatorname{trace} W^{-1} \leq n\gamma.$$

Donc minimiser γ revient à minimiser une borne supérieure sur $E[J]$, ce qui assure un certain niveau de performance grâce au gain de coût garanti (5.16). □

Une façon naturelle de combiner les objectifs de synthèse des lemmes 5.5 et 5.6 consiste à construire le problème d'optimisation LMI paramétré en α suivant

$$\begin{aligned} \min_{W,Y,\gamma,\epsilon} \quad & (1-\alpha)\log\det W^{-1} + \alpha\gamma \\ \text{t.q.} \quad & \begin{bmatrix} \gamma I & \star \\ I & W \end{bmatrix} \succeq 0 \\ & \begin{bmatrix} A_0 W + W A_0' + B_0 Y + Y' B_0' + \epsilon D D' & \star & \star \\ E_1 W + E_2 Y & -\epsilon I & \star \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha Q^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} W + \begin{bmatrix} \alpha R^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} Y & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0 \\ & \begin{bmatrix} W & \star \\ y^i & \bar{u}_i^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Nous pouvons vérifier que lorsque α tend vers 0, le problème (5.17) tend vers le problème (5.11). De façon équivalente, lorsque α tend vers 1, le problème (5.17) tend vers le problème (5.14). Tout comme dans la section 5.3, l'idée est alors de faire augmenter α de 0 à 1 lorsque x s'approche de l'origine. A ce moment, le gain paramétré

$$K_\alpha = Y_\alpha W_\alpha^{-1} \tag{5.18}$$

varie du gain faible K_0 au gain fort K_1. Afin d'assurer que l'ellipsoïde

$$\mathcal{E}_\alpha = \{x : x' W_\alpha^{-1} x \leq 1\} \tag{5.19}$$

est inclus dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}_\beta$ quand $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, il est nécessaire d'ajouter la contrainte LMI

$$W_\alpha \prec W_\beta \tag{5.20}$$

dans le problème (5.17).

Algorithme de génération de commande LPM LMI

Entrée et sortie : Voir l'algorithme LPM ARE du paragraphe précédent.

Pas 0 : Construire une séquence croissante $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N = 1$. Résoudre le problème LMI (5.14) en W_1, Y_1. A l'aide des relations (5.15) et (5.16), poser $\mathbb{E} = \{\mathcal{E}_1\}$ et $\mathbb{K} = \{K_1\}$. Poser $\beta = \alpha_N$.

Pas $\mathbf{i = 1, \ldots, N}$: Poser $\alpha = \alpha_{N-i}$. Résoudre le problème LMI (5.17) et (5.20) en W_α, Y_α. A l'aide des relations (5.18) et (5.19), poser $\mathbb{E} = \{\mathbb{E}, \mathcal{E}_\alpha\}$, $\mathbb{K} = \{\mathbb{K},\ K_\alpha\}$, $\beta = \alpha$ et aller au pas $i+1$.

L'implantation de la loi de commande générée par l'algorithme ci-dessus est la même qu'au paragraphe précédent. Nos algorithmes ARE et LMI peuvent être vus comme des implantations pratiques de la commande à séquencement de gain définie dans [102] (pour $D = 0$) et [36] (pour $E_2 = 0$). Dans ces références, une équation non-linéaire implicite complexe doit être résolue, alors que nos algorithmes sont basés sur la résolution d'AREs et de LMIs, pour laquelle des outils performants sont disponibles. Notons qu'une remarque similaire a été soulevée dans l'exemple numérique proposé dans [36], mais uniquement dans le cas où $E_2 = 0$.

Il y a deux raisons principales pour lesquelles notre loi de commande LPM diffère de celle proposée dans [121]. Premièrement, notre domaine d'attraction des trajectoires est l'ellipsoïde intérieur où le coût garanti est assuré, alors qu'il s'agit de l'origine dans [121]. Deuxièmement, la loi LPM décrite dans [121] ne prend pas en compte les incertitudes.

Tous les calculs qui sont nécessaires à l'implantation de notre loi de commande peuvent être effectués hors-ligne. Une certaine quantité de mémoire est cependant requise pour stocker les ellipsoïdes imbriqués $\mathbb{E}$ et la commande linéaire par morceau $\mathbb{K}$.

Finalement, il est toujours possible de stabiliser des conditions initiales qui n'appartiennent pas à l'ellipsoïde extérieur $\mathcal{E}_0$ si nous autorisons la saturation des commandes. En utilisant la technique décrite dans le chapitre 4, nous pouvons déterminer un ellipsoïde incluant $\mathcal{E}_0$ tel que la stabilité robuste est préservée lorsque l'on applique une loi saturée $\mathrm{sat}(K_0 x)$. Nous n'avons pas étudié une telle extension.

5.5 Exemple Numérique

Nous considérons la dynamique d'un hélicoptère dans un plan vertical, étudiée dans [96]. Le modéle linéaire (5.1), correspondant à quatre variables d'état et deux entrées, s'écrit

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4556 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.7070 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0673 \\ 0.2192 & 1.2031 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que la matrice A_0 est instable. De plus, nous supposons que les deux commandes sont bornées de la façon suivante

$$\begin{array}{rcl} |u_1| & \leq & 1 \\ |u_2| & \leq & 1. \end{array}$$

5.5.1 Approche ARE

Nous choisissons les matrices de pondération $R = I$ et $Q = I$. La commande de coût garanti obtenue en résolvant l'ARE pour $\epsilon_* = 0.7143$, est la suivante

$$u = \begin{bmatrix} -0.58 & 0.25 & 0.86 & 1.15 \\ 0.47 & 1.53 & -0.10 & -1.24 \end{bmatrix} x.$$

Nous avons testé l'algorithme de génération de loi de commande LPM ARE pour des séquences de longueurs respectives $M = 4$ et $M = 50$.

Dans le premier cas ($M = 4$), nous avons fixé tous les paramètres de synthèse ρ_i à 0 et choisi $\delta = 1000$ dans l'équation (5.10) afin de générer la séquence $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_4$. L'algorithme renvoie $N = 4$ surfaces de commutation dont les intersections avec l'espace d'état (x_1, x_2) sont représentées sur la figure 5.1. L'ellipsoïde interne $\mathcal{E}_4$ contient les états pour lesquels le retour d'état de coût garanti peut être appliqué sans provoquer de saturation de la commande.

Toute condition initiale choisie dans l'ellipsoïde externe $\mathcal{E}_0$ est ramenée vers $\mathcal{E}_4$ tout en respectant les contraintes sur la commande. Les ellipsoïdes imbriqués intermédiaires $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ sont représentés en trait discontinu. Le système nominal en boucle fermée ($F = 0$) a été ensuite simulé pour une condition initiale $x(0) = [0.0210 \quad -0.9057 \quad 0.5953 \quad 0]'$ appartenant à $\mathcal{E}_0$. Sur la figure 5.2, nous comparons la commande de coût garanti en l'absence de contrainte d'amplitude sur la commande (en trait pointillé) et notre commande linéaire par morceaux conçue pour respecter ces contraintes d'amplitude tout en évitant la saturation.

Dans le second cas ($M = 50$), la séquence $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{50}$ est obtenue en posant $\delta = 10$ dans la relation (5.10). De plus, nous avons choisi une séquence décroissante de scalaires ρ_i telle que ρ_0 est minimisé. Afin de rester dans le domaine admissible de ρ_i pour toute valeur de α_i, nous avons déterminé graphiquement l'expression linéaire $\rho_i = 0.3923(\alpha_i - 1)$. Sur la figure 5.3, nous représentons la séquence ρ_i en fonction de α_i, ainsi que les bornes inférieures et supérieures sur ρ_i. Pour ce choix de scalaires ρ_i, l'algorithme de génération de loi de commande LPM renvoie $N = 50$ ellipsoïdes imbriqués. Pour comparaison, le rapport de volume entre les ellipsoïdes $(\rho_0 + 1)^{-1}\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_0$ est de 2.7078. Cela montre l'amélioration significative que nous avons obtenue en exploitant les degrés de liberté dans le choix des paramètres de synthèse ρ_i.

Le système nominal en boucle fermée ($F = 0$) a été ensuite simulé pour une condition initiale $x(0) = [0.346 \quad -1.4901 \quad 0.9794 \quad 0]'$ appartenant à $(\rho_0 + 1)^{-1}\mathcal{E}_0$. Sur la figure 5.4, nous comparons la commande de coût garanti en l'absence de contrainte d'amplitude sur

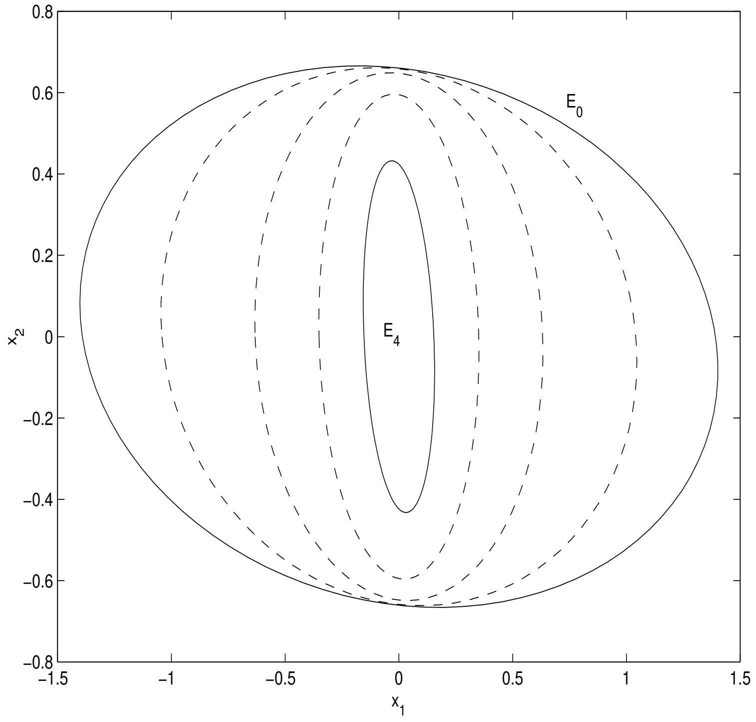

FIG. 5.1: Cas $M = N = 4$. Les surfaces de commutation sont les ellipsoïdes imbriqués $\mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{E}_4$.

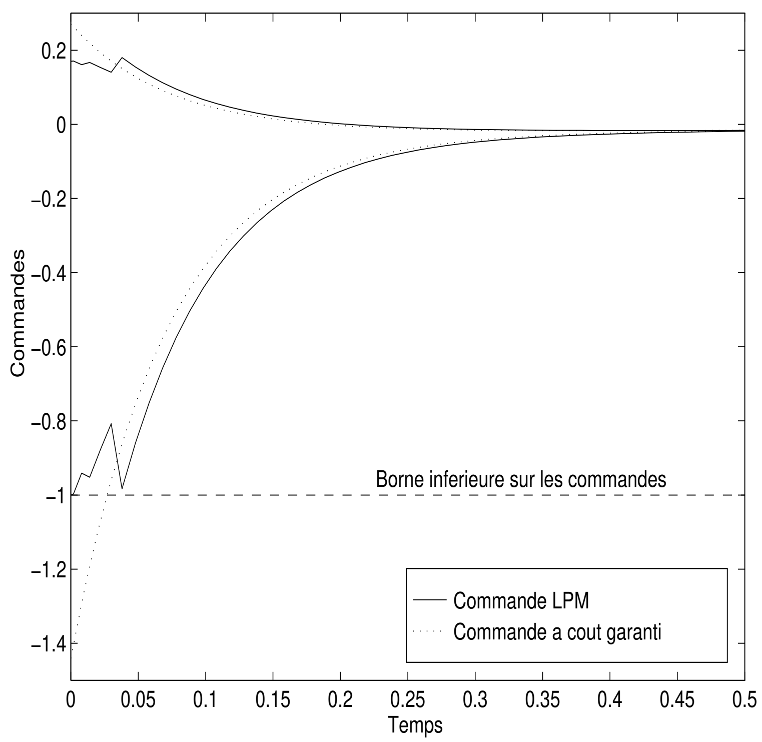

FIG. 5.2: Cas $M = N = 4$. Comparaison entre la commande de coût garanti sans contraintes et la commande LPM.

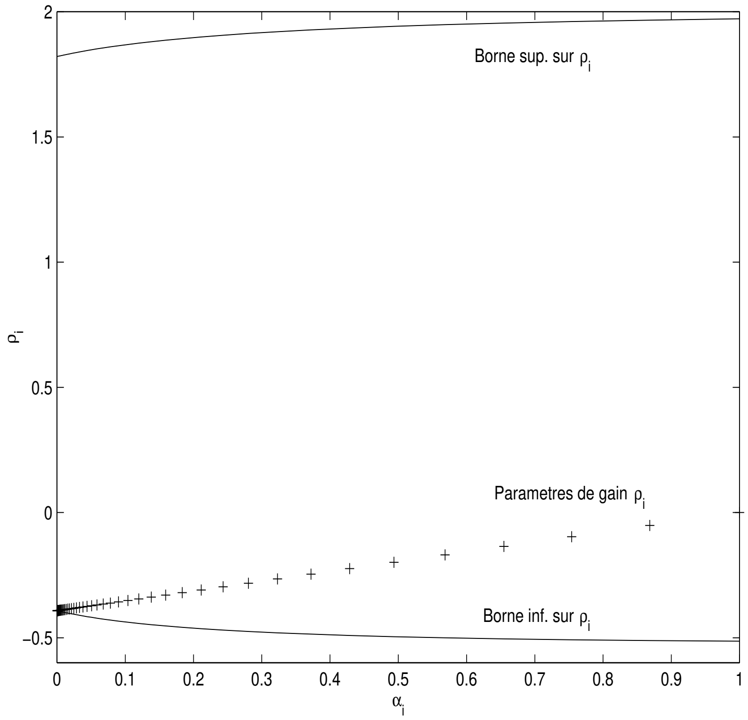

FIG. 5.3: Cas $M = N = 50$. Séquence de paramètres ρ_i avec bornes inférieures et supérieures $\underline{\rho}_i, \overline{\rho}_i$.

la commande (en trait pointillé) et notre commande linéaire par morceaux conçue pour respecter ces contraintes tout en évitant la saturation. Sur la figure 5.4, on peut voir que grâce au nombre important de surfaces de commutation, l'effet "dents de scie" observé sur la figure 5.2 est considérablement atténué.

5.5.2 Approche LMI

Nous avons utilisé le logiciel SDPSOL [122] pour résoudre le problème LMI de maximisation de déterminant (5.17). Avec $R = I$ et $Q = I$, la commande LMI de coût garanti que nous obtenons pour $\alpha = 1$ est la suivante

$$u = \begin{bmatrix} -0.47 & 0.33 & 0.74 & 0.98 \\ 0.13 & 0.65 & 0.15 & -0.57 \end{bmatrix} x.$$

Le rapport de volume entre l'ellipsoïde calculé à l'aide de l'approche LMI et celui calculé à l'aide de l'approche ARE est approximativement de

- 106 pour l'ellipsoïde intérieur où la performance est assurée, et
- 266 pour l'ellipsoïde extérieur des conditions initiales stabilisables.

Les intersections des ellipsoïdes extérieurs avec les espaces d'état bi-dimensionnels sont représentées sur la Figure 5.5.

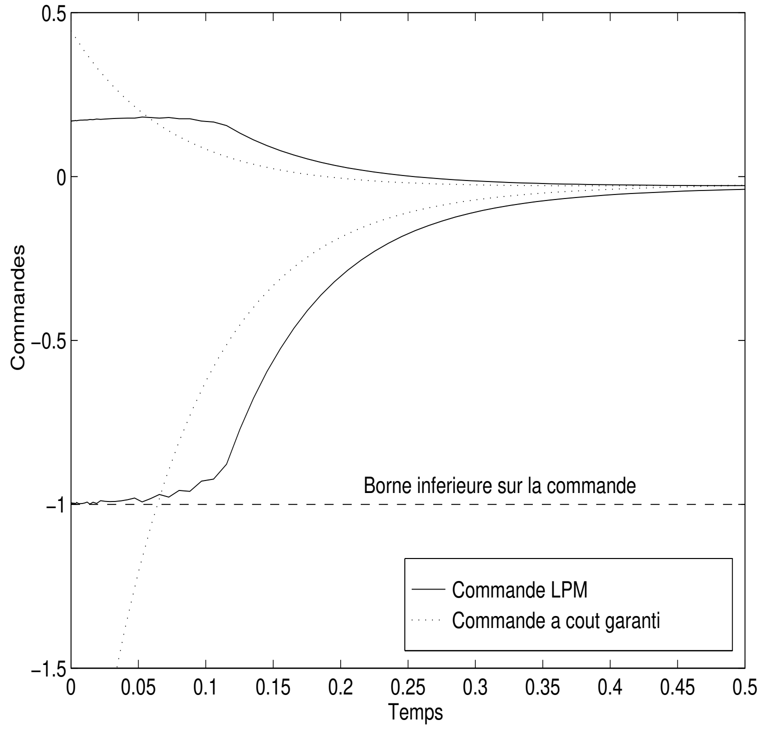

FIG. 5.4: Cas $M = N = 50$. Comparaison entre la commande de coût garanti sans contraintes et la commande LPM.

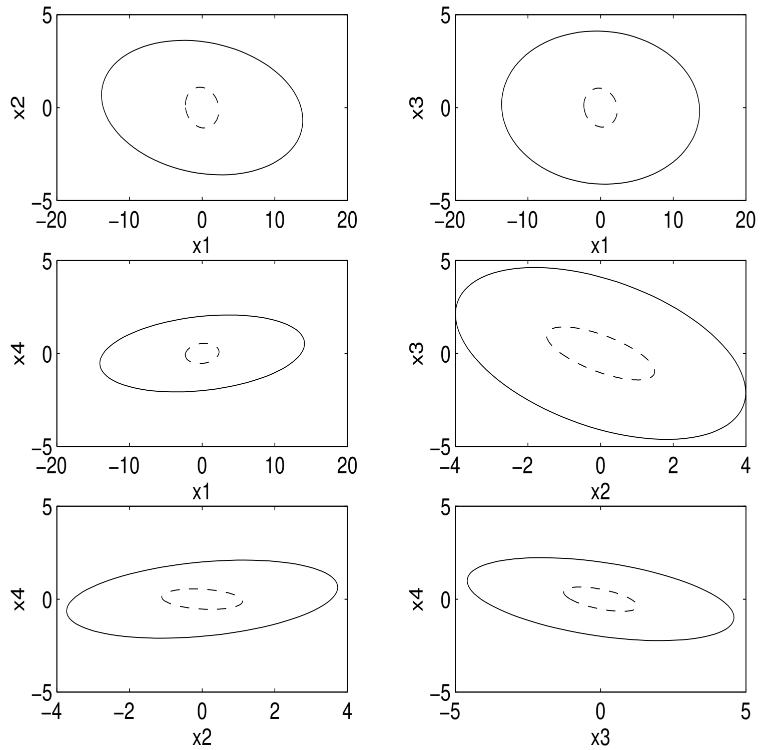

FIG. 5.5: Ensembles $\mathcal{E}_0$ de conditions initiales stabilisables obtenus avec l'approche LMI (trait plein) et l'approche ARE (trait discontinu).

Cela démontre clairement la plus grande souplesse de l'approche LMI. Cependant, la loi de commande LMI a été obtenue au prix d'une quantité de calculs (hors-ligne) plus importante. Le calcul de 50 ellipsoïdes imbriqués et gains de retour d'état, avec MATLAB 4.2 sur une Sun Sparc Station 30, a requis approximativement

- 1.4 secondes pour l'approche ARE, et
- 35 secondes pour l'approche LMI.

5.6 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une loi de commande qui permet de stabiliser un système incertain tout en évitant la saturation des commandes. De plus, une certaine performance est garantie en boucle fermée suffisamment près de l'origine. La loi de commande est linéaire par morceaux et les surfaces de commutation sont une famille d'ellipsoïdes inclus les uns dans les autres. Le vecteur d'état initial du système doit être initialisé dans l'ellipsoïde le plus grand de la famille. La loi de commande permet alors de s'assurer que les trajectoires en boucle fermée convergent vers l'ellipsoïde le plus petit de la famille, où une certaine performance est garantie en plus de la stabilité grâce à la minimisation d'un critère quadratique classique. Quelques astuces techniques sont également décrites afin de faciliter l'inclusion des ellipsoïdes et surtout d'augmenter l'ensemble de conditions initiales stabilisables.

L'avantage principal de notre loi de commande réside dans le fait qu'elle est simple à implanter. De plus, elle peut être calculée hors-ligne à l'aide d'outils standard et puissants de résolution d'AREs ou de LMIs, comme ceux brièvement décrits dans les sections 2.2 et 2.3.

Chapitre 6

Commande Polynomiale

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous poursuivons une troisième approche pour commander les systèmes linéaires en présence de limitations en amplitude sur les commandes. Il s'agit d'une technique basée sur l'algèbre des matrices polynomiales, introduite dans la section 2.5. Cette approche de la commande contrainte n'a pratiquement pas été étudiée dans la littérature. C'est pourquoi une telle approche nous semble très intéressante.

Nous n'avons considéré dans ce mémoire que les systèmes linéaires certains à temps discret, ceci dans un souci de simplicité pour présenter les résultats. Nous insistons en particulier sur les aspects numériques et sur l'utilisation des outils d'optimisation décrits dans le chapitre 2.

Ce chapitre s'articule de la façon suivante. Tout d'abord, dans la section 6.2, nous donnons une définition précise des problèmes que nous allons traiter. Le premier problème concerne la détermination d'un compensateur stabilisant, un domaine de conditions initiales étant a priori donné. Ce domaine peut être indifféremment un ellipsoïde ou un polyèdre. Le second problème consiste à determiner simultanément le compensateur stabilisant et le domaine de conditions initiales admissibles le plus grand possible. Insistons sur le fait que chacun de ces deux problèmes est traité sans permettre la saturation des commandes. La section 6.3 présente les résultats permettant de résoudre le premier problème posé, tandis que la section 6.4 aborde la résolution du second problème. Nous insistons également sur les liens existant entre l'approche polynomiale développée dans ce chapitre et les méthodes d'invariance positive développées dans le cadre de l'approche espace d'état. Dans la section 6.5, plusieurs exemples nous permettent d'illustrer nos résultats. Enfin, la section 6.6 conclut ce chapitre et propose quelques pistes pour étendre nos résultats au cas des systèmes incertains.

6.2 Position du problème

Nous considérons un système linéaire observable à temps discret

$$\begin{array}{rcl} \xi_{k+1} & = & F\xi_k + Gu_k \\ z_k & = & H\xi_k \end{array} \tag{6.1}$$

où ξ_k est un vecteur d'état à n composantes, u_k est un vecteur de commande à m composantes et z_k est un vecteur de sorties mesurées à p composantes. Le vecteur de commande u_k doit vérifier les contraintes

$$-u^- \leq u_k \leq u^+ \tag{6.2}$$

où u^-, u^+ sont des vecteurs donnés à composantes positives et le signe $\leq$ doit être interprété composante par composante. De plus, nous supposons que la condition intiale ξ_0 appartient à un ensemble convexe de l'espace d'état. Cet ensemble peut être

- un polyèdre

$$\mathcal{P}_N = \{\xi : N\xi \leq \nu\} \tag{6.3}$$

  où N est une matrice et ν est un vecteur donnés, ou
- un ellipsoïde

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_\Pi & = & \{\xi : (\xi - \xi_c)'\Pi(\xi - \xi_c) \leq 1\} \\ & = & \{\Pi^{-\frac{1}{2}}\eta + \xi_c : \|\eta\| \leq 1\} \end{array} \tag{6.4}$$

  où Π est une matrice semi-définie positive et ξ_c est un vecteur donnés.

A l'aide de la transformée en z, le système linéaire (6.1) peut s'écrire de façon équivalente à l'aide de la relation d'entrée-sortie

$$z(d) = S(d)u(d) + T(d)\xi_0 \tag{6.5}$$

où d représente l'opérateur de retard (voir paragraphe 1.2.1) et les matrices rationnelles

$$\begin{array}{rcl} S(d) & = & H(I - Fd)^{-1}Gd \\ T(d) & = & H(I - Fd)^{-1} \end{array}$$

peuvent s'exprimer à l'aide des descriptions par fractions de matrices polynomiales (voir paragraphe 1.2.1) comme

$$\begin{array}{rcl} S(d) & = & B(d)A^{-1}(d) \\ & = & \bar{A}^{-1}(d)\bar{B}(d) \\ T(d) & = & \bar{A}^{-1}(d)\bar{C}(d). \end{array} \tag{6.6}$$

Le système (6.5) ne doit pas avoir de modes cachés instables, et donc les couples de matrices polynomiales $A(d)$, $B(d)$ et $\bar{A}(d)$,$\bar{B}(d)$ doivent être respectivement coprimes à droite et à gauche, pour tout $|d| \leq 1$.

Nous contrôlons le système (6.5) par un compensateur dynamique

$$u(d) = -K(d)z(d) \tag{6.7}$$

où la matrice rationnelle $K(d)$ peut également s'exprimer comme une fraction de matrices polynomiales

$$\begin{aligned} K(d) &= Y(d)X^{-1}(d) \\ &= \bar{X}^{-1}(d)\bar{Y}(d). \end{aligned} \tag{6.8}$$

De façon équivalente, le compensateur dynamique (6.7) peut s'écrire dans le cadre de l'espace d'état

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} &= \bar{F}\eta_k + \bar{G}z_k \\ u_k &= \bar{H}\eta_k + \bar{J}z_k \end{aligned} \tag{6.9}$$

où

$$K(d) = \bar{H}(I - \bar{F}d)^{-1}\bar{G}d + \bar{J}.$$

Avec ces notations, nous allons étudier dans ce chapitre deux problèmes distincts qui sont décrits comme suit.

Problème 6.1 *Trouver le compensateur dynamique (6.9) tel que le système linéaire (6.1) soumis aux contraintes sur la commande (6.2) soit stabilisé quand on l'initialise dans le polyèdre (6.3) ou dans l'ellipsoïde (6.4).*

Problème 6.2 *Trouver le compensateur dynamique (6.9) et le plus grand polyèdre (6.3) ou ellipsoïde (6.4) tel que le système linéaire (6.1) soumis aux contraintes sur la commande (6.2) soit stabilisé quand on l'initialise dans cet ensemble.*

L'approche que nous avons suivie pour traiter ces deux problèmes consiste à éviter les saturations des commandes et donc à considérer que le système en boucle fermée doit rester linéaire.

Dans la section 6.3, nous allons montrer que le problème 6.1 peut toujours se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation convexe, nous permettant ainsi d'utiliser certains outils décrits dans le chapitre 2.

La résolution du problème 6.2 s'avère quant à elle beaucoup plus difficile que celle du problème 6.1. Dans la section 6.4 nous montrerons que le problème 6.2 peut être insoluble dans sa formulation générale mais que nous pouvons utiliser des algorithmes permettant d'obtenir des solutions sous-optimales. Le lien et les possibles équivalences entre ce problème et la détermination de l'ensemble maximal admissible décrit dans [37] seront également discutés.

6.3 Stabilisation

Dans ce paragraphe, nous montrons que le problème 6.1 peut être exprimé comme un problème d'optimisation LMI pouvant être résolu à l'aide des algorithmes de points intérieurs décrits dans le paragraphe 2.3.

A l'aide des équations (6.5) et (6.7), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} z(d) &= S(d)u(d) + T(d)\xi_0 \\ &= -S(d)K(d)z(d) + T(d)\xi_0 \\ &= [I + S(d)K(d)]^{-1}T(d)\xi_0 \end{aligned}$$

et donc

$$u(d) = -K(d)[I + S(d)K(d)]^{-1}T(d)\xi_0. \tag{6.10}$$

En utilisant les descriptions par fractions de matrices (6.6) et (6.8) et le lemme 2.4, nous avons

$$\begin{aligned} Y(d)\bar{A}(d)[I + S(d)K(d)]X(d) &= Y(d)[\bar{A}(d)X(d) + \bar{B}(d)Y(d)] \\ &= Y(d) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K(d) &= Y(d)X^{-1}(d) \\ &= Y(d)\bar{A}(d)[I + S(d)K(d)]. \end{aligned} \tag{6.11}$$

En reportant l'équation (6.11) dans l'équation (6.10) et en utilisant la paramétrisation du lemme 2.4, il découle

$$\begin{aligned} u(d) &= -Y(d)\bar{A}(d)T(d)\xi_0 \\ &= -Y(d)\bar{C}(d)\xi_0 \\ &= [A(d)Q(d)\bar{C}(d) - \hat{Y}(d)\bar{C}(d)]\xi_0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

où $\hat{Y}(d)$ est une solution particulière de l'équation de Bézout du lemme 2.4 et $Q(d)$ est une matrice rationnelle stable arbitraire de dimension $m \times p$.

Soient $u^j(d)$, $A^j(d)$, $Y^j(d)$ les lignes j respectives du vecteur $u(d)$ et des matrices $A(d)$ et $Y(d)$. Nous avons

$$u^j(d) = [A^j(d)Q(d)\bar{C}(d) - \hat{Y}^j(d)\bar{C}(d)]\xi_0 \tag{6.13}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, m$. Nous utilisons le produit de Kronecker [74] afin de formuler l'équation (6.13) comme suit

$$u^j(d) = [q(d)V^j(d) + W^j(d)]\xi_0 \tag{6.14}$$

où $q'(d)$ est un vecteur colonne obtenu en empilant les colonnes de la matrice $Q(d)$, et

$$\begin{aligned} V^j(d) &= \bar{C}(d) \otimes [A^j(d)]' \\ W^j(d) &= -\hat{Y}^j(d)\bar{C}(d) \end{aligned} \tag{6.15}$$

sont respectivement une matrice et un vecteur ligne. Nous pouvons représenter les séquences $u^j(d)$, $q(d)$ comme des séries infinies

$$\begin{aligned} u^j(d) &= u_0^j + u_1^j d + u_2^j d^2 + \cdots \\ q(d) &= q_0 + q_1 d + q_2 d^2 + \cdots \end{aligned} \tag{6.16}$$

et les matrices polynomiales $V^j(d)$, $W^j(d)$ de la même manière

$$\begin{array}{rcl} V^j(d) & = & V_0^j + V_1^j d + V_2^j d^2 + \cdots \\ W^j(d) & = & W_0^j + W_1^j d + W_2^j d^2 + \cdots \end{array} \tag{6.17}$$

En identifiant les coefficients des puissances de d dans la relation (6.14) nous obtenons

$$u_i^j = \bar{M}_i^j(q)\xi_0 \tag{6.18}$$

où

$$\bar{M}_i^j(q) = W_i^j + \sum_{k=0,1,2\ldots} q_k V_{i-k}^j \tag{6.19}$$

est un vecteur ligne paramétré par les vecteurs lignes q_k pour $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Rappelons que la séquence de commande $u(d)$ doit vérifier les contraintes (6.2). En considérant la relation (6.18), il s'en suit que le vecteur d'état initial ξ_0 est également contraint. Le lemme suivant formalise cette observation.

Lemme 6.1 *La commande $u(d)$ vérifie les contraintes (6.2) si et seulement si*

$$\xi_0 \in \mathcal{P}_M = \{\xi : M(q)\xi \leq \mu\} \tag{6.20}$$

où

$$M(q) = \begin{bmatrix} \bar{M}_0(q) \\ -\bar{M}_0(q) \\ \bar{M}_1(q) \\ -\bar{M}_1(q) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \bar{M}_i(q) = \begin{bmatrix} \bar{M}_i^1(q) \\ \vdots \\ \bar{M}_i^m(q) \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} u^+ \\ u^- \\ u^+ \\ u^- \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{6.21}$$

En se référant à la formulation du problème 6.1, le vecteur ξ_0 est supposé appartenir ou au polyèdre (6.3) ou à l'ellipsoïde (6.4). A l'aide des lemmes 2.1, 2.3 et du lemme ci-dessus, nous pouvons à présent déduire les conditions nécessaires et suffisantes de résolution du problème.

Théorème 6.1 *Le problème 6.1 est résolu*

- *dans le polyèdre (6.3) si, et seulement si, il existe une matrice P à composantes non-négatives et un vecteur q tels que*

$$\begin{array}{rcl} PN & = & M(q) \\ P\nu & \leq & \mu \end{array} \tag{6.22}$$

- *dans l'ellipsoïde (6.4) si, et seulement si, il existe un vecteur q tel que*

$$\|\Pi^{-\frac{1}{2}}(M^i(q))'\| + M^i(q)\xi_c \leq \mu^i, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{6.23}$$

où $M^i(q)$ et μ^i dénotent respectivement la ligne i dans la matrice $M(q)$ et le vecteur μ.

Un compensateur stabilisant est alors construit à l'aide du paramètre q.

Remarque 6.1 (Invariance positive) Nous pouvons faire le lien entre le résultat du lemme 6.1 ou du théorème 6.1 et les résultats obtenus via une approche espace d'état. Dans ce but, définissons le vecteur d'état étendu

$$\check{\xi}_k = \begin{bmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{bmatrix}$$

et les matrices étendues

$$\check{F} = \begin{bmatrix} F + G\bar{J}H & G\bar{H} \\ \bar{G}H & \bar{F} \end{bmatrix} \quad \check{H} = \begin{bmatrix} \bar{J}H & \bar{H} \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons facilement vérifier que le comportement du système (6.1) commandé par le compensateur (6.9) est régi par l'équation

$$\check{\xi}_{k+1} = \check{F}\check{\xi}_k,$$

la commande du système étant donnée par

$$u_k = \check{H}\check{\xi}_k.$$

Sous l'hypothèse que la paire $(\check{F}, \check{H})$ est détectable, définissons

$$\check{M} = \begin{bmatrix} \check{H} \\ -\check{H} \\ \check{H}\check{F} \\ -\check{H}\check{F} \\ \check{H}\check{F}^2 \\ -\check{H}\check{F}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \check{\mu} = \begin{bmatrix} u^+ \\ u^- \\ u^+ \\ u^- \\ u^+ \\ u^- \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Nous pouvons alors utiliser la méthode systématique décrite dans [37] pour générer l'ensemble maximal de conditions initiales $\check{\xi}_0$ pour le système en boucle fermée tel que les contraintes de commande (6.2) soient satisfaites. Cet ensemble est le polyèdre

$$\check{\mathcal{P}} = \left\{\check{\xi} : \check{M}\check{\xi} \leq \check{\mu}\right\}.$$

Par construction [37], ce polyèdre est positivement invariant. En effet, on peut montrer très aisément que le lemme 2.3 étendu de Farkas s'applique au polyèdre $\check{P}$. Cela signifie que pour toute condition initiale $\check{\xi}_0$ choisie dans $\check{\mathcal{P}}$, le vecteur d'état étendu $\check{\xi}_k$ reste confiné dans $\check{P}$ tout en convergeant vers l'origine et en vérifiant les contraintes (6.2).

Par construction, nous pouvons voir que le polyèdre $\mathcal{P}_M$ défini dans l'équation (6.20) est la restriction du polyèdre $\check{\mathcal{P}}$ obtenue en forçant $\eta_0 = 0$ dans le vecteur de conditions initiales $\check{\xi}_0$, c'est-à-dire quand on suppose que le vecteur d'état du compensateur dynamique est initialement nul. Ainsi, l'ensemble des vecteurs $\check{\xi}_0$ appartenant au polyèdre $\check{P}$ et tels que $\eta_0 = 0$ est le polyèdre

$$\check{P}_\xi = \{\xi : \check{M}_\xi \xi \leq \mu\}$$

où

$$\check{M}_\xi = \check{M}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}H \\ -\bar{J}H \\ \bar{J}H(F+G\bar{J}H)+\bar{H}GH \\ -\bar{J}H(F+G\bar{J}H)-\bar{H}GH \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

L'ensemble $\check{P}_\xi$ n'est généralement pas positivement invariant pour le système en boucle fermée. C'est donc cette restriction $\check{P}_\xi$ que nous obtenons via l'approche polynomiale, et c'est pourquoi sans hypothèse supplémentaire rien ne nous permet de garantir que toute trajectoire initialisée dans $\check{P}_\xi$ reste confinée dans cet ensemble. Néanmoins, on peut monter que pour tout vecteur initial ξ_0 choisi dans $\check{P}_\xi$, le vecteur étendu $\check{\xi}_k$ restera dans $\check{P}$, et donc que les contraintes sur la commande seront satisfaites. La convergence à l'origine des trajectoires est alors garantie par le fait que la matrice en boucle fermée $\check{F}$ est asymptotiquement stable.

Insistons finalement sur le fait que l'approche polynomiale telle que nous l'avons développée ne nous permet pas d'obtenir l'ensemble $\check{P}$ car nous n'avons pas pris en compte le vecteur d'état initial du compensateur η_0 dans nos équations. Notons cependant que nos résultats pourraient être facilement modifiés pour tenir compte de η_0, tout comme avec l'approche espace d'état.

Remarque 6.2 (Paramètre de Youla-Kučera polynomial) En général, la séquence $Q(d)$ peut s'exprimer comme une série infinie stable. Cependant, en pratique, nous considérons par la suite que $Q(d)$ est une série à réponse impulsionnelle finie, ou série polynomiale. Cette technique d'approximation qui consiste à tronquer les termes de degrés suffisamment élevés est courante. Elle permet de se ramener à des problèmes d'optimisation classique de dimension finie.

Remarque 6.3 (Problème de programmation convexe) Lorsque $Q(d)$ est une matrice polynomiale, les relations (6.22) deviennent un problème le programmation linéaire de dimension finie [117] qui doit être résolu en une matrice non-négative P et des vecteurs q_k. De la même manière, les relations (6.23) deviennent un problème de programmation LMI en les vecteurs q_k. Nous déduisons de la relation (6.12) que

$$\deg u \leq \max\{\deg A + \deg Q + \deg \bar{C}, \deg \hat{Y} + \deg \bar{C}\}.$$

Rappelons que le nombre de pas où la commande s'applique est égal à $\deg u + 1$. Dans les deux problèmes de programmation convexe mentionnés ci-dessus, la matrice $M(q)$ possède $N = 2m(\deg u + 1)$ lignes et n colonnes.

Remarque 6.4 (Ordre du compensateur) Tout comme dans la remarque 6.3, nous déduisons de la paramétrisation du lemme 2.4 que

$$\begin{aligned} \deg X &\leq \max\{\deg \hat{X}, \deg B + \deg Q\} \\ \deg Y &\leq \max\{\deg \hat{Y}, \deg A + \deg Q\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ordre du compensateur stabilisant (6.7) dépend du degré du paramètre de Youla-Kučera $Q(d)$. Cependant, cette dépendance n'est pas simple car des simplifications peuvent avoir lieu dans les équations du lemme 2.4. De plus, tout facteur unimodulaire à droite partagé par $X(d)$ et $Y(d)$ peut augmenter artificiellement les degrés de $X(d)$ et $Y(d)$ sans modifier l'ordre du compensateur. En particulier, si nous désirons obtenir un compensateur de retour de sortie statique, alors il est suffisant mais pas nécessaire de restreindre les matrices $X(d)$, $Y(d)$ à être constantes.

A la lumière des remarques ci-dessus, nous pouvons maintenant décrire un algorithme pour résoudre le problème 6.1.

Algorithme PolStab (Stabilisation)

Entrée : Le système (6.1) avec les contraintes sur la commande (6.2). Le polyèdre (6.3) ou l'ellipsoïde (6.4) des conditions initiales qui doivent être stabilisées. Le degré δ du paramètre de Youla-Kučera $Q(d)$.

Sortie : Un compensateur dynamique stabilisant (6.9), s'il existe.

Pas 1 : Calculer les matrices polynomiales $A(d)$, $B(d)$, $\bar{A}(d)$, $\bar{B}(d)$, $\bar{C}(d)$ des descriptions par fractions de matrices (6.6).

Pas 2 : Résoudre l'équation de Bézout du lemme 2.4 en les matrices polynomiales $\hat{X}(d)$, $\hat{Y}(d)$, $\hat{\hat{X}}(d)$, $\hat{\hat{Y}}(d)$.

Pas 3 : Supposons que la matrice polynomiale $Q(d)$ est de degré δ. Construire la matrice $M(q)$ et le vecteur μ en utilisant les relations (6.15), (6.17), (6.19) et (6.21).

Pas 4 : Si la région de stabilité désirée est le polyèdre (6.3), résoudre le problème de programmation linéaire (6.22) en une matrice non-négative P et un paramètre q. Si la région de stabilité désirée est l'ellipsoïde (6.4), résoudre le problème LMI (6.23) en un paramètre q. Si le problème est infaisable, conclure qu'il n'y a pas de paramètre de Youla-Kučera de degré δ qui résoud le problème et sortir.

Pas 5 : Reporter $Q(d)$ dans les relations du lemme 2.4 afin de construire les matrices polynomiales $X(d)$, $Y(d)$ du compensateur dynamique. En déduire la représentation par espace d'état correspondante (6.9).

Remarque 6.5 (Augmentation de l'ordre du compensateur) Bien sûr, si l'algorithme ci-dessus échoue pour un certain degré δ, le concepteur pourra essayer d'augmenter δ. Selon la remarque 6.4, cela impliquera sûrement une augmentation de l'ordre du compensateur. C'est donc au concepteur de jouer sur ce compromis, sachant qu'il n'y a pas de méthode directe pour obtenir la valeur minimale de δ pour laquelle la stabilité est assurée. Ainsi, seule une méthode dite "d'essai et d'erreur" peut être envisagée.

6.4 Régions maximales de stabilité

La loi de commande conçue dans le théorème 6.1 est valide lorsque l'état du système en boucle fermée est initialisé dans un ensemble convexe donné de l'espace d'état. Dans ce paragraphe, nous supposons que cette région n'est pas connue à l'avance. Comme indiqué dans l'énoncé du problème 6.2, un objectif naturel est alors de déterminer la région de stabilité la plus grande possible pour laquelle une commande stabilisante peut être construite. Cependant, nous allons voir que ce problème s'avère particulièrement compliqué dans le cas général, et que nous devrons nous contenter d'une solution approchée.

6.4.1 Régions polyédrales

En supposant par simplicité que le polyèdre $\mathcal{P}_M = \{\xi : M(q)\xi \leq \mu\}$ est borné, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_M$ est un polytope selon la terminologie de la section 2.3, il n'existe malheureusement pas de formule analytique pour calculer le volume de $\mathcal{P}_M$. Cependant, lorsque q est fixé, ce volume peut être calculé par des algorithmes numériques à complexité exponentielle qui s'avèrent particulièrement efficaces en pratique. On pourra consulter [21] pour des développements récents dans ce domaine. Par conséquent, nous pouvons en théorie construire une boîte noire pour calculer le volume de $\mathcal{P}_M$ et la connecter à un programme quelconque de maximisation. Il s'agirait d'un nouvel exemple de problème d'optimisation avec une fonction d'évaluation très coûteuse et un calcul de gradient numérique. Cette possibilité n'est pas étudiée dans ce mémoire.

Nous adoptons plutôt une approche plus simple et plus pragmatique. En supposant que l'on dispose d'un certain polyèdre $\mathcal{P}_N = \{\xi : N\xi \leq \nu\}$ comme approximation initiale, nous allons essayer de déterminer le plus grand facteur d'échelle ε^{-1} tel que le problème 6.1 est résolu dans le polyèdre homothétique

$$\varepsilon^{-1}\mathcal{P}_N = \{\xi : N\xi \leq \varepsilon^{-1}\nu\} \subset \mathcal{P}_M = \{\xi : M(q)\xi \leq \mu\}.$$

En se basant sur les relations (6.22), le problème d'optimisation qui en découle s'avère être un simple problème de programmation linéaire. Cette idée est exploitée dans l'algorithme suivant.

Algorithme PolMaxPoly **(Polyèdre homothétique maximal)**

Entrée : Le système (6.1) avec les contraintes sur la commande (6.2). Un polyèdre initial (6.3). Le degré δ du paramètre de Youla-Kučera $Q(d)$.

Sortie : Un compensateur dynamique (6.9) et le polyèdre correspondant (6.20) de conditions initiales stabilisables, s'ils existent.

Pas 1,2,3 et 5 : Voir l'algorithme PolStab.

Pas 4 : Résoudre le problème de programmation linéaire

$$\begin{array}{ll} \min & \varepsilon \\ \text{t.q.} & PN = M(q) \\ & P\nu \leq \varepsilon\mu \end{array} \tag{6.24}$$

en une matrice non-négative P, un paramètre q et un scalaire positif ε. Si le problème est infaisable, conclure qu'il n'y a pas de paramètre de Youla-Kučera de degré δ qui résoud le problème et sortir.

Remarque 6.6 (Polyèdre initial) Afin de trouver un polyèdre initial $\mathcal{P}_N$ convenable pour initialiser l'algorithme ci-dessus, nous pouvons construire la matrice N et le vecteur ν en utilisant la méthode systématique décrite dans [37]. Le polyèdre $\mathcal{P}_N$ peut être vu comme un ensemble garantissant une certaine taille minimale de l'ensemble de conditions initiales dans lequel la stabilisation doit nécessairement être assurée.

6.4.2 Régions ellipsoïdales

Etant donné que l'inégalité matricielle du lemme 2.1 est bilinéaire en les matrices Π et $M(q)$ dans le cas général, le calcul simultané de Π, ξ_c et q s'avère délicat. Notons cependant que Π et $M(q)$ entrent linéairement dans l'inégalité matricielle quand l'ellipsoïde $\mathcal{E}_\Pi$ est centré à l'origine, c'est-à-dire quand $\xi_c = 0$. Nous allons démontrer qu'il est toujours possible de normaliser les bornes sur la commande, de centrer l'ellipsoïde $\mathcal{E}_\Pi$ et d'utiliser cette formulation linéaire.

Lemme 6.2 *Supposons que $u^- \neq u^+$.*

- *Si la matrice F n'a pas de valeur propre égale à 1, alors le système (6.1) avec contraintes dissymétriques (6.2) peut s'écrire de manière équivalente avec des contraintes symétriques*

$$\begin{array}{l} \tilde{\xi}_{k+1} = F\tilde{\xi}_k + G\tilde{u}_k \\ -\tilde{u} \leq u_k \leq \tilde{u} \end{array} \tag{6.25}$$

  en posant $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \xi_c$, $\xi_c = (I-F)^{-1}G\Phi$, $\Phi = (u^+ + u^-)/2$ et $\tilde{u} = (u^+ - u^-)/2$.
- *Si la matrice F possède certaines valeurs propres égales à 1, alors nous pouvons considérer le système (6.25) en posant $\tilde{\xi}_k = \xi_k$ et $\tilde{u} = \min(u^+, u^-)$, cette dernière égalité étant valable composante par composante.*

La preuve découle de manipulations matricielles classiques. Il est facile de montrer que le vecteur ξ_c doit vérifier $(I-F)\xi_c = G\Phi$. Une condition suffisante d'existence de ξ_c est que la matrice $I - F$ soit inversible, ce qui est le cas si et seulement si F n'a pas de valeur propre égale à 1.

Rappelons que l'inclusion de l'ellipsoïde centré $\mathcal{E}_\Pi$ dans le polyèdre $\mathcal{P}_M$ est effective tout comme dans le lemme 2.1 si et seulement si une certaine LMI est vérifiée. Rappelons également que la longueur des axes de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_\Pi$ est inversement proportionnelle au carré des valeurs propres de Π. Par conséquent, afin de maximiser la taille de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_\Pi$, nous pouvons minimiser la valeur propre maximale de Π. L'algorithme suivant découle de cette observation.

Algorithme PolMaxElli (Ellipsoïde inscrit maximal)

Entrée : Le système (6.1) avec les contraintes sur la commande (6.2). Le degré δ du paramètre de Youla-Kučera $Q(d)$.

Sortie : Un compensateur dynamique stabilisant (6.9) et le polyèdre correspondant (6.20) de conditions initiales stabilisables, s'ils existent.

Pas 0 : Si $u^+ \neq u^-$, centrer la commande comme indiqué dans le lemme 6.2, suivant les propriétés de stabilité de F, et considérer le système équivalent (6.25).

Pas 1,2,3 et 5 : Voir l'algorithme PolyStab.

Pas 4 : Résoudre l'un ou l'autre des problèmes d'optimisation LMI suivants :

$$\begin{array}{ll} \min & \operatorname{trace} \Pi \\ \text{t.q.} & \begin{bmatrix} \Pi & \star \\ M^i(q) & (\mu^i)^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{6.26}$$

ou

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda \\ \text{t.q.} & \lambda I \succeq \Pi \\ & \begin{bmatrix} \Pi & \star \\ M^i(q) & (\mu^i)^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{6.27}$$

en une matrice positive semi-définie Π et un paramètre q. Si le problème est infaisable, conclure qu'il n'y a pas de paramètre de Youla-Kučera de degré δ qui résoud le problème et sortir.

Remarque 6.7 (Initialisation de l'algorithme) Un avantage notable de l'algorithme PolMaxElli par rapport à l'algorithme PolMaxPoly réside dans le fait qu'aucun polyèdre initial $\mathcal{P}_N$ n'est requis pour initialiser la procédure d'optimisation.

6.5 Exemples numériques

Nous allons maintenant illustrer les idées exposées dans ce chapitre à l'aide de plusieurs exemples numériques. Dans ce qui suit, les calculs sur les polynômes et les matrices polynomiales ont été réalisés à l'aide du paquetage Polynomial Toolbox 2.0 pour MATLAB [92, 98]. Les problèmes de programmation linéaire et semi-définie (LMI) ont été implantés à l'aide de l'interface LMITOOL 2.0 pour MATLAB [33] et résolus à l'aide des méthodes de points intérieurs du paquetage SDPHA 3.0 [20]. Les sommets du polytope $\mathcal{P}_M$ ont été déterminés de façon très efficaces par le logiciel QHULL [7]. Finalement, les simulations en boucle fermée ont été effectuées à l'aide de Simulink 2.0 pour MATLAB.

6.5.1 Premier exemple

Comme premier exemple illustratif, considérons le système linéaire monovariable discret étudié dans [118]

$$\xi_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \xi_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

où seulement la première composante du vecteur d'état est disponible pour la commande, c'est-à-dire

$$z_k = [1 \quad 0]\xi_k.$$

La commande du système est contrainte dans l'intervalle

$$-7 \leq u_k \leq 7$$

et nous supposons que le vecteur d'état initial ξ_0 appartient au polyèdre convexe $\mathcal{P}_N = \{\xi : N\xi \leq \nu\}$ où

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -1.5 & 2 \\ 1.5 & -2 \end{bmatrix} \quad \nu = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Nous désirons résoudre le problème 6.1, c'est-à-dire trouver un compensateur dynamique stabilisant pour le système ci-dessus. Nous utilisons l'algorithme POLYSTAB.

Tout d'abord, nous déterminons facilement les matrices polynomiales

$$\begin{aligned} A(d) &= 0.8621 - 1.7241d + d^2 \\ B(d) &= 0.4310d^2 \\ \bar{C}(d) &= [0.8621 - 1.0345d \quad 0.4310d^2] \end{aligned}$$

qui interviennent dans les descriptions par fractions de matrices (6.6). Une solution particulière à l'équation de Bézout du lemme 2.4 est donc

$$\begin{aligned} \hat{X}(d) &= 1.1600 + 2.3200d \\ \hat{Y}(d) &= 6.5888 - 5.3824d. \end{aligned}$$

Tout comme dans la remarque 6.2, nous supposons que $Q(d)$ est un polynôme de degré δ. A l'aide du théorème 6.1, nous en déduisons que le degré minimal pour lequel le problème de programmation linéaire (6.22) s'avère faisable est $\delta = 3$. Les matrices du problème de programmation linéaire sont

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4667 & 0.4667 & 0 \\ 0.4667 & 0 & 0 & 0.4667 \\ 0.3076 & 0.1060 & 0 & 0.4932 \\ 0 & 0.2015 & 0.5462 & 0.0530 \\ 0.0192 & 0 & 0 & 0.1338 \\ 0 & 0.0192 & 0.1338 & 0 \\ 0.4116 & 0 & 0 & 0.4942 \\ 0 & 0.4116 & 0.4942 & 0 \\ 0.1891 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1891 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2742 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2742 \\ 0 & 0.2986 & 0.5247 & 0 \\ 0.2986 & 0 & 0 & 0.5247 \end{bmatrix} \quad M(q) = \begin{bmatrix} -1.1667 & 0 \\ 1.1667 & 0 \\ 0.9414 & -0.5833 \\ -0.9414 & 0.5833 \\ 0.2199 & -0.2293 \\ -0.2199 & 0.2293 \\ 1.1529 & -0.1653 \\ -1.1529 & 0.1653 \\ 0.1891 & 0.3781 \\ -0.1891 & -0.3781 \\ -0.4112 & 0.5483 \\ 0.4112 & -0.5483 \\ -1.0857 & 0.4524 \\ 1.0857 & -0.4524 \end{bmatrix}$$

pour le polynôme

$$Q(d) = 6.0731 + 5.2855d + 3.0815d^2 + 1.0495d^3$$

et un vecteur μ dont les 14 composantes sont toutes égales à 7. En reportant $Q(d)$ dans les relations du lemme 2.4, un compensateur de retour de sortie stabilisant est donné par les polynômes

$$\begin{aligned} X(d) &= 1.1600 + 2.3200d + 2.6177d^2 + 2.2783d^3 + 1.3282d^4 + 0.4524d^5 \\ Y(d) &= 1.3533 + 0.5320d + 0.3834d^2 - 0.8773d^3 - 1.2721d^4 - 1.0495d^5. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un compensateur d'ordre 5. Nous pouvons ainsi garantir que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable pour toute condition initiale choisie dans le polyèdre $\mathcal{P}_N$. La commande du système est représentée sur la figure 6.1 quand l'état du système est initialisé à

$$\xi_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ -0.5 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}_N.$$

A titre de comparaison, sur la figure 6.2 nous montrons le polyèdre $\mathcal{P}_N$ de conditions initiales stabilisables désirées et le polyèdre $\mathcal{P}_M$ de conditions initiales effectivement stabilisables par le compensateur ci-dessus. Un avantage notable de notre approche par rapport à celle exposée dans [118] est que nous pouvons concevoir des compensateurs de retour de sortie dynamique. Cependant, ces compensateurs peuvent être d'ordre relativement élevé.

6.5.2 Deuxième exemple

Nous montrons maintenant à l'aide d'un exemple numérique très simple que le choix du paramètre $Q(d)$ peut influencer la taille du polyèdre des conditions initiales stabilisables.

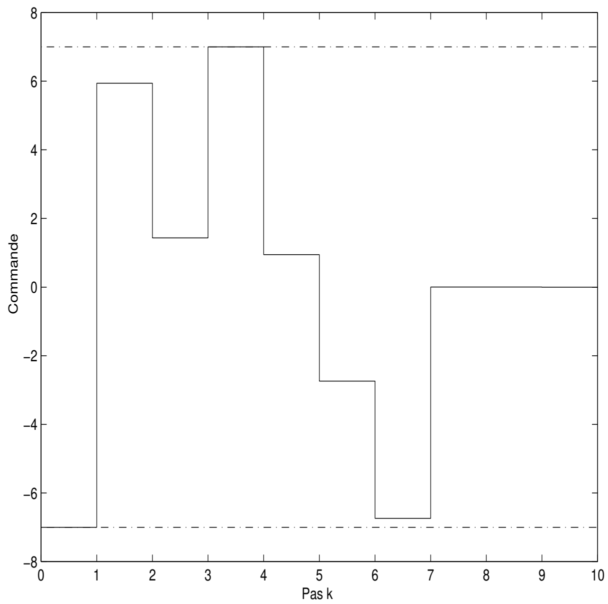

FIG. 6.1: Commande du système.

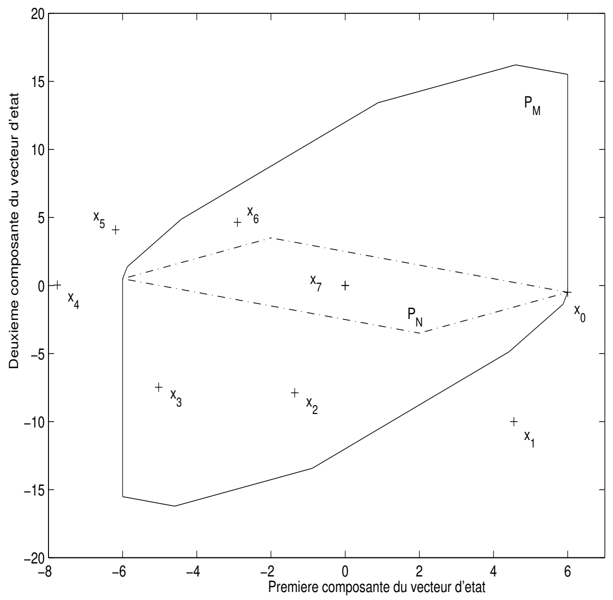

FIG. 6.2: Polyèdres $\mathcal{P}_M$ et $\mathcal{P}_N$ avec vecteur d'état ξ_k.

Considérons le système discret instable

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= 2\xi_k + u_k \\ z_k &= \xi_k \end{aligned}$$

dont la commande est contrainte dans l'intervalle

$$-1 \leq u_k \leq 1.$$

Supposons que le polyèdre de conditions initiales admissibles soit donné par

$$\mathcal{P}_N = \{\xi : -1/\alpha \leq \xi \leq 1/\alpha\}$$

où α est un scalaire positif.

Les polynômes du système sont facilement déterminés. Ils sont égaux à $A(d) = 1 - 2d$, $B(d) = 1$ et $\bar{C}(d) = 1$. Une solution particulière à l'équation de Bézout du lemme 2.4 est $\hat{X}(d) = 0$ et $\hat{Y}(d) = 1$.

Nous avons construit le problème de programmation linéaire (6.22) pour des valeurs successives de δ, degré du polynôme $Q(d)$. Nous pouvons facilement trouver les paramètres Q_i tels que le seuil α soit minimisé et donc que la taille du polyèdre $\mathcal{P}_M$ soit maximisée. Dans la table 1, nous avons reporté les valeurs des Q_i et le seuil minimum α pour différentes valeurs de δ. Quand le degré δ tend vers l'infini, $Q(d)$ tend vers une séquence convergente infinie et le seuil α tend vers une valeur finie, à savoir 1. Cela n'est pas surprenant puisque nous savons que la stabilisation par une commande bornée d'un système instable en boucle ouverte ne peut être effectuée que localement.

δ	α	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
–	2	0	0	0	0	0	0
0	4/3	2/3	0	0	0	0	0
1	8/7	6/7	4/7	0	0	0	0
2	16/15	14/15	12/15	8/15	0	0	0
3	32/31	30/31	28/31	24/31	16/31	0	0
4	64/63	62/63	60/63	56/63	48/63	32/63	0
5	128/127	126/127	124/127	120/127	112/127	96/127	64/127

Table 1 – Seuil α et paramètres Q_i pour différents degrés δ.

L'exemple démontre clairement que la taille du domaine de conditions initiales stabilisables peut être augmentée à l'aide des degrés de liberté offerts par l'approche. Notons néanmoins que si l'on augmente la taille du domaine de conditions initiales, on augmente également l'ordre du compensateur, ce qui peut s'avérer irréaliste en pratique.

6.5.3 Troisième exemple

Considérons le système discret multivariable étudié dans [47]. Sa représentation dans l'espace d'état s'écrit

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1.7 & -3.3 \\ 1.3 & 0.3 \end{bmatrix} \xi_k + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} u_k \\ z_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_k \end{aligned}$$

où le vecteur de commande doit vérifier les contraintes

$$-\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \leq u_k \leq \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

et le vecteur d'état initial ξ_0 doit appartenir au polyèdre

$$\mathcal{P}_N = \{\xi : \underbrace{\begin{bmatrix} -0.076 & 0.536 \\ -0.544 & 0.384 \\ 0.076 & -0.536 \\ 0.544 & -0.384 \end{bmatrix}}_{N} \xi \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}}_{\nu} \}.$$

Nous désirons résoude le problème 6.1, c'est-à-dire trouver un compensateur dynamique qui stabilise le système pour toute condition initiale choisie dans $\mathcal{P}_N$. Nous utilisons l'algorithme PolyStab.

Les matrices polynomiales des descriptions par fractions de matrices (6.6) sont les suivantes

$$\begin{aligned} A(d) &= \begin{bmatrix} -0.0667 + d & -0.2667 \\ 0.6937 & -0.3500 + d \end{bmatrix} & B(d) &= \begin{bmatrix} 1.188d & -1.500d \\ 1.521d & -0.1667d \end{bmatrix} \\ \bar{A}(d) &= \begin{bmatrix} -0.0625 + d & -0.6875 \\ 0.2708 & -0.3542 + d \end{bmatrix} & \bar{B}(d) &= \begin{bmatrix} 1.1875d & -1.5000d \\ 1.5208d & -0.1667d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'identité de Bézout du lemme 2.4 s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{X}(d) &= \begin{bmatrix} -1.7000 & 3.3000 \\ -1.3000 & -0.3000 \end{bmatrix} & \hat{Y}(d) &= \begin{bmatrix} 0.8000 & 0.4800 \\ -0.5000 & 2.5800 \end{bmatrix} \\ \hat{\bar{X}}(d) &= \begin{bmatrix} -1.6800 & 1.2800 \\ -3.3300 & -0.3200 \end{bmatrix} & \hat{\bar{Y}}(d) &= \begin{bmatrix} 0.8000 & 0.4800 \\ -0.5000 & 2.5800 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour un paramètre matriciel de premier degré ($\delta = 1$)

$$Q(d) = \begin{bmatrix} -0.5017 + 0.1654d & 0.7760 + 0.3677d \\ -0.7751 - 0.4976d & -0.5365 + 0.2719d \end{bmatrix}$$

le problème de programmation linéaire (6.22) a une solution non-négative

$$P = \begin{bmatrix} 0.9818 & 0.0008 & 0.0013 & 0.0086 \\ 0.0008 & 0.0120 & 0.9813 & 0.0042 \\ 0.3491 & 0.0006 & 0.0021 & 0.4308 \\ 0.0324 & 0.4591 & 0.3794 & 0.0289 \\ 0.0211 & 0.0268 & 0.3962 & 0.1384 \\ 0.4435 & 0.2315 & 0.0684 & 0.1198 \\ 0.0034 & 0.9746 & 0.0189 & 0.0008 \\ 0.0194 & 0.0014 & 0.0039 & 0.9752 \\ 0.8933 & 0.0850 & 0.0286 & 0.0742 \\ 0.0105 & 0.0255 & 0.8752 & 0.0364 \\ 0.6855 & 0.0291 & 0.0227 & 0.3142 \\ 0.0081 & 0.2936 & 0.6709 & 0.0085 \end{bmatrix}$$

correspondant au polyèdre

$$\mathcal{P}_M = \{\xi : \underbrace{\begin{bmatrix} -0.0703 & 0.5226 \\ -0.5285 & 0.3656 \\ 0.0703 & -0.5226 \\ 0.5285 & -0.3656 \\ 0.2076 & 0.0208 \\ -0.0716 & 0.4676 \\ -0.2076 & -0.0208 \\ 0.0716 & -0.4676 \\ 0.0892 & -0.2439 \\ 0.1047 & 0.2458 \\ -0.0892 & 0.2439 \\ -0.1047 & -0.2458 \end{bmatrix}}_{M(q)} \xi \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.0 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.0 \\ 1.4 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}}_{\mu} \}.$$

Les polyèdres $\mathcal{P}_N$ et $\mathcal{P}_M$ sont représentés sur la figure 6.3. Nous pouvons vérifier que $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{P}_M$.

En reportant la matrice $Q(d)$ dans les relations du lemme 2.4, les matrices polynomiales décrivant le compensateur sont

$$\begin{aligned} X(d) &= \begin{bmatrix} -1.7000 + 0.5668d + 0.9427d^2 & 3.3000 + 1.7262d + 0.0287d^2 \\ -1.300 - 0.6338d + 0.3345d^2 & -0.3000 + 1.2696d + 0.5139d^2 \end{bmatrix} \\ Y(d) &= \begin{bmatrix} 0.5599 + 0.3801d - 0.1654d^2 & 0.3887 - 0.6790d - 0.3677d^2 \\ -0.4232 + 0.4862d + 0.4976d^2 & 1.8539 + 0.3766d - 0.2719d^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier qu'il s'agit d'un compensateur d'ordre 4. La séquence d'entrée (6.12) est le vecteur polynomial de degré deux

$$u(d) = \begin{bmatrix} -0.0703 + 0.2076d + 0.0892d^2 & 0.5226 + 0.0208d - 0.2439d^2 \\ -0.5285 - 0.0716d + 0.1047d^2 & 0.3656 + 0.4676d + 0.2458d^2 \end{bmatrix} \xi_0.$$

Cela signifie que la condition initiale ξ_0 choisie dans $\mathcal{P}_M$ est ramenée à l'origine en 3 pas au plus. A titre de comparaison, la même performance a été obtenue dans [47] dans le même domaine par le biais d'un schéma de regulation variable assez complexe.

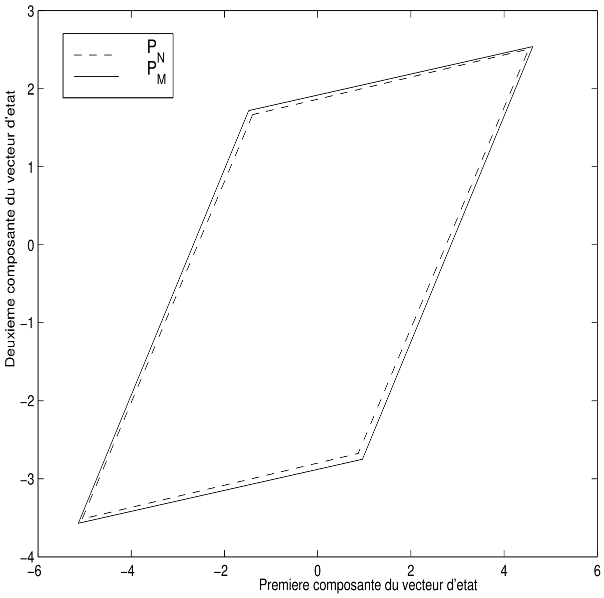

FIG. 6.3: Polyèdres $\mathcal{P}_N$ et $\mathcal{P}_M$.

6.5.4 Quatrième exemple

Nous considérons le système linéaire discret multivariable étudié dans [118]. Sa représentation dans l'espace d'état est la suivante

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \xi_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ z_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_k. \end{aligned}$$

Ce système a été étudié dans le paragraphe 6.5.1 dans le cas où seulement la première composante du vecteur d'état était disponible pour la commande. La commande du système est contrainte de la façon suivante

$$-7 \leq u_k \leq 7.$$

Nous désirons résoudre le problème 6.2, c'est-à-dire trouver à la fois un compensateur stabilisant et le plus grand ensemble de conditions initiales stabilisables.

Tout d'abord, nous illustrons l'algorithme POLMAXPOLY et déterminons le plus grand polyèdre homothétique de conditions initiales stabilisables. Tout comme dans [118], nous choisissons

$$\mathcal{P}_N = \{\xi : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -1.5 & 2 \\ 1.5 & -2 \end{bmatrix}}_{N} \xi \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\nu} \}$$

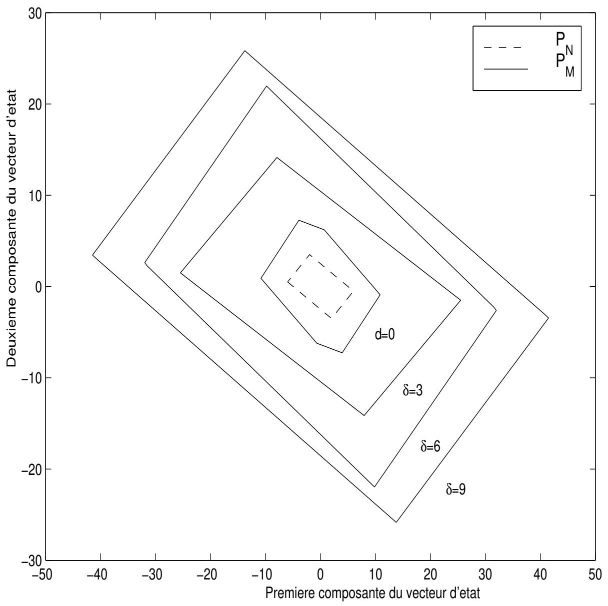

FIG. 6.4: Polyèdres $\mathcal{P}_M$ pour valeurs successives de δ.

comme polyèdre initial. Les matrices polynomiales des relations (6.6) sont les suivantes

$$\begin{array}{rclrcl} A(d) & = & 0.8621 - 1.7241d + d^2 & B(d) & = & \begin{bmatrix} 0.4310d^2 \\ 0.8621d - 0.6897d^2 \end{bmatrix} \\ \bar{A}(d) & = & \begin{bmatrix} -1.0345 + d & 0.4310 \\ -0.3448 & -0.6897 + d \end{bmatrix} & \bar{B}(d) & = & \begin{bmatrix} 0.4310d \\ -0.6897d \end{bmatrix}. \end{array}$$

Des solutions particulières à la double identité de Bézout du lemme 2.4 sont

$$\begin{array}{rcl} \hat{X}(d) & = & \begin{bmatrix} -0.8000 - 0.4400d & -0.5000 - d \\ 0.4000 + 0.7040d & -1.2000 + 1.6000d \end{bmatrix} \\ \hat{Y}(d) & = & \begin{bmatrix} 0.0960 + 1.0208d & -2.8400 + 2.3200d \end{bmatrix} \\ \hat{\hat{X}}(d) & = & 1.1600 \\ \hat{\hat{Y}}(d) & = & \begin{bmatrix} 1.0208 & 2.3200 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Le problème linéaire d'optimisation (6.24) est résolu pour des valeurs successives de δ, degré de la matrice polynomiale $Q(d)$. Le polyèdre de stabilité $\mathcal{P}_M$ correspondant est représenté sur la figure 6.4. Comme nous pouvons le voir, nous avons beaucoup élargi l'ensemble de conditions initiales stabilisables proposé dans [118]. Bien sûr, cette amélioration n'a été possible qu'en augmentant l'ordre du compensateur.

Ensuite, nous illustrons l'algorithme PolMaxElli et cherchons le plus grand ellipsoïde de conditions initiales stabilisables. Nous résolvons le problème d'optimisation semi-définie pour des valeurs successives de δ. Notons que les contraintes sur la commande sont symétriques et donc qu'il est inutile d'effectuer le centrage du Pas 0. Le polyèdre de stabilité $\mathcal{P}_M$ est représenté sur la figure 6.5. Dans ce cas également, nous notons une amélioration significative des résultats obtenus dans [118]. Le système est boucle

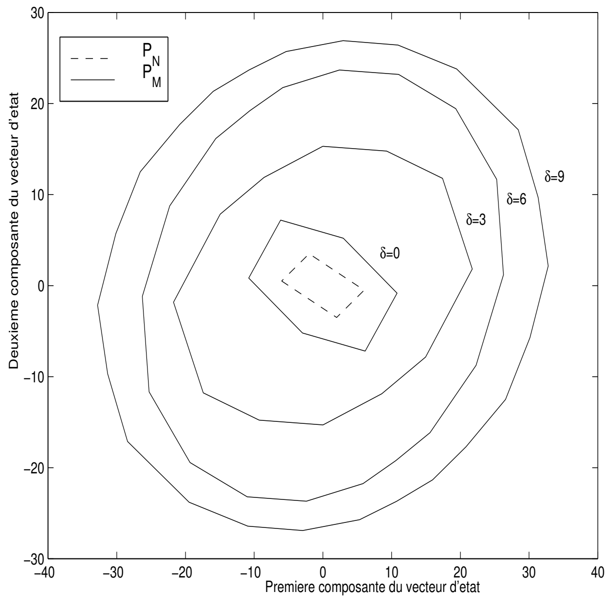

FIG. 6.5: Polyèdres $\mathcal{P}_M$ pour valeurs successives de δ.

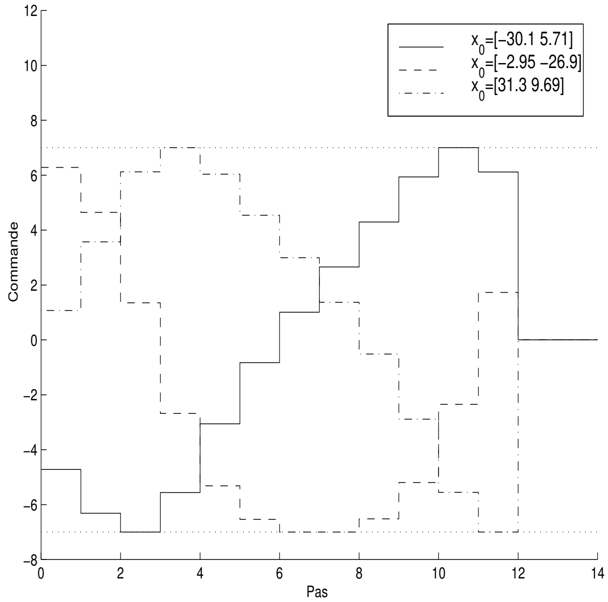

FIG. 6.6: Commande pour $\delta = 9$ et différentes conditions initiales.

fermée est alors simulé pour $\delta = 9$ et trois conditions initiales ξ_0. Comme le montre la figure 6.6, les contraintes sur la commande sont toujours vérifiées.

Finalement, dans le but d'illustrer la remarque 6.4, nous essayons de minimiser le degré des matrices polynomiales $X(d)$ et $Y(d)$ dans les équations du lemme 2.4, en espérant que l'ordre du compensateur correspondant soit également minimisé. Nous avons obtenu un compensateur de premier ordre dont les matrices polynomiales sont les suivantes

$$\begin{aligned} X(d) &= \begin{bmatrix} -0.8000 - 0.4400d - 0.1510d^2 & -0.5000 - d - 0.5925d^2 \\ 0.4000 + 0.4019d + 0.2416d^2 & -1.200 + 0.4149d + 0.9481d^2 \end{bmatrix} \\ Y(d) &= \begin{bmatrix} 0.3981 + 0.4167d + 0.3504d^2 & -1.6549 - 0.0510d + 1.3747d^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6.5.5 Cinquième exemple

Considérons le système linéaire discret multivariable étudié dans [10]. Sa représentation dans l'espace d'état s'écrit

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1.4 & -0.3 \\ -1.2 & 0.7 \end{bmatrix} \xi_k + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u_k \\ z_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_k \end{aligned}$$

et les contraintes sur la commande sont les suivantes

$$-0.5 \leq u_k \leq 5.$$

Tout d'abord, nous supposons comme dans [10] que le vecteur d'état initial ξ_0 appartient au polyèdre

$$\mathcal{P}_N = \{\xi : \underbrace{\begin{bmatrix} -1.0 & 0.2 \\ 0.5 & -1.1 \\ 1.0 & -0.2 \\ -0.5 & 1.1 \end{bmatrix}}_{N} \xi \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0.5 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\nu} \}.$$

Nous souhaitons résoudre le problème 6.1, c'est-à-dire trouver un compensateur qui stabilise toute condition initiale choisie dans $\mathcal{P}_N$. A l'aide de l'algorithme PolyStab, nous obtenons

$$\begin{aligned} A(d) &= 1.613 - 3.387d + d^2 & B(d) &= \begin{bmatrix} 1.613d - 0.6452d^2 \\ -1.613d + 0.3226d^2 \end{bmatrix} \\ \bar{A}(d) &= \begin{bmatrix} -1.129 + d & -0.4839 \\ -1.935 & -2.258 + d \end{bmatrix} & \bar{B}(d) &= \begin{bmatrix} -0.6452d \\ 0.3226d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

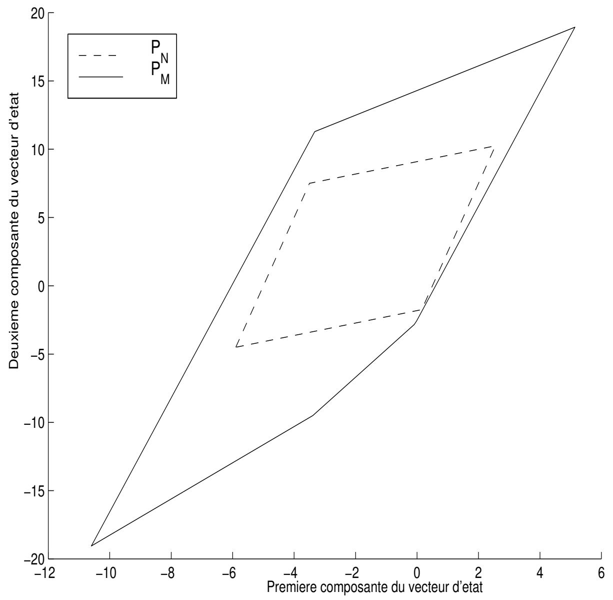

FIG. 6.7: Polyèdres $\mathcal{P}_N$ et $\mathcal{P}_M$.

satisfaisant les équations (6.6). Des solutions particulières à la double identité de Bézout du lemme 2.4 sont

$$\begin{aligned}
\hat{X}(d) &= \begin{bmatrix} -1.4000+0.4000d & 0.3000-0.4400d \\ 1.2000-0.2000d & -0.7000+0.2200d \end{bmatrix} \\
\hat{Y}(d) &= \begin{bmatrix} -2.7200+0.6200d & 1.0700-0.6820d \end{bmatrix} \\
\hat{\hat{X}}(d) &= 0.5200+0.6654d+0.4801d^2+0.2420d^3+0.0665d^4 \\
\hat{\hat{Y}}(d) &= \begin{bmatrix} 0.5136+0.6220d+0.5032d^2+0.2813d^3+0.0861d^4 \\ -0.1230-0.1408d-0.1275d^2-0.0894d^3-0.0339d^4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Le problème linéaire (6.22) est alors résolu pour une matrice polynomiale $Q(d)$ de degré $\delta = 3$. Le polyèdre de stabilité $\mathcal{P}_N$ correspondant est représenté sur la figure 6.7. Les matrices polynomiales du compensateur sont les suivantes

$$\begin{aligned}
\bar{X}(d) &= 0.6200+0.6654d+0.4801d^2+0.2420d^3+0.0665d^4 \\
\bar{Y}(d) &= \begin{bmatrix} 0.5136+0.6220d+0.5032d^2+0.2813d^3+0.0861d^4 \\ -0.1230-0.1408d-0.1275d^2-0.0894d^3-0.0339d^4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

L'ordre du compensateur est donc égal à 4.

Dans une deuxième étape, nous souhaitons résoudre le problème 6.2 avec l'algorithme MAXSTABELLI. Nous supposons que le polyèdre $\mathcal{P}_N$ n'est pas connu, et que la région de stabilité et le compensateur dynamique doivent être déterminés simultanément. Notons que les contraintes sur la commande ne sont pas symétriques et donc le pas 0 de centrage doit être effectué. Le système linéaire (6.25) équivalent s'écrit

$$\tilde{\xi}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1.4 & -0.3 \\ -1.2 & 0.7 \end{bmatrix} \tilde{\xi}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tilde{u}_k$$

avec les contraintes symétriques

$$-2.75 \leq \tilde{u}_k \leq 2.75$$

et le vecteur de centrage

$$\xi_c = \begin{bmatrix} -2.8133 \\ 3.7500 \end{bmatrix}.$$

Les matrices polynomiales des relations (6.6) sont les suivantes

$$\begin{aligned} A(d) &= 1.613 - 3.387d + d^2 & B(d) &= \begin{bmatrix} 4.435d - 1.774d^2 \\ -4.435d + 0.8871d^2 \end{bmatrix} \\ \bar{A}(d) &= \begin{bmatrix} -1.129 + d & -0.4839 \\ -1.935 & -2.258 + d \end{bmatrix} & \bar{B}(d) &= \begin{bmatrix} -1.774d \\ 0.8871d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Des solutions particulières de la double identité de Bézout du lemme 2.4 sont

$$\begin{aligned} \hat{X}(d) &= \begin{bmatrix} -1.4000 + 0.4000d & 0.3000 - 0.4400d \\ 1.2000 - 0.2000d & -0.7000 + 0.2200d \end{bmatrix} \\ \hat{Y}(d) &= \begin{bmatrix} -0.9891 + 0.2255d & 0.3891 - 0.2480d \end{bmatrix} \\ \hat{\hat{X}}(d) &= 0.6200 + 0.8022d + 0.8004d^2 + 0.6838d^3 + 0.4399d^4 \\ \hat{\hat{Y}}(d) &= \begin{bmatrix} 0.1411 + 0.1911d + 0.2086d^2 + 0.2144d^3 + 0.2158d^4 \\ -0.0406 - 0.0552d - 0.0606d^2 - 0.0629d^3 - 0.0643d^4 \end{bmatrix}'. \end{aligned}$$

Le problème de programmation semi-définie (6.26) est alors résolu pour $\delta = 3$, résultant en un compensateur d'ordre 5. Nous obtenons

$$\Pi = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 555.2 & -19.95 \\ -19.95 & 491.6 \end{bmatrix}.$$

L'ellipsoïde $\mathcal{E}_\Pi = \{\xi : (\xi - \xi_c)'\Pi(\xi - \xi_c) \leq 1\}$ et le polyèdre inscrit $\mathcal{P}_M = \{\xi : M(q)(\xi - \xi_c) \leq \mu\}$ sont représentés sur la figure 6.8. Comme nous pouvons le voir, le polyèdre $\mathcal{P}_M$ est très allongé dans une direction particulière. Lorsque nous augmentons δ nous nous apercevons que $\mathcal{P}_M$ possède une direction infinie et que le domaine de conditions initiales stabilisables n'est pas borné. Cette direction correspond à un mode stable du système en boucle fermée. Il s'agit du vecteur propre $[0.2760 \quad 0.9611]'$ associé à la valeur propre stable 0.3554. Ce vecteur propre appartient au noyau à droite de la matrice $M(q)$.

6.6 Conclusion

Nous avons proposé une solution simple au problème de la stabilisation locale d'un système linéaire discret multivariable soumis à des contraintes sur la commande. Des algorithmes pratiques et facilement implantables ont été décrits pour calculer une loi de

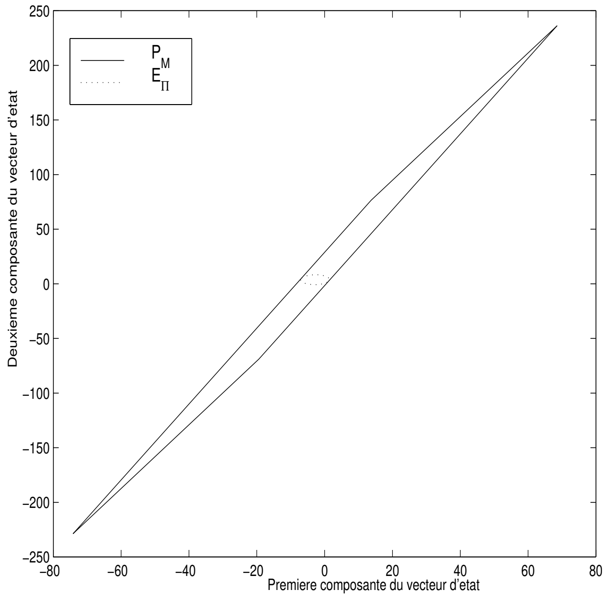

FIG. 6.8: Ellipsoïde $\mathcal{E}_\Pi$ et polyèdre $\mathcal{P}_M$.

commande stabilisable et la plus grande région de stabilité associée. L'avantage majeur de notre approche réside dans le fait qu'elle ne s'appuye que sur la résolution de problèmes convexes, contrairement aux autres méthodes de stabilisation locale basées sur des problèmes bilinéaires non-convexes [109, 59, 43]. Le principal désavantage de notre approche est dans le choix du degré du compensateur. Le concepteur doit jouer sur le compromis entre l'augmentation de l'ordre du compensateur et l'augmentation de la taille du domaine de conditions initiales stabilisables. En effet, comme nous l'avons illustré dans les exemples précédents, nous pouvons augmenter la taille de le région de stabilité mais en ayant un compensateur d'ordre trop élevé donc difficilement implantable en pratique [90].

Notre approche peut être facilement étendue pour prendre en compte des contraintes polyédrales ou ellipsoïdales sur l'état ou la sortie du système. Les systèmes continus peuvent être également considérés grâce aux résultats proposés dans [119]. Une certaine performance au voisinage de l'origine peut également être assurée. Dans ce cas-ci il faudra vraisemblablement jouer sur le compromis entre les performances atteignables et la taille du domaine de stabilité [51].

Finalement, les résultats de ce chapitre peuvent être étendus aux systèmes incertains en poursuivant l'approche décrite initialement dans [119]. Dans le cas monovariable, cette approche est exposée très clairement dans [31]. Nous en rappelons maintenant les principales étapes :

- Les incertitudes considérées peuvent être de type additif ou multiplicatif, voir le paragraphe 1.2.2. Une borne supérieure est donnée sur la norme infinie du terme incertain. Cette borne peut être une constante normalisée à 1 par simplicité [73]. Elle peut également dépendre de la fréquence, tout comme dans le Chapitre 7 de [119].
- Un compensateur stabilisant quelconque est calculé pour le système sans incertitude en résolvant une équation de Bézout, voir le paragraphe 2.5.

– Un compensateur stabilisant robustement le système incertain existe si, et seulement si, la norme infinie d'une fonction affine du paramètre de Youla-Kučera est inférieure à 1. Typiquement, cette condition s'écrit

$$\|A + BQC\|_\infty \leq 1 \tag{6.28}$$

où A, B et C sont des matrices rationnelles dont les éléments dépendent du système certain et du compensateur arbitraire trouvé ci-dessus. Le paramètre de Youla-Kučera Q est une matrice rationnelle à déterminer. Elle paramétrise un compensateur robuste. La résolution de l'inégalité (6.28) fait appel à la théorie de l'interpolation de Nevanlinna-Pick. Elle est décrite dans [31].

L'extension des résultats de ce chapitre aux systèmes incertains permettrait donc de disposer d'une méthode supplémentaire de synthèse de compensateurs robustement et localement stabilisants pour les systèmes linéaires incertains à commandes contraintes.

Conclusion

Un problème qui se pose naturellement au vu des divers résultats de la troisième partie de ce mémoire est celui de savoir quelle méthode de synthèse permet d'obtenir les meilleurs résultats, en terme de taille de l'ensemble de conditions initiales stabilisables et en terme de rapidité de convergence.

Afin d'étudier ce problème, nous avons testé nos méthodes sur de nombreux exemples numériques trouvés dans la littérature. Cependant, la diversité et le manque d'homogénéité des résultats obtenus nous ont empêchés de donner une réponse définitive à cette question. Certaines méthodes s'avèrent meilleures pour certains exemples, mais cette tendance est inversée pour d'autres exemples. Parfois même au sein d'une même méthode, la technique utilisée permet d'obtenir des résultats différents. Les seuls commentaires que nous pouvons faire restent d'ordre très général.

- Nous pouvons remarquer que la méthode de commande saturante du chapitre 4 fournit des compensateurs d'ordre égal à celui du système, et que la méthode de commande linéaire par morceaux du chapitre 5 génère une séquence de retours d'état statiques. Par contraste, la méthode polynomiale du chapitre 6 peut générer des compensateurs dynamiques d'ordre relativement élevé, ce qui peut être vu comme un désavantage.
- Nous pouvons affirmer que les techniques LMI donnent, en général, des résultats meilleurs que les techniques AREs, en ce qui concerne les méthodes des chapitres 4 et 5. Cependant, il existe des exemples pour lesquels cette tendance est inversée, voir par exemple [112].
- Les lois de commande obtenues grâce aux méthodes des chapitres 4 et 6 (de simples compensateurs dynamiques) sont relativement plus faciles à mettre en oeuvre que la loi de commande linéaire par morceaux du chapitre 5, bien que cette dernière ne soit pas d'une grande complexité.

Il est donc bien délicat de se prononcer sur la supériorité d'une méthode de synthèse par rapport aux autres. Notre expérience révèle que cela dépend étroitement du problème considéré.

Conclusion Générale

La présence simultanée d'incertitudes et de contraintes sur les commandes est une caractéristique systématique des problèmes d'automatique moderne. Malgré tout, la plupart des méthodes de commande robuste ne prennent pas en compte les limitations en amplitude sur les commandes. Similairement, la plupart des méthodes de commande contrainte ne prennent pas en compte les incertitudes. L'objectif de ce mémoire était donc de combiner les résultats obtenus indépendamment dans chaque thématique afin de pouvoir étudier les systèmes linéaires incertains à commande contrainte. Par ailleurs, afin de disposer de méthodes d'étude puissantes et efficaces, nous nous sommes efforcés d'utiliser un ensemble d'outils numériques standard et efficaces.

Dans la première partie de ce mémoire nous avons tout d'abord dans le chapitre 1 rappelé les résultats classiques ayant trait à la théorie des systèmes linéaires : modélisation des systèmes, des incertitudes, des saturations. Nous avons insisté sur la distinction entre problème d'analyse et de synthèse. Par la suite, nous avons décrit dans le chapitre 2 l'ensemble des outils sur lesquels sont basées nos méthodes de commande : équations algébriques de Riccati (AREs), inégalités matricielles linéaires (LMIs), polyèdres et ellipsoïdes, matrices polynomiales.

Dans la deuxième partie du mémoire, consistuée du seul chapitre 3, nous avons étudié le problème d'analyse du domaine de stabilité en boucle fermée, en présence d'incertitudes et de saturations. A l'aide du concept de stabilité quadratique et d'une modélisation polytopique des saturations, nous avons proposé une méthode de détermination d'une région de stabilité basée sur la résolution d'une ARE ou d'une série de relaxations LMI. Notre méthode autorise explicitement la présence de saturations. Elle permet l'étude des systèmes linéaires affectés par des incertitudes bornées en norme ou polytopiques.

Enfin, dans la troisième partie du mémoire, nous nous sommes intéressés au problème de synthèse d'un compensateur stabilisant. Nous avons proposé trois approches distinctes. Dans le chapitre 4, nous avons tout d'abord étendu les résultats d'analyse du chapitre 3 pour déterminer un compensateur dynamique par retour de sortie. A l'aide de la stabilité quadratique et d'une modélisation polytopique des saturations, une série de relaxations LMI permet d'augmenter progressivement la taille de la région des conditions initiales stabilisables en présence de saturations tout en déterminant un compensateur dynamique. Dans le chapitre 5, nous n'avons pas autorisé les saturations. Nous avons fait de telle sorte que la commande reste confinée à l'intérieur de ses bornes admissibles. Afin d'augmenter tant que possible l'ensemble des conditions initiales stabilisables, nous utilisons un gain faible de retour d'état loin de l'origine. Nous avons ensuite augmenté le gain au fur et à mesure que le système converge, obtenant ainsi une loi de commande linéaire par morceaux. Au voisinage de l'origine, nous avons appliqué un gain fort de retour d'état qui assure un certain niveau de performance. Cette méthode de synthèse permet de commander des systèmes affectés par des incertitudes bornées en norme. Elle est basée sur les AREs ou les LMIs. Finalement, dans le chapitre 6, nous avons poursuivi une approche polynomiale afin de générer une loi de commande sans saturations. Nous avons démontré que la recherche du paramètre de Youla-Kučera tendant à maximiser la taille de l'ensemble des conditions initiales stabilisables peut s'effectuer en résolvant un problème LMI convexe. Sous la forme proposée dans ce mémoire, cette méthode ne permet pas de traiter les systèmes incertains. Néanmoins, nous avons décrit la voie à suivre pour étendre nos résultats à la synthèse robuste sous contraintes.

Le problème de la synthèse de compensateurs robustes pour les systèmes incertains est un problème qui reste encore largement ouvert. Ce mémoire n'a contribué qu'à fournir un premier ensemble d'outils dont la caractéristique commune est de faire appel à des techniques numériques classiques et efficaces. Les prolongements directs des travaux de ce mémoire sont

- La synthèse d'un compensateur par retour de sortie dynamique à l'aide de la méthode du chapitre 5.
- La généralisation des résultats du chapitre 6 aux systèmes incertains, en utilisant les techniques classiques de l'approche polynomiale et d'optimisation convexe, comme décrit dans la section 6.6.
- L'extension de nos résultats d'analyse et de synthèse aux contraintes sur la dynamique du signal de commande, déjà entreprise dans [112].

D'autres domaines de recherche connexes sont également à envisager, comme par exemple

- L'application aux systèmes saturés des résultats d'analyse décrits dans [63] et basés sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov continues par morceaux. En utilisant la modélisation par régions de saturations proposée dans [40], il devrait être possible de construire une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux définie dans différentes régions polyèdrales partitionnant l'espace d'état.
- L'extension de ces résultats à la synthèse. Des premiers résultats ont été récemment obtenus dans ce sens. Dans [44], le problème de stabilisation robuste des systèmes linéaires par morceaux est mis sous la forme d'un problème convexe LMI à l'aide d'approximations ellipsoïdales des régions polyèdrales partitionnant l'espace d'état. Dans [100], le problème est traité directement à l'aide d'inégalités matricielles bilinéaires non-convexes.
- La diminution du conservatisme inhérent à l'approche quadratique des chapitres 3, 4 et 5 à l'aide des techniques de Lyapunov récemment développées dans [86]. Ces extensions concerneraient uniquement les systèmes affectés par des incertitudes de type polytopique et les fonctions de Lyapunov de type polytopique. La fonction de Lyapunov globale serait alors une combinaison linéaires de fonctions de Lyapunov quadratiques obtenues pour chacun des sommets.
- L'application des méthodes de relaxations convexes aux problèmes non-convexes de commande robuste et contrainte. Quelques résultats préliminaires ont déjà été obtenus dans le cadre de la commande robuste, voir [55, 58, 85, 61]

Bibliographie

[1] F. Alizadeh, J. P. Haeberly, M. Nayakkankuppam, M. L. Overton. SDP-PACK. Version 0.9 Beta, Rutgers University, New Jersey, 1997. Voir la page `cs.nyu.edu/cs/faculty/overton/sdppack`.

[2] J. Álvarez-Ramírez, R. Suárez, J. Álvarez. Semi-global stabilization of multi-input linear systems with saturated linear state feedback. *Systems and Control Letters*, Vol. 23, pp. 247–254, 1994.

[3] B. D. O. Anderson, J. B. Moore. Optimal control : linear quadratic methods. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.

[4] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, S. Ostrouchov, D. Sorensen. LAPACK Users' Guide, Release 2.0, SIAM, Philadelphie, Pennsylvanie, 1995. Voir la page `www.netlib.org/lapack/`.

[5] D. Arzelier. Robustesse en performance et en stabilité des systèmes linéaires incertains : une approche quadratique. *Thèse de doctorat*, Rapport LAAS-CNRS No. 92199, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France, 1992.

[6] J. P. Aubin, A. Celina. Differential inclusions. *Comprehensive Studies in Mathematics*, Vol. 264, Springer Verlag, 1984.

[7] C. B. Barber, D. P. Dobkin, H. T. Huhdanpaa. The Quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 22, No. 4, pp. 469–483, 1996. Voir la page `www.geom.umn.edu/software/qhull`.

[8] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 46, pp. 399–408, 1985.

[9] B. R. Barmish. New tools for robustness of linear systems. *Macmillan Publishing Company*, New York, 1994.

[10] A. Benzaouia, C. Burgat. Regulator problem for linear discrete-time systems with non-symmetrical constrained control. *International Journal of Control*, Vol. 48, No. 6, pp. 2441–2451, 1988.

[11] D. S. Bernstein, A. N. Michel. A chronological bibliography on saturating actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 5, pp. 375–380, 1995.

[12] J. Bernussou, P. L. D. Peres, J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems and Control Letters*, Vol. 13, pp. 65–72, 1989.

[13] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L. H. Keel. Robust control : the parametric approach. *Prentice Hall*, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

[14] G. Bitsoris, E. Gravalou. Robust linear control under state and control constraints. *Proceedings of Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 2640–2642, Tucson, Arizona, 1992.

[15] H. S. Black. Inventing the negative feedback amplifier. *IEEE Spectrum*, pp. 55–60, Décembre 1977.

[16] F. Blanchini. Feedback control for linear time-invariant systems with state and control bounds in the presence of disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 11, pp. 1231–1234, 1990.

[17] F. Blanchini. Set invariance in control - A survey. *Automatica*, Vol. 35, No. 11, pp. 1457–1467, 1999.

[18] S. P. Boyd, V. Balakrishnan, C. H. Barratt, N. M. Khraishi, X. Li, D. G. Meyer, S. A. Norman. A new CAD method and associated architectures for linear controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 3, pp. 268–283, 1988.

[19] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Vol. 15, Philadelphie, Pennsylvanie, 1994.

[20] N. Brixius, R. Sheng, F. A. Potra. SDPHA : a MATLAB implementation of homogeneous interior-point algorithms for semidefinite programming. A paraître dans *Optimization Methods and Software*, 1999. Voir la page `www.math.uiowa.edu/~brixius/SDPHA`.

[21] B. Büeler, A. Enge, K. Fukuda. Exact volume computation for polytopes : a practical study. Dans G. Ziegler (Editeur). Polytopes : combinatorics and computation. *DMV-Seminars*, Birkhäuser Verlag, 1998. Voir la page `ftp.ifor.math.ethz.ch/pub/volume/volumen.html`.

[22] C. Burgat, S. Tarbouriech. Stability and control of saturated linear systems. Chapitre 4, pp. 113–197 et Annexes C, D, E du Tome 2 de A. Fossard, D. Normand-Cyrot (Editeurs). Nonlinear systems. Chapman and Hall, Londres, 1996.

[23] E. B. Castelan, J. M. Gomes da Silva Jr., J. E. R. Cury. A reduced-order framework applied to linear systems with constrained controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 2, pp. 249–255, 1996.

[24] E. B. Castelan, J. C. Hennet. Eigenstructure Assignment for State Constrained Linear Continuous-time Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 11, pp. 1680–1685, 1993.

[25] J. Daafouz. Robustesse en performance des systèmes linéaires incertains. Placement de pôles et coût garanti. *Thèse de doctorat*, Rapport LAAS-CNRS No. 97472, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France, 1997.

[26] R. M. Dolphus, W. E. Schmitendorf. Stability analysis for a class of linear controllers under control constraints. *Proceedings of Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 77–80, Brighton, Angleterre, 1991.

[27] C. E. T. Dórea. Sur l'(A,B)-invariance de polyèdres convexes. Application à la commande sous contraintes et au problème l_1. *Thèse de doctorat*, Rapport LAAS-CNRS No. 97403, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1997.

[28] J. C. Doyle, G. Stein. Multivariable feedback design : concepts for a classical / modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, pp. 4–16, 1981.

[29] J. C. Doyle. Analysis of control systems with structured uncertainty. *IEE Proceedings, Part D*, Vol. 129, No. 6, 1982.

[30] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis. State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, pp. 831–847, 1989.

[31] J. C. Doyle, B. A. Francis, A. Tannenbaum. Feedback control theory. *Macmillan Publishing Company*, New York, 1992.

[32] C. Durieu, B. T. Polyak, E. Walter. Trace versus determinant in ellipsoidal outer-bounding with application to state estimation. *Proceedings of IFAC World Congress*, pp. 43–48, San Francisco, Californie, 1996.

[33] L. El Ghaoui, J. L. Commeau. LMITOOL 2.0 package : an interface to solve LMI problems. *E-Letters on Systems, Control and Signal Processing*, No. 125, 1999. Voir la page `www.ensta.fr/~gropco/lmi/lmitool.html`.

[34] A. T. Fuller. In the large stability of relay and saturated control systems with actuator saturation. *Systems and Control Letters*, Vol. 15, pp. 486–505, 1977.

[35] P. Gahinet, P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, pp. 421–448, 1994.

[36] G. Garcia, S. Tarbouriech, R. Suárez, J. Álvarez-Ramírez. Nonlinear bounded control for norm-bounded uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 6, pp. 1254–1258, 1999.

[37] E. G. Gilbert, K. T. Tan. Linear systems with state and control constraints : the theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 9, pp. 1008–1020, 1991.

[38] K. C. Goh, M. G. Safonov, J. H. Ly. Robust synthesis via bilinear matrix inequalities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, No. 9/10, pp. 1079–1095, 1996.

[39] G. H. Golub, C. F. Van Loan. Matrix computations. Third edition. *Johns Hopkins University Press*, Baltimore, Maryland, 1996.

[40] J. M. Gomes da Silva Jr. Sur la stabilité locale des systèmes linéaires avec saturation des commandes. *Thèse de doctorat*, Rapport LAAS-CNRS No. 97383, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1997.

[41] J. M. Gomes da Silva Jr., S. Tarbouriech. Polyhedral regions of local stability for linear discrete-time systems with saturating controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 11, pp. 2081–2085, 1999.

[42] J. M. Gomes da Silva Jr., S. Tarbouriech. Analysis of local stability of linear systems with saturating controls : a polyhedral approach. *Proceedings of Conference on Systems, Structure and Control*, IFAC, pp. 168–173, Bucarest, Roumanie, 1997.

[43] J. M. Gomes da Silva Jr., S. Tarbouriech. Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls : an LMI-based approach. *Proceedings of American Control Conference*, AACC, pp. 92–96, Philadelphia, Pennsylvanie, 1998.

[44] A. Hassibi, S. P. Boyd. Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems. *Proceedings of American Control Conference*, AACC, Philadelphia, Pennsylvanie, 1998.

[45] J. C. Hennet. Une extension du lemme de Farkas et son application au problème de régulation linéaire sous contraintes. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 308, Série I, pp. 415–419, 1989.

[46] J. C. Hennet. Discrete-time constrained linear systems. *Control and Dynamic Systems*, Vol. 71, pp. 157–213, 1995.

[47] J. C. Hennet, J. P. Béziat. A class of invariant regulators for the discrete-time linear constrained regulation problem. *Automatica*, Vol. 27, No. 3, pp. 549–554, 1991.

[48] D. Henrion. Problème du rejet de perturbations affectant un système linéaire contraint sur la commande. *Rapport de DEA*, LAAS-CNRS, Toulouse, France, 1994.

[49] D. Henrion. Reliable algorithms for polynomial matrices. *Thèse de Doctorat*, Académie Tchèque des Sciences, Prague, République Tchèque, 1998.

[50] D. Henrion, G. Garcia, S. Tarbouriech. Piecewise-linear robust control of systems with input saturation. *Proceedings of the American Control Conference*, AACC, pp. 3545–3549, Philadelphia, Pennsylvanie, 1998.

[51] D. Henrion, G. Garcia, S. Tarbouriech. Piecewise-linear robust control of systems with input saturation. *European Journal of Control*, Vol. 5, No. 1, pp. 157–166, 1999.

[52] D. Henrion, M. Šebek. Symmetric matrix polynomial equation : interpolation results. *Automatica*, Vol. 34, No. 7, pp. 811–824, 1998.

[53] D. Henrion, M. Šebek. An efficient numerical method for the discrete time symmetric matrix polynomial equation. *IEE Proceedings, Control Theory and Applications*, Vol. 145, No. 5, pp. 443–448, 1998.

[54] D. Henrion, M. Šebek. Reliable numerical methods for polynomial matrix triangularization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 3, pp. 497–508, 1999.

[55] D. Henrion, M. Šebek, S. Tarbouriech. Algebraic approach to robust controller design : a geometric interpretation. *Proceedings of American Control Conference*, AACC, pp. 2703-2707, Philadelphie, Pennsylvanie, 1998.

[56] D. Henrion, S. Tarbouriech. Relaxations LMI pour la stabilité robuste des systèmes linéaires à commande saturée. *Comptes-rendus des Journées Doctorales d'Automatique*, pp. 157–160, CNRS, Nancy, France, 1999.

[57] D. Henrion, S. Tarbouriech. LMI relaxations for robust stability of linear systems with saturating controls. *Automatica*, Vol. 35, No. 9, pp. 1599–1604, 1999.

[58] D. Henrion, S. Tarbouriech, D. Arzelier. LMI approximations for the radius of the intersection of ellipsoids. *Proceedings of Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 1759-1764, Tampa, Floride, 1998.

[59] D. Henrion, S. Tarbouriech, G. Garcia. Output feedback robust stabilization of uncertain linear systems with saturating controls. *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 193-198, San Diego, Californie, 1997.

[60] D. Henrion, S. Tarbouriech, G. Garcia. Output feedback robust stabilization of uncertain linear systems with saturating controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 11, pp. 2230–2237, 1999.

[61] D. Henrion, S. Tarbouriech, M. Šebek. Rank-one LMI approach to simultaneous stabilization of linear systems. *Systems and Control Letters*, Vol. 38, No. 2, pp. 79–89, 1999.

[62] H. Hindi, S. P. Boyd. Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. *Proceedings of Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 903–908, Tampa, Floride, 1998.

[63] M. Johansson, A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 4, pp. 555-559, 1998.

[64] T. Kailath. Linear Systems. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

[65] H. K. Khalil. Nonlinear Systems. *MacMillan*, 1992.

[66] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, K. Zhou. Robust stabilization of uncertain linear systems : quadratic stabilizability and $\mathcal{H}_\infty$ control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 3, pp. 356–361, 1990.

[67] J. H. Kim, Z. Bien. Robust stability of uncertain linear systems with saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 1, pp. 225–229, 1994.

[68] M. Klaï. Stabilisation des systèmes linéaires continus contraints sur la commande par retour d'état et sortie saturés. *Thèse de doctorat*, Rapport LAAS-CNRS No. 94323, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1994.

[69] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, C. N. Nett. A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, Vol. 30, pp. 1869–1883, 1994.

[70] V. Kučera. Stability of discrete linear feedback systems. *Proceedings of the IFAC World Congress*, Boston, Massachusetts, Article No. 44-1, 1975.

[71] V. Kučera. Discrete linear control : the polynomial equation approach. *John Wiley and Sons*, Chichester, 1979.

[72] V. Kučera. Analysis and design of discrete linear control systems. *Prentice Hall*, Londres, 1991.

[73] V. Kučera. Diophantine equations in control : a survey. *Automatica*, Vol. 29, No. 6, pp. 1361–1375, 1993.

[74] P. Lancaster, M. Tismenetsky. The theory of matrices. Second edition with applications. *Academic Press*, New York, 1985.

[75] A. J. Laub. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, No. 6, pp. 913–921, 1979.

[76] Z. Lin, A. Saberi. Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedbacks. *Systems and Control Letters*, Vol. 21, pp. 225–239, 1993.

[77] C. C. H. Ma. Instability of linear unstable system with inputs limits. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 113, pp. 742–744, 1991.

[78] The MathWorks, Inc. Optimization Toolbox for Matlab, Release 1.5.2, 1997. Voir la page `www.mathworks.com`.

[79] The MathWorks, Inc. Control System Toolbox for Matlab, Release 4.1, 1997. Voir la page `www.mathworks.com`.

[80] The MathWorks, Inc. LMI Control Toolbox for Matlab, Release 1.0.4, 1997. Voir la page `www.mathworks.com`.

[81] A. Megretski. L_2 BIBO output feedback stabilization with saturated control. *Proceedings of IFAC World Congress*, pp. 435–440, San Francisco, Californie, 1996.

[82] B. E. A. Milani, A. N. Carvalho. Robust optimal linear regulator design for discrete-time systems under state and control constraints. *Proceedings of Symposium on Robust Control Design*, IFAC, pp. 273–278, Rio de Janeiro, Brésil, 1994.

[83] A. P. Molchanov, E. S. Pyatnitskii. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems and Control Letters*, Vol. 13, pp. 59–64, 1989.

[84] Y. Nesterov, A. Nemirovskii. Interior-point polynomial methods in convex programming. *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Vol. 13, Philadelphie, Pennsylvanie, 1994.

[85] D. Peaucelle, D. Arzelier, D. Henrion. Performance and quadratic stabilizability via dynamic output feedback for uncertain generalized models. *Proceedings of IFAC World Congress*, Vol. G, pp. 449–454, Pékin, Chine, 1999.

[86] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, J. Bernussou. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. Rapport LAAS-CNRS No. 99183, 1999.

[87] P. L. D. Peres. Sur la robustesse des systèmes linéaires : approche par programmation linéaire. *Thèse de doctorat*, Rapport LAAS-CNRS No. 89384, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1989.

[88] I. R. Petersen. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems and Control Letters*, Vol. 8, pp. 351–356, 1987.

[89] I. R. Petersen, D. C. McFarlane. Optimal guaranteed cost control of uncertain linear systems. *Proceedings of American Control Conference*, AACC, Chicago, Illinois, 1992.

[90] C. Pittet. Stabilisation de systèmes à commande contrainte. Application à une table d'excitation microdynamique. *Thèse de doctorat*, Rapport LAAS-CNRS No. 98434, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1998.

[91] C. Pittet, S. Tarbouriech, C. Burgat. Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and Popov criteria.*Proceedings of Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 4518–4523, San Diego, Californie, 1997.

[92] Polyx, Inc. Polynomial Toolbox for Matlab, Version 2.0, 1999. Voir les pages `www.polyx.com` ou `www.polyx.cz`.

[93] A. Saberi, P. Sannuti, B. M. Chen. $\mathcal{H}_2$ optimal control. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

[94] A. Saberi, Z. Lin, A. R. Teel. Control of linear systems with saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 3, pp. 368–378, 1996.

[95] M. Sampei, T. Mita, N. Nakamachi. An algebraic approach to $\mathcal{H}_\infty$ output feedback control problems. *Systems and Control Letters*, Vol. 14, pp. 13–24, 1990.

[96] W. E. Schmitendorf. Designing stabilizing controllers for uncertain systems using the riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 4, pp. 376–379, 1988.

[97] M. Šebek, S. Pejchová, D. Henrion, H. Kwakernaak. Numerical methods for zeros and determinant of polynomial matrix. *Proceedings of Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, IEEE, pp. 488-491, Chania, Crète, Grèce, 1996.

[98] M. Šebek, H. Kwakernaak, D. Henrion, S. Pejchová. Recent progress in polynomial methods and POLYNOMIAL TOOLBOX for MATLAB Version 2.0. *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 3661-3668, Tampa, Floride, 1998.

[99] J. M. Shewchun, E. Féron. High Performance Bounded Control. *Proceedings of the American Control Conference*, AACC, pp. 3491–3495, Albuquerque, Nouveau Mexique, 1997.

[100] O. Slupphaug, B. A. Foss. Quadratic stabilization of discrete-time uncertain nonlinear multi-model systems using piecewise-affine state-feedback. *International Journal of Control*, Vol. 72, No. 7/8, pp. 686–701, 1999.

[101] G. Stein. Respect the unstable. Bode lecture. *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, Tampa, Floride, 1989.

[102] R. Suárez, J. Álvarez-Ramírez, J. Solís-Daun. Linear systems with bounded inputs : global stabilization with eigenvalue placement. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 7, No. 9, pp. 835–846, 1997.

[103] H. J. Sussmann, E. D. Sontag, Y. Yang. A General Result on the Stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 12, pp. 2411–2425, 1994.

[104] M. Sznaier. A set induced norm approach to the robust control of constrained systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 31, No. 3, pp. 733–746, 1993.

[105] M. Sznaier, A. Sideris. Suboptimal norm based robust control of constrained systems with an $\mathcal{H}_\infty$ cost. *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, Brighton, Angleterre, pp. 2280–2286, 1991.

[106] S. Tarbouriech. Sur la stabilité des régulateurs à retour d'état saturé. *Thèse de doctorat*, Rapport LAAS-CNRS No. 91047, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1991.

[107] S. Tarbouriech. Contribution à l'étude des systèmes saturés. *Habilitation à diriger des recherches*, Rapport LAAS-CNRS No. 98209, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1998.

[108] S. Tarbouriech, C. Burgat. Positively invariant sets for constrained continuous-time systems with cone properties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 2, pp. 401–405, 1994.

[109] S. Tarbouriech, G. Garcia (Editeurs). Control of uncertain systems with bounded inputs. Lecture Notes in Control and Information Science, Vol. 227, *Springer Verlag*, 1997.

[110] S. Tarbouriech, G. Garcia. Local stabilization for linear discrete-time systems with bounded controls and norm-bounded time-varying uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 8, pp. 831–844, 1998.

[111] S. Tarbouriech, J. M. Gomes da Silva Jr. Admissible polyhedra for discrete-time linear systems with saturating controls. *Proceedings of American Control Conference*, AACC, pp. 3915–3919, Albuquerque, Nouveau Mexique, 1997.

[112] S. Tarbouriech, G. Garcia, D. Henrion. Local stabilization of linear systems with position and rate bounded actuators. *Proceedings of IFAC World Congress*, Vol. F, pp. 459–464, Pékin, Chine, 1999.

[113] S. Tarbouriech, M. Klaï, C. Burgat. Robust local stabilization conditions for linear systems with saturating controls. *Proceedings of Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 1006–1011, Orlando, Floride, 1994.

[114] L. Vandenberghe, S. P. Boyd. SP : software for semidefinite programming. Version Beta. Information Systems Laboratory, Stanford University, Calfornie, 1994. Voir la page `www.stanford.edu/~boyd`.

[115] L. Vandenberghe, S. P. Boyd. Semidefinite programming. *SIAM Review*, Vol. 38, pp. 49–95, 1996.

[116] L. Vandenberghe, S. P. Boyd, S. P. Wu. Determinant maximization with linear matrix inequality constraint. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 19, No. 2, pp. 499–533, 1998.

[117] R. J. Vanderbei. Linear Programming : Foundations and Extensions. *Kluwer Academic Publishers*, New York, 1997.

[118] M. Vassilaki, J. C. Hennet, G. Bitsoris. Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints. *International Journal of Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1727–1735, 1988.

[119] M. Vidyasagar. Control systems synthesis : a factorization approach. *MIT Press*, Cambridge, Massachusetts, 1985.

[120] H. K. Wimmer. Monotonicity of maximal solutions of algebraic Riccati equations. *Systems and Control Letters*, Vol. 5, pp. 317–319, 1985.

[121] G. F. Wredenhagen, P. R. Bélanger. Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints. *Automatica*, Vol. 30, No. 3, pp. 403–416, 1994.

[122] S. P. Wu, S. P. Boyd. SDPSOL : a parser/solver for semidefinite programming and determinant maximization problems with matrix structure. Version Beta. Information Systems Laboratory, Stanford University, Californie, 1996. Voir la page `www.stanford.edu/~boyd`.

[123] D. C. Youla, H. A. Jabr, J. J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II : the multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 21, pp. 319–338, 1976.

[124] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover. Robust and optimal control. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.